

# The in-control performance of the CCC- $r$ chart with estimated parameters

Jaeyeon Kim<sup>a</sup> · Minji Kim<sup>a</sup> · Jaeheon Lee<sup>a,1</sup>

<sup>a</sup>Department of Applied Statistics, Chung-Ang University

(Received May 11, 2018; Revised July 5, 2018; Accepted July 25, 2018)

---

## Abstract

The CCC- $r$  chart is more effective than traditional attribute control charts for monitoring high-quality processes. In-control process parameters are typically unknown and should be estimated when implementing a CCC- $r$  chart. Phase II control chart performance can deteriorate due to the effect of the estimation error. In this paper, we used the standard deviation of average run length (ARL) as well as the average of ARL to quantify the between-practitioner variability in the CCC- $r$  chart performance. The results indicate that the CCC- $r$  chart requires larger Phase I data than previously recommended in the literature in order to have consistent chart in-control performance among practitioners.

Keywords: ARL, average of ARL, CCC- $r$  chart, Phase I, standard deviation of ARL

---

## 1. 서론

통계적 공정관리(statistical process control; SPC)는 제조와 서비스 과정을 관리하고 향상하는데 매우 효율적인 절차이고, 관리도(control chart)는 SPC 절차를 수행하는 데 널리 사용되고 있으며 요구되는 수준의 제품 품질을 유지하기 위해 생산 공정을 모니터링 할 수 있는 유용한 도구이다.

일반적으로 관리도 사용은 제1국면(Phase I)과 제2국면(Phase II)으로 나누어서 생각할 수 있다. 제1국면에서는 일정한 크기의 표본을 추출하고 이를 사용하여 관리상태의 공정모수를 추정하고 공정의 안정성을 평가하며, 제2국면에서는 제1국면에서 추정된 모수에 기초한 관리한계를 사용하여 공정모수의 변화를 탐지하게 된다. 실제로 제2국면에서 관리도의 성능은 제1국면으로부터 추정된 모수에 따라 달라지게 된다. 통계적 공정관리에서 전통적으로 알려진 방법은 부그룹의 크기가 4 또는 5인 20–25개의 부그룹의 표본을 사용하는 것이다. Montgomery (2013)는 부그룹의 크기가 4–6인 최소 20–25개의 부그룹에 기초하여 모수를 추정하는 것을 추천하였고, Quesenberry (1993)는  $m = 400/(n - 1)$ 개인 부그룹의 표본을 사용해야 어느 정도의 관리상태의 성능을 보장한다고 언급하였다.

제1국면의 표본은 실무자에 따라 서로 다르게 추출되고 따라서 서로 다른 공정모수의 추정치를 얻기 때문에, 관리상태에서의 성능에 대한 분석을 통하여 추정 오차의 영향을 판단하는 것은 관리도를 적용할

---

This research was supported by the Chung-Ang University research grant in 2018, and supported by Basic Science Research Program through the National Research Foundation of Korea (NRF) funded by the Ministry of Education (2017R1D1A1B03029035).

<sup>1</sup>Corresponding author: Department of Applied Statistics, Chung-Ang University, 84 Heukseok-ro, Dongjak-gu, Seoul 06974, Korea. E-mail: [jaeheon@cau.ac.kr](mailto:jaeheon@cau.ac.kr)

때 중요한 과정이 된다. 실무자들의 서로 다른 제1국면 표본으로부터 서로 다른 관리상태에서의 평균런 길이(average run length; ARL), 즉  $ARL_0$  값이 얻어진다. 이러한 이유에서 대부분 연구자들은 추정 오차를 줄이기 위해 관리상태에서의 ARL의 평균(average of ARL; AARL), 즉  $AARL_0$ 가 미리 설정한 값에 근접하도록 제1국면에서 필요한 표본의 크기를 결정할 것을 권유하고 있다.

최근에는 제1국면에서 필요한 표본의 크기를 결정할 때, ARL의 평균인 AARL뿐만 아니라 ARL의 표준편차(standard deviation of ARL)인 SDARL을 사용해야 한다는 연구가 많이 진행되었다. AARL과 SDARL을 함께 사용하여 관리도의 관리상태 성능을 평가한 연구는 다음과 같다. Zhang 등 (2013)은 기하 관리도(geometric chart), Lee 등 (2013)은 Bernoulli CUSUM(cumulative sum) 관리도, Saleh 등 (2015a)은 exponentially weighted moving average (EWMA) 관리도, Saleh 등 (2015b)은 Shewhart  $\bar{X}$ 와  $X$  관리도, Zhao와 Driscoll (2016)은  $c$  관리도, 그리고 Faraz 등 (2017)은  $np$  관리도에 대한 관리상태 성능을 연구하였다. 이 연구들의 공통적인 결과는 AARL뿐만 아니라 서로 다른 제1국면 표본을 사용함으로써 발생하는 변동을 나타내는 SDARL을 함께 고려할 경우, 이전에 알려진 것보다 훨씬 많은 제1국면 표본이 필요하다는 것이다. 또한 각 관리도를 사용할 때 실무자가 사용하고자 하는 제1국면 표본의 수에 대한 AARL과 SDARL에 대한 정보를 제공함으로써, 효율적인 관리도의 설계가 가능하도록 도움을 주고 있다.

이 논문에서 고려하는 CCC- $r$  관리도는 최근의 산업공정과 같은 고품질공정(high-quality process)에서 불량률을 관리하기 위해 유용하게 사용되는 관리도이다. 고품질공정에서는 불량품의 비율이 아주 작기 때문에, 전통적인 계수형 관리도의 사용은 적합하지 않은 경우가 많다. Cumulative count of conforming (CCC)는 두 개의 연속적인 불량품 사이에서 관측한 양호품의 누적 개수 또는 조사한 총 누적 개수를 나타내는 말로서, CCC- $r$  관리도는  $r$ 개의 불량품이 발생할 때까지 조사한 제품의 누적 개수를 통계량으로 사용하는 관리도이다. 이 관리도는 음이항분포(negative binomial distribution)를 이용하여 그 특성을 규명할 수 있다.

이 논문에서는 고품질공정에서 유용한 CCC- $r$  관리도의 기본적인 절차 및 이론을 소개하고, 관리한계를 설정하는 방법과 추정된 관리한계에 대해 설명하였다. 다음으로 추정된 관리한계를 사용할 경우 제1국면의 표본의 크기에 따른 CCC- $r$  관리도의 관리상태 성능을  $AARL_0$ 와  $SDARL_0$ 를 사용하여 평가하고, 실제 공정에서 이용할 수 있는 지침을 제공하고자 한다.

## 2. CCC- $r$ 관리도

### 2.1. CCC- $r$ 관리도 소개

고품질공정에서 불량률을 관리할 때, 전통적으로 많이 사용하는  $p$  관리도와  $np$  관리도를 제2국면에 적용하기 위해서는 불량품을 관측할 수 있도록 매시점마다 아주 많은 수의 표본을 추출해야 한다는 어려움이 있다. 또한 미리 결정된 수의 표본을 모두 조사하기 전에는 관리도 절차를 적용할 수 없고 따라서 공정 상태에 대한 판단이 늦어질 수 있다는 단점이 있다 (Xie 등, 1999). 그 대안으로 사용할 수 있는 방법이 CCC- $r$  관리도인데, 이 관리도는  $r$ 개의 불량품이 관측될 때까지 조사한 제품의 누적 개수가 관리통계량이며, 일반적으로  $r$ 값은 1-5 정도의 크기 않은 정수를 사용한다.  $r = 1$ 인 경우 기하 관리도라고 부르며 따로 구분하여 사용하는 경우도 있기 때문에, CCC- $r$  관리도에서  $r$ 값은 2-5의 정수를 사용한다고 할 수 있다.

$Y_{r,i}$ 를  $r \times (i-1)$ 번째 불량품을 관측한 후  $r \times i$ 번째 불량품을 관측할 때까지 조사한 제품의 누적 개수라고 정의하면, CCC- $r$  관리도는 미리 설정한 관리한계인 관리상한(upper control limit; UCL)  $UCL_r$ 과 관리하한(lower control limit; LCL)  $LCL_r$ 에 대해  $Y_{r,i} \geq UCL_r$ 이거나  $Y_{r,i} \leq LCL_r$ 인 경우 이상상태

의 신호를 주게 된다. 이때  $Y_{r,i}$ 는 모수가  $r$ 과  $p$ 인 음이항분포를 따름을 쉽게 알 수 있고, 따라서  $Y_{r,i}$ 의 확률질량함수와 누적분포함수는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$P(Y_{r,i} = n | r, p) = \binom{n-1}{r-1} p^r (1-p)^{n-r}, \quad n = r, r+1, \dots,$$

$$F(n | r, p) = \sum_{j=r}^n P(Y_{r,i} = j) = \sum_{j=r}^n \binom{j-1}{r-1} p^r (1-p)^{j-r}.$$

## 2.2. $p_0$ 가 알려진 경우 관리한계 설정

관리도를 적용하기 위하여 관리한계를 설정해야 한다. 일반적으로 관리통계량의 분포가 정규분포와 같이 대칭인 경우  $3\sigma$  관리한계( $3\sigma$  limit)를 사용하지만, 음이항분포와 같이 대칭을 많이 벗어나는 경우 확률한계(probability limit)를 사용하고 있다. 확률한계의 방법은 공정이 관리상태일 때 관리통계량이 관리한계 밖으로 벗어날 확률인 제1종 오류를 미리 설정한  $\alpha$ 값이 되도록 관리한계를 설정하는 것이다. 이 경우 관리상한  $UCL_r$ 과 관리하한  $LCL_r$ 은 각각 식 (2.1)과 (2.2)를 만족하게 된다. 여기서  $r$ 은 공정의 상황에 맞게 미리 설정한 값이고,  $p_0$ 는 관리상태일 때 불량률  $p$ 의 값으로 알려져 있음을 가정한다.

$$F(UCL_r | r, p_0) = \sum_{j=r}^{UCL_r-1} \binom{j-1}{r-1} p_0^r (1-p_0)^{j-r} = 1 - \frac{\alpha}{2}, \quad (2.1)$$

$$F(LCL_r | r, p_0) = \sum_{j=r}^{LCL_r} \binom{j-1}{r-1} p_0^r (1-p_0)^{j-r} = \frac{\alpha}{2}. \quad (2.2)$$

그러나  $Y_{r,i}$ 는 이산형 확률변수이므로 위의 식을 정확하게 만족하는 관리한계  $UCL_r$ 과  $LCL_r$ 을 계산할 수 없기 때문에, 가장 가까운 정수값을 사용하게 된다. 즉,  $UCL_r$ 은 식 (2.3)을 만족하는 가장 작은 정수이고,  $LCL_r$ 은 식 (2.4)를 만족하는 가장 큰 정수가 된다.

$$1 - F(UCL_r - 1 | r, p_0) \leq \frac{\alpha}{2}, \quad (2.3)$$

$$F(LCL_r | r, p_0) \leq \frac{\alpha}{2}. \quad (2.4)$$

## 2.3. $p_0$ 가 알려져 있지 않은 경우 관리한계 설정

일반적으로 공정에서  $p_0$ 는 알려져 있지 않은 경우가 대부분이다. 따라서 이를 추정하기 위해 제1국면에서의 표본을 부그룹의 구분 없이 모두  $m$ 개 조사했다고 가정해 보자. 이때  $p_0$ 의 추정은 다음과 같은 최대우도추정량(maximum likelihood estimator)을 사용한다.

$$\hat{p}_0 = \frac{N}{m},$$

여기서  $N$ 은 조사한  $m$ 개의 표본 중에서 관측된 불량품의 수를 나타내며, 확률변수  $N$ 은 모수가  $m$ 과  $p_0$ 인 이항분포(binomial distribution)를 따르게 된다.

$p_0$ 가 알려져 있지 않은 경우  $\hat{p}_0$ 을 이용하여 관리한계를 추정하는 방법은 식 (2.3)과 (2.4)에서와 유사하게 다음의 관계식을 이용할 수 있다. 즉, 관리상한  $\widehat{UCL}_r(N)$ 은 식 (2.5)를 만족하는 가장 작은 정수이고, 관리하한  $\widehat{LCL}_r(N)$ 은 식 (2.6)을 만족하는 가장 큰 정수가 된다.

$$1 - F(\widehat{UCL}_r(N) - 1 | r, \hat{p}_0) \leq \frac{\alpha}{2}, \quad (2.5)$$

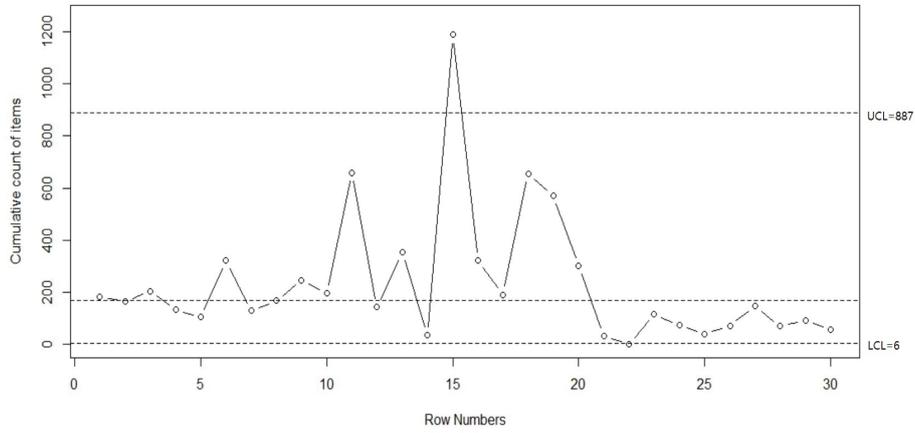
$$F(\widehat{LCL}_r(N) | r, \hat{p}_0) \leq \frac{\alpha}{2}. \quad (2.6)$$

**Table 2.1.** A data set with fraction nonconforming  $p$  being 0.01 for the first 20 values, 0.005 for the next 20, and 0.02 for the last 20 respectively

85	98	30	135	195	8	9	124	8	97
185	136	66	64	87	80	219	28	162	33
60	599	92	51	352	1	12	23	508	680
101	221	156	35	87	568	339	232	20	280
27	4	1	0	60	56	61	13	3	36
64	7	7	141	29	41	12	79	18	38

**Table 2.2.** Cumulative count of items produced until two nonconforming items are observed

183	165	203	133	105	321	130	167	247	195
659	143	353	35	1188	322	191	655	571	300
31	1	116	74	39	71	148	70	91	56



**Figure 2.1.** The CCC-2 chart for data set in Table 2.2. UCL = upper control limit; LCL = lower control limit; CCC = cumulative count of conforming.

CCC- $r$  관리도는  $Y_{r,i} \geq \widehat{UCL}_r(N)$ 이거나  $Y_{r,i} \leq \widehat{LCL}_r(N)$ 인 경우 이상상태 신호가 발생하는데, 이 사건을  $B_i$ 로 나타내면  $p = p_0$ 인 관리상태에서  $B_i$ 의 확률, 즉 오경보의 확률은 다음과 같이 계산한다.

$$P_0(B_i | N) = 1 - F(\widehat{UCL}_r(N) - 1 | r, p_0) + F(\widehat{LCL}_r(N) | r, p_0).$$

**2.4. CCC- $r$  관리도의 적용 예**

이번 절에서는 CCC- $r$  관리도를 적용한 예를 소개하고자 한다. 이를 위하여 Table 2.1과 같이 총 60개의 불량품 발생시점 데이터를 생성했는데, 처음 20개의 데이터는 불량률이  $p = 0.01$ , 다음 20개의 데이터는  $p = 0.005$ , 그리고 마지막 20개의 데이터는  $p = 0.02$ 인 기하분포에서 생성하였다. 이 데이터는 관리상태의 불량률은  $p_0 = 0.01$ 이고, 불량률이  $p = 0.005$ 로 감소한 경우와  $p = 0.02$ 로 증가한 경우를 나타내고 있다.

이제 생성된 데이터에 대해서  $r = 2$ 인 CCC-2 관리도를 적용해보겠다. 여기서  $p_0 = 0.01$ 은 알려져 있음을 가정한다. 먼저  $\alpha = 0.0027$ 을 사용하여 식 (2.3)과 (2.4)를 만족하는 관리한계를 계산하면  $UCL_2 = 887$ 과  $LCL_2 = 6$ 을 얻을 수 있다. 타점하는 통계량  $Y_{2,i}$ 는 Table 2.1의 불량품 발생시점 데이

터를 2개씩 누적하면 Table 2.2와 같이 계산된다. 이  $Y_{2,i}$  ( $i = 1, 2, \dots, 30$ )를 관리한계와 함께 타점한 관리도를 Figure 2.1에 나타내었다.

Figure 2.1의 결과를 살펴보자. 먼저 관리상태인 시점 1-10에는 관리한계를 벗어나는 오경보가 없으며, 불량률이 감소한 시점인 11-20의 구간에서는 시점 15에서 관리상한을 벗어나는 점이 발생하였다. 또한 불량률이 증가한 시점인 21-30의 구간에서는 시점 22에서 관리하한을 벗어나는 점이 발생하였다. 따라서 이 예에서 CCC-2 관리도는 공정 불량률의 변화를 효율적으로 탐지하는 것으로 나타났다.

### 3. 관리상태에서의 성능

#### 3.1. 성능 측도

공정 모니터링의 시작으로부터 이상신호 발생까지 추출한 표본 수를 런길이(run length; RL)라고 한다. 공정이 관리상태일 때 런길이는 오경보와 관련이 있기 때문에 가능한 큰 값을 갖는 것이 좋으며, 이상상태일 때 런길이는 이상원인의 탐지 능력과 관련이 있기 때문에 가능한 작은 값을 갖는 것이 효율적인 관리도가 된다. 런길이는 추출한 표본에 영향을 받게 되어 확률분포를 갖기 때문에, 일반적으로 런길이의 평균인 ARL을 이용하여 관리도의 효율을 비교한다.

제1국면을 통하여 공정모수와 관리한계를 추정하는 경우, ARL은 추정량의 분포에 영향을 받는 확률변수가 된다. 따라서 대부분의 연구에서는 ARL의 기댓값인 AARL을 사용하여 관리도의 관리상태에서의 성능을 평가하고 있다. 즉, 제1국면의 표본 크기에 따른 AARL값을 비교하고, 이 값이 사전에 설정한 값에 가까도록 표본 크기를 결정하는 것이다. 그러나 ARL의 산포가 큰 경우 안정적인 관리상태의 성능을 보장할 수 없기 때문에, ARL의 표준편차인 SDARL을 함께 고려하여 관리도의 성능을 판단하고 제1국면의 표본 크기를 결정하는 것이 좀 더 합리적인 방법이 될 것이다. 즉, AARL이 미리 설정한 값에 가까우면서 SDARL이 너무 크지 않도록 제1국면의 표본 크기를 결정하는 것이다.

CCC- $r$  관리도는 Shewhart 관리도 범주에 속하기 때문에 런길이의 분포는 기하분포를 따르게 된다. 따라서 관리상태의 ARL은  $ARL_0 = 1/P_0(B_i | N)$ 이 된다. 이 논문에서는 AARL과 SDARL을 함께 사용하여 CCC- $r$  관리도의 관리상태 성능을 평가하였으며, 관리상태에서의 AARL과 SDARL은 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$AARL_0 = E_N [ARL_0], \quad (3.1)$$

$$SDARL_0 = \sqrt{E_N [ARL_0^2] - \{E_N [ARL_0]\}^2}. \quad (3.2)$$

이때  $E_N [ARL_0]$ 와  $E_N [ARL_0^2]$ 은  $N$ 이 모수가  $m$ 과  $p_0$ 인 이항분포를 따르기 때문에

$$E_N [ARL_0] = \sum_{n=0}^m \frac{1}{P_0(B_i | N = n)} \binom{m}{n} p_0^n (1 - p_0)^{m-n},$$

$$E_N [ARL_0^2] = \sum_{n=0}^m \frac{1}{\{P_0(B_i | N = n)\}^2} \binom{m}{n} p_0^n (1 - p_0)^{m-n}$$

과 같이 계산할 수 있다.

#### 3.2. $\alpha$ , $p_0$ , $r$ , $m$ 에 따른 성능 비교

이제 식 (3.1)과 (3.2)에 정의된 AARL과 SDARL을 계산하여, CCC- $r$  관리도에서 추정된 모수를 사용한 경우 관리상태의 성능을 평가하고자 한다. 달성하고자 미리 설정한 제1종의 오류  $\alpha$ , 실제 공정상태

**Table 3.1.** Values of  $AARL_0$  and  $SDARL_0$  with estimated control limits when  $\alpha = 0.0027$ 

$m$	$p_0 = 0.0005$			$p_0 = 0.001$			$p_0 = 0.005$		
	$r = 2$	$r = 3$	$r = 4$	$r = 2$	$r = 3$	$r = 4$	$r = 2$	$r = 3$	$r = 4$
10,000	225.0	190.4	167.7	264.0	235.0	212.2	294.4	304.3	295.6
	147.5	141.4	137.4	134.2	134.5	133.9	81.2	93.0	96.4
20,000	269.1	236.4	212.8	299.5	276.4	255.6	307.7	324.6	321.0
	138.4	135.7	134.5	121.0	122.1	122.7	66.1	76.3	78.9
50,000	313.4	289.8	269.5	331.2	318.1	303.5	316.2	340.2	342.1
	119.2	118.2	118.7	100.0	100.3	101.1	46.8	55.0	57.6
100,000	335.8	320.0	304.6	345.1	339.0	329.5	319.5	345.9	350.5
	102.4	101.4	101.9	81.8	82.8	83.3	<b>34.7</b>	41.5	43.5
200,000	349.5	340.8	330.7	352.3	351.8	346.6	320.5	349.1	355.1
	84.1	83.7	83.9	64.1	65.7	66.2	24.3	<b>30.6</b>	<b>32.2</b>
300,000	354.8	349.2	341.6	355.0	356.5	353.2	320.5	350.2	356.7
	73.4	73.6	73.6	54.6	56.5	56.8	19.1	25.4	26.7
400,000	357.4	353.6	347.7	356.3	359.0	356.7	320.3	350.7	357.5
	66.0	66.5	66.6	48.4	50.3	50.8	15.9	22.3	23.4
500,000	359.0	356.4	351.6	357.0	360.4	358.9	320.0	351.1	358.0
	60.6	61.2	61.4	43.9	45.8	46.3	13.9	20.1	21.0
600,000	360.0	358.4	354.3	357.6	361.4	360.4	319.8	351.2	358.3
	56.2	57.1	57.3	40.5	42.4	42.9	12.5	18.4	19.3
700,000	360.8	359.7	356.2	358.1	362.2	361.5	319.6	351.5	358.5
	52.8	53.7	53.9	37.8	39.6	40.2	11.5	17.1	17.9
800,000	361.4	360.8	357.8	358.3	362.8	362.3	319.4	351.6	358.7
	49.9	50.9	51.1	<b>35.6</b>	37.3	37.9	10.8	16.1	16.8
900,000	361.8	361.7	359.0	358.4	363.2	363.0	319.2	351.7	358.8
	47.5	48.6	48.8	33.7	<b>35.4</b>	<b>35.9</b>	10.2	15.2	15.9
1,000,000	362.2	362.3	360.0	358.7	363.5	363.5	319.0	351.7	359.0
	45.3	46.3	46.7	32.1	33.8	34.3	9.8	14.5	15.1
2,000,000	363.8	365.4	364.6	359.5	365.1	365.8	317.5	352.0	359.5
	<b>33.1</b>	<b>34.2</b>	<b>34.6</b>	23.1	24.4	24.9	8.4	10.6	10.9
5,000,000	364.6	367.3	367.4	359.9	366.1	367.3	314.8	351.3	359.7
	21.3	22.2	22.6	14.8	15.7	16.0	7.9	7.1	7.1
$\infty$	367.8	369.5	370.3	366.1	369.5	369.8	340.1	361.4	366.1
	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0

AARL = average of ARL; SDARL = standard deviation of ARL; ARL = average run length.

에서의 불량률  $p_0$ , 그리고 CCC- $r$  관리도의 모수  $r$ 에 대하여 제1국면의 표본 크기  $m$ 에 따른  $AARL_0$ 와  $SDARL_0$ 을 계산하여 Tables 3.1-3.3에 수록하였다.  $SDARL_0$ 의 합리적인 허용한도에 대한 이론적인 연구는 아직 없지만, Zhang 등 (2013)은  $SDARL_0$ 가 미리 설정한  $ARL_0 (= 1/\alpha)$ 의 10% 이내에 들도록 표본 크기  $m$ 을 설정하는 것이 바람직하다고 제안했으며, 이후의 연구에서도 이 규칙을 대부분 준용하였다.

관리상태의 성능 평가를 위하여 이 논문에서  $\alpha$ 는 0.0027, 0.005, 0.002,  $p_0$ 는 0.0005, 0.001, 0.005인 경우를 고려하였다. 그리고  $r = 1$ 인 기하 관리도의 관리상태 성능에 대해서는 Yang 등 (2002)과 Zhang 등 (2013)이 연구하였기 때문에 이 논문에서  $r$ 은 2, 3, 4인 경우를 고려하였다.

**Table 3.2.** Values of  $AARL_0$  and  $SDARL_0$  with estimated control limits when  $\alpha = 0.005$

$m$	$p_0 = 0.0005$			$p_0 = 0.001$			$p_0 = 0.005$		
	$r = 2$	$r = 3$	$r = 4$	$r = 2$	$r = 3$	$r = 4$	$r = 2$	$r = 3$	$r = 4$
10,000	124.5	106.0	93.8	146.7	130.3	118.0	167.1	168.3	163.5
	77.1	74.6	72.9	70.0	70.1	70.1	43.0	47.3	49.4
20,000	148.0	130.8	118.3	165.3	152.2	141.3	173.3	178.3	176.4
	71.0	70.5	70.3	62.1	62.4	63.3	34.5	38.2	39.8
50,000	171.8	159.0	148.5	181.6	174.0	166.5	177.7	186.4	186.7
	60.2	60.0	60.7	50.2	50.2	51.1	24.3	27.5	28.5
100,000	183.3	174.7	166.9	188.4	184.6	179.9	179.4	189.2	190.9
	51.0	50.7	51.3	40.7	40.9	41.4	<b>18.3</b>	20.6	21.5
200,000	190.4	185.4	180.3	192.1	191.1	188.4	180.2	190.7	193.1
	41.5	41.3	41.6	31.7	32.2	32.5	13.3	<b>15.1</b>	<b>15.8</b>
300,000	192.8	189.6	185.8	193.4	193.4	191.7	180.5	191.3	193.8
	36.0	36.1	36.2	26.9	27.5	27.8	10.8	12.5	13.1
400,000	194.1	191.8	188.9	194.1	194.7	193.5	180.7	191.5	194.2
	32.4	32.5	32.6	23.8	24.5	24.7	9.1	11.0	11.4
500,000	194.9	193.2	190.8	194.5	195.4	194.5	180.8	191.7	194.4
	29.7	29.9	30.0	21.5	22.3	22.5	7.9	9.8	10.2
600,000	195.5	194.2	192.2	194.7	195.9	195.2	180.9	191.8	194.6
	27.5	27.8	27.9	<b>19.9</b>	20.6	20.8	7.1	9.0	9.4
700,000	195.8	194.9	193.2	194.9	196.3	195.8	180.9	191.8	194.7
	25.8	26.1	26.3	18.5	<b>19.2</b>	<b>19.5</b>	6.4	8.4	8.7
800,000	196.1	195.4	193.9	195.0	196.5	196.2	181.1	191.9	194.8
	24.4	24.7	24.9	17.4	18.1	18.3	5.9	7.9	8.2
900,000	196.3	195.8	194.5	195.2	196.7	196.5	181.1	192.0	194.8
	23.1	23.5	23.7	16.5	17.2	17.4	5.5	7.5	7.7
1,000,000	196.5	196.1	195.0	195.3	196.9	196.7	181.2	192.0	194.9
	22.1	22.5	22.7	15.7	16.4	16.6	5.2	7.1	7.3
2,000,000	197.2	197.7	197.2	195.6	197.7	197.9	181.7	192.2	195.1
	<b>16.1</b>	<b>16.5</b>	<b>16.7</b>	11.3	11.8	12.0	4.0	5.2	5.3
5,000,000	197.7	198.6	198.6	195.9	198.1	198.6	182.5	192.3	195.3
	10.4	10.7	10.9	7.2	7.6	7.7	3.8	3.8	3.4
$\infty$	199.1	199.7	199.9	199.8	199.1	199.6	199.5	197.6	198.9
	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0

AARL = average of ARL; SDARL = standard deviation of ARL; ARL = average run length.

Table 3.1은  $\alpha$ 가 0.0027인 경우, 즉 사전에 설정한  $ARL_0$ 가 370.4인 경우  $p_0$ ,  $r$ , 그리고 제1국면 표본 크기  $m$ 에 따른  $AARL_0$ 와  $SDARL_0$  값을 나타내고 있다. Table의 제일 마지막 행인  $m = \infty$ 인 경우는  $p_0$ 를 알고 있는 경우를 나타내는데,  $AARL_0$  값이 주어진 값 370.4와 정확하게 일치하지 않는 이유는 관리한계를 정수값으로 설정했고 관리통계량이 이산형값을 갖기 때문이다. 이 Table에서 먼저  $AARL_0$  값을 살펴보면,  $p_0 = 0.0005$ 인 경우  $m = 600,000$ ,  $p_0 = 0.001$ 인 경우  $m = 400,000$ , 그리고  $p_0 = 0.005$ 인 경우  $m = 100,000$  또는  $200,000$ 이 되어야  $AARL_0$ 가 사전에 설정한  $ARL_0$  값과 어느 정도 차이는 있지만 안정적인 값을 갖기 시작한다. 이 값은 Quesenberry (1993)와 Montgomery (2013)가 추천한 표본 크기와 비교할 때 엄청나게 큰 값을 알 수 있다. 이것은 CCC- $r$  관리도가 주로 고품질공정에서 이용되며 이를 위하여 공정의 관리상태에서의 불량률  $p_0$ 를 아주 작은 값으로 가정했기 때문이다. 아주 작

**Table 3.3.** Values of  $AARL_0$  and  $SDARL_0$  with estimated control limits when  $\alpha = 0.002$ 

$m$	$p_0 = 0.0005$			$p_0 = 0.001$			$p_0 = 0.005$		
	$r = 2$	$r = 3$	$r = 4$	$r = 2$	$r = 3$	$r = 4$	$r = 2$	$r = 3$	$r = 4$
10,000	300.7	253.9	222.8	353.5	313.5	282.9	386.3	405.3	396.1
	202.3	193.1	186.7	185.7	184.7	183.4	109.1	127.1	134.8
20,000	359.1	315.7	283.7	400.7	369.3	341.7	404.2	434.2	431.3
	190.0	186.5	184.1	167.9	168.4	169.1	88.4	105.5	111.0
50,000	420.0	388.0	360.4	444.0	426.6	407.1	416.8	455.8	459.6
	165.5	163.9	163.8	139.0	139.9	140.8	64.1	77.1	80.8
100,000	450.0	429.5	408.5	462.5	455.5	442.7	421.3	463.9	471.3
	142.1	141.5	141.7	114.0	116.1	116.6	<b>49.6</b>	58.2	61.3
200,000	469.1	458.3	444.3	472.5	473.4	466.4	425.3	468.4	477.7
	117.0	117.5	117.5	89.3	92.5	93.1	40.0	<b>43.1</b>	<b>45.4</b>
300,000	476.9	469.8	459.6	476.6	480.0	475.6	426.9	469.9	480.0
	102.9	103.4	103.5	76.4	79.5	80.3	35.1	35.8	37.8
400,000	480.4	476.3	468.0	478.4	483.7	480.6	427.9	470.5	481.1
	92.5	93.8	93.8	67.8	71.1	71.8	31.8	31.4	33.0
500,000	482.8	480.1	473.5	479.8	485.7	483.6	428.4	471.0	481.8
	85.1	86.5	86.6	61.7	64.8	65.4	29.2	28.2	29.7
600,000	484.4	482.8	477.3	480.3	487.0	485.8	428.6	471.4	482.3
	79.1	80.7	80.9	56.8	59.9	60.8	27.1	25.9	27.3
700,000	485.3	484.7	480.1	480.8	488.2	487.3	428.8	471.6	482.6
	74.4	75.9	76.2	53.0	56.1	56.8	25.3	24.1	25.4
800,000	486.3	486.5	482.2	481.4	488.9	488.5	428.9	471.7	482.8
	70.3	72.1	72.3	50.0	52.9	53.6	23.8	22.7	23.8
900,000	487.0	487.4	483.9	481.6	489.5	489.3	428.9	471.8	483.0
	66.8	68.5	69.0	<b>47.3</b>	50.1	50.9	22.6	21.4	22.5
1,000,000	487.5	488.4	485.3	481.9	490.1	490.1	428.9	472.0	483.1
	63.8	65.7	66.1	45.1	<b>47.8</b>	<b>48.6</b>	21.5	20.4	21.4
2,000,000	489.7	492.8	491.7	483.0	492.2	493.5	428.9	472.3	483.9
	<b>46.7</b>	<b>48.5</b>	<b>49.1</b>	32.6	34.6	35.3	15.3	14.3	15.4
5,000,000	491.1	495.4	495.7	483.6	493.6	495.5	428.8	472.3	484.3
	30.2	31.6	32.1	20.9	22.3	22.8	9.7	8.1	10.0
$\infty$	496.2	500.0	499.4	498.9	498.1	499.8	477.7	482.7	490.0
	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0

AARL = average of ARL; SDARL = standard deviation of ARL; ARL = average run length.

은  $p_0$ 를 추정하기 위해서는 큰 크기의 표본을 사용해야 하며, 그렇지 않은 경우 성능이 떨어짐은 예상할 수 있는 결과이다. 또한  $SDARL_0$ 가 미리 설정한  $ARL_0$ 의 10% 이내에 들도록  $m$ 을 설정하는 Zhang 등 (2013)의 규칙을 적용할 경우,  $p_0 = 0.0005$ 인 경우  $m = 2,000,000$ ,  $p_0 = 0.001$ 인 경우  $m = 800,000$  또는 900,000, 그리고  $p_0 = 0.005$ 인 경우  $m = 100,000$  또는 200,000 정도가 필요함을 알 수 있다. 각 경우에서  $SDARL_0$ 가 미리 설정한  $ARL_0$ 의 10% 이내에 처음 진입하는 값을 볼드체로 표시하였다.

Table 3.2는  $\alpha$ 가 0.005인 경우, 즉  $ARL_0$ 가 200인 경우인데, Table 3.1과 거의 유사한 경향을 보이는 것을 알 수 있다. 즉,  $AARL_0$ 만을 고려했을 때,  $p_0 = 0.0005$ 인 경우  $m = 600,000$ ,  $p_0 = 0.001$ 인 경우  $m = 400,000$ , 그리고  $p_0 = 0.005$ 인 경우  $m = 100,000$  또는 200,000이 되어야 안정적인 값을 갖기 시

작한다. 그러나  $SDARL_0$ 을 고려했을 때에는  $p_0 = 0.0005$ 인 경우  $m = 2,000,000$ ,  $p_0 = 0.001$ 인 경우  $m = 600,000$  또는  $700,000$ , 그리고  $p_0 = 0.005$ 인 경우  $m = 100,000$  또는  $200,000$  정도가 필요한 것을 알 수 있다.

Table 3.3은  $\alpha$ 가 0.002인 경우, 즉  $ARL_0$ 가 500인 경우인데, Table 3.1과 3.2와 유사한 경향을 보인다.  $SDARL_0$ 을 고려했을 때에는  $p_0 = 0.0005$ 인 경우  $m = 2,000,000$ ,  $p_0 = 0.001$ 인 경우  $m = 900,000$  또는  $1,000,000$ , 그리고  $p_0 = 0.005$ 인 경우  $m = 100,000$  또는  $200,000$  정도가 필요한 것을 알 수 있다.

Table 3.1에서 Table 3.3까지의 결과를 종합적으로 살펴보면 다음과 같은 사실을 알 수 있다. 관리상태에서의 공정불량률  $p_0$ 가 아주 작은 경우,  $AARL_0$ 가 사전에 설정한  $ARL_0$ 과 유사한 값을 갖기 위해서는 예상한 것보다 아주 큰 제1국면의 표본이 필요하다. 더구나  $SDARL_0$ 가 어느 정도 작은 값을 유지하기 위해서는 일반적으로 더 큰 표본이 필요하다는 것이다.  $p_0$ 가 제1국면에서 필요로 하는 표본 크기  $m$ 에 가장 큰 영향을 주는 것으로 나타났고,  $p_0$ 가 작을수록 더 큰 표본을 추출해야 함을 알 수 있다.

공정의 실무자들이 CCC- $r$  관리도를 사용하기 위해 제1국면의 표본 크기를 결정하는 경우 Table 3.1에서 Table 3.3까지의 결과는 유용한 참고가 될 수 있을 것이다. 즉, 공정의 특성에 맞게 희망하는  $AARL_0$ 과  $SDARL_0$ 을 설정한 경우 이를 만족하는 표본 크기를 결정할 수 있고, 반대로 표본 크기를 결정한 경우  $AARL_0$ 과  $SDARL_0$ 가 어느 정도가 되는지 판단할 수 있을 것이다. 이 논문에 제시되지 않은  $\alpha$ ,  $p_0$ ,  $r$ 에 대해서도 유사한 방법으로  $AARL_0$ 과  $SDARL_0$ 을 계산하여 참고할 수 있을 것이다.

#### 4. 결론

불량품이 아주 낮은 비율로 발생하는 고품질공정에서 공정불량률을 관리하기 위해 전통적인  $p$  관리도와  $np$  관리도를 사용할 경우 여러 가지 문제점이 발생하는데, CCC- $r$  관리도는 이에 대한 아주 효율적인 대안이 된다고 알려져 있다.

이 논문에서는 제1국면을 통하여 CCC- $r$  관리도의 모수  $p_0$ 를 추정하여 사용할 경우 추정 오차가 어느 정도가 되는지  $AARL_0$ 과  $SDARL_0$ 라는 측도를 사용하여 살펴보았다.  $\alpha$ ,  $p_0$ ,  $r$ 의 여러 가지 값에 대하여  $AARL_0$ 과  $SDARL_0$ 를 비교한 결과, CCC- $r$  관리도를 사용하는 고품질공정에서  $p_0$  값이 아주 작기 때문에 어느 정도의 관리상태의 성능을 유지하기 위해서는 아주 큰 수의 표본을 사용해야 한다는 것을 알 수 있었다. 이러한 경향은  $p_0$ 가 작아질수록 더 두드러지게 나타났다.

이 논문에서 제시하는 제1국면의 표본 크기는 아주 큰 값이기 때문에, 공정에 따라서는 여러 가지 이유로 이렇게 큰 표본을 추출하기 어려운 경우가 있다. 이러한 경우에는 Jones와 Steiner (2012)와 Gandy와 Kvaloy (2013)가 제안한 붓스트랩 방법을 사용하여 관리한계를 조정함으로써, 상대적으로 적은 제1국면의 표본으로 추정 오차의 문제를 어느 정도 해결할 수 있다. 최근 이에 대한 연구가 여러 학자에 의해 활발하게 진행되고 있으며, 본 연구팀에서는 CCC- $r$  관리도에 붓스트랩 방법을 적용하는 연구를 진행하고 있다.

#### References

- Faraz, A., Heuchenne, C., and Saniga, E. (2017). The  $np$  chart with guaranteed in-control average run lengths, *Quality and Reliability Engineering International*, **33**, 1057–1066.
- Gandy, A. and Kvaloy, K. J. (2013) Guaranteed conditional performance of control charts via bootstrap methods, *Scandinavian Journal of Statistics*, **40**, 647–668.
- Jones, M. A. and Steiner, S. H. (2012) Assessing the effect of estimation error on risk-adjusted CUSUM chart performance, *International Journal for Quality in Health Care*, **24**, 176–181.

- Lee, J., Wang, N., Xu, L., Schuh, A., and Woodall, W. H. (2013). The effect of parameter estimation on upper-sided Bernoulli cumulative sum charts, *Quality and Reliability Engineering International*, **29**, 639–651.
- Montgomery, D. C. (2013). *Statistical Quality Control: A Modern Introduction* (7th ed.), John Wiley & Sons, NJ.
- Quesenberry, C. P. (1993). The effect of sample size on estimated limits for  $\bar{X}$  and  $X$  control charts, *Journal of Quality Technology*, **25**, 237–247.
- Saleh, N. A., Mahmoud, M. A., Jones-Farmer, L. A., Zwetsloot, I. N. E. Z., and Woodall, W. H. (2015a). Another look at the EWMA control chart with estimated parameters, *Journal of Quality Technology*, **47**, 363–382.
- Saleh, N. A., Mahmoud, M. A., Keefe, M. J., and Woodall, W. H. (2015b). The difficulty in designing Shewhart  $\bar{X}$  and  $X$  control charts with estimated parameters, *Journal of Quality Technology*, **47**, 127–138.
- Xie, M., Lu, X. S., Goh, T. N., and Chan, L. Y. (1999). A quality monitoring and decision-making scheme for automated production processes, *International Journal of Quality & Reliability Management*, **16**, 148–157.
- Yang, Z., Xie, M., Kuralmani, V., and Tsui, K. L. (2002). On the performance of geometric charts with estimated control limits, *Journal of Quality Technology*, **34**, 448–458.
- Zhang, M., Peng, Y., Schuh, A., Megahed, F. M., and Woodall, W. H. (2013). Geometric charts with estimated control limits, *Quality and Reliability Engineering International*, **29**, 209–223.
- Zhao, M. J. and Driscoll, A. R. (2016). The  $c$ -chart with bootstrap adjusted control limits to improve conditional performance, *Quality and Reliability Engineering International*, **32**, 2871–2881.

# 추정된 모수를 사용한 CCC- $r$ 관리도에서 관리상태의 성능

김재연<sup>a</sup> · 김민지<sup>a</sup> · 이재현<sup>a,1</sup>

<sup>a</sup>중앙대학교 응용통계학과

(2018년 5월 11일 접수, 2018년 7월 5일 수정, 2018년 7월 25일 채택)

---

## 요약

CCC- $r$  관리도는 고품질공정에서 공정불량률을 관리하는 경우 매우 효율적이라고 알려져 있다. 이 관리도를 사용할 때 관리상태의 공정모수는 일반적으로 알려져 있지 않기 때문에 제1국면의 표본을 추출하여 이를 추정해야 한다. 제2국면에서 관리도의 성능은 제1국면에서 추정된 모수와 관리한계에 영향을 받기 때문에, 추정 오차의 영향을 살펴보는 것은 중요하다. 이 논문에서는 일반적으로 많이 사용하는 평균런길이의 평균(average of average run length) 이외에 평균런길이의 표준편차(standard deviation of average run length)를 사용하여 CCC- $r$  관리도의 관리상태의 성능을 평가하였다. 그 결과 CCC- $r$  관리도에서 안정적인 관리상태의 성능을 유지하기 위해서는 이전에 권장하던 제1국면의 표본 크기보다 훨씬 더 큰 표본이 필요하다는 사실을 알 수 있었다.

주요용어: 제1국면, 평균런길이, 평균런길이의 평균, 평균런길이의 표준편차, CCC- $r$  관리도

---

이 논문은 2018년도 중앙대학교 연구년 결과물로 제출되었고, 2017년도 정부(교육부)의 재원으로 한국연구재단의 지원을 받아 수행된 기초연구사업임 (No. 2017R1D1A1B03029035).

<sup>1</sup>교신저자: (06974) 서울특별시 동작구 흑석로 84, 중앙대학교 응용통계학과. E-mail: jaeheon@cau.ac.kr