

그리드 네트워크의 강한 Roman 지배수 상계에 대한 해석

이훈¹ · 손무영^{2*}

Analysis on the upper bound of strong Roman-domination in grid networks

Hoon Lee¹ · Moo Young Sohn^{2*}

¹Department of Information & Communications Engineering, Changwon National University, Changwon 51140, Korea

^{2*}Department of Mathematics, Changwon National University, Changwon 51140, Korea

요 약

본 연구에서는 그리드 네트워크에 대해서 정상적인 트래픽 예측에 의해서 설계된 자원 이외에 예측 불가능한 비상사태를 대비하기 위한 추가자원의 한계용량 설계에 관한 해석적 모델을 제안한다. 구체적으로는 그리드 네트워크 전체를 대상으로 한계용량을 산정하는 경우의 최솟값에 대한 상한을 예측하는 방법을 제안한다. 이를 위해서 본 논문에서는 그리드 네트워크를 그리드 그래프로 추상화하여 Roman domination number의 개념을 이용한 해석적 기법을 통해서 한계용량의 상한을 도출한다.

ABSTRACT

In this paper, we propose a theoretical framework for provisioning marginal resources in wired and wireless computer networks which include Internet. In more detail, we propose a mathematical model for the upper bounds of marginal capacity in grid networks, where the resource is designed a priori by normal traffic estimation and marginal resource is prepared for unexpected events such as natural disasters and abrupt flash crowd in public affairs. To be specific, we propose a method to evaluate an upper bound for minimum marginal capacity for an arbitrary grid topology using the concept of a strong Roman domination number. To that purpose, we introduce a graph theory to model and analyze the characteristics of general grid structure networks. After that we propose a new tight upper bound for the strong Roman domination number. Via a numerical example, we show the validity of the proposition.

키워드 : 그리드 네트워크, 그리드 그래프, 지배수, Roman 지배수, 강한 Roman 지배수

Key word : grid network, grid graph, domination number, Roman domination number, strong Roman domination number

Received 18 June 2018, Revised 8 July 2018, Accepted 9 July 2018

* Corresponding Author Moo-Young Sohn(E-mail:mysohn@cwnu.ac.kr, Tel:+82-55-213-3405)

Department of Mathematics, Changwon National University, Changwon 51140, Korea

Open Access <http://doi.org/10.6109/jkiice.2018.22.8.1114>

print ISSN: 2234-4772 online ISSN: 2288-4165

©This is an Open Access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution Non-Commercial License(<http://creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/>) which permits unrestricted non-commercial use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.
Copyright © The Korea Institute of Information and Communication Engineering.

I. 서론

최근 무선 네트워킹 기술의 발달과 더불어 세상에 존재하는 다양한 사물을 인터넷으로 연결하려는 움직임이 일어나고 있는데 이것을 사물인터넷(Internet of Things, 이하 IoT)이라고 한다[1]. IoT는 정보통신 서비스 본연의 통신 서비스(telecommunication service) 뿐만 아니라 전력전송에서의 스마트 그리드(smart grid), 도로교통 및 철도의 제어(smart highway/train), 물류 제어(smart logistics) 등 우리 생활에 아주 널리 침투할 것으로 예상되는 차세대 인터넷 기술이다.

한편 네트워크의 영역에서는 사용자 단말(end user)의 이동성(mobility)을 보장하기 위해서 무선통신기술이 급속한 속도로 발달하였다. 그 결과 지금은 거의 모든 곳에 LTE(long-term evolution), Wi-Fi(wireless-fidelity), Bluetooth 등의 무선통신 네트워크가 구축되어 있다. LTE는 전국적 규모의 셀룰러 통신 기술이고 Wi-Fi는 지역적 규모의 무선액세스 기술이며 Bluetooth는 아주 좁은 공간에서의 무선네트워킹 기술이다[2].

대부분의 인터넷 서비스 사업자(Internet service provider, 이하 ISP)는 이들 네트워크의 용량을 가입자의 규모나 제공되는 서비스의 특성을 고려하여 최적의 설계 기법을 동원하여 설계하는데 이 때 보편적으로 채용하는 방법이 장기평균치를 기반으로 약간의 여유용량(예: $\mu + 2\sigma$, 단, μ =평균, σ =표준편차)을 두는 것이다[3].

그러나, 장기평균치를 기반으로 설계된 네트워크 용량은 일반적으로 예측할 수 없는 특이한 사건이 일어나지 않는 정상상태(steady state)에서의 트래픽 수요를 기반으로 설계되기 때문에 어느 특정 지점에서의 순간적인 트래픽의 급증이나 자연재해로 인한 일부지역의 네트워크 자원의 파괴 등 위기 상황에는 대처하기 어려운 한계를 가지고 있다. 왜냐하면 위기 상황에는 트래픽의 양이 평소의 트래픽에 비해 급증하는데, 그것을 가정하여 용량설계를 하면 네트워크 구축 비용도 많이 들 뿐만 아니라 평상시에는 그 용량을 거의 사용하지 않기 때문에 아주 비효율적이다.

한편 최근에는 데이터 중심의 컴퓨터 네트워크 뿐만 아니라 전통적인 음성 서비스 네트워크도 유선에서 무선으로 진화하는 상황이어서 단말(end terminal)의 이동성(mobility)이 빈번한 상황인데다가 IoT의 급속한 확산

으로 통신 자원의 변동성이 커질 전망이다. 그런데 이런 변화는 네트워크 자원의 운용 측면에서는 오히려 기회가 될 수가 있다. 왜냐하면 차량에 탑재되어 이동이 가능한 무선 네트워크 장비(이동기지국이나 이동중계 장비 등)는 단말의 이동성에 대응할 수 있기 때문이다.

다만 여기서 문제는 이와 같은 문제를 해결하는 방법에 대해서 아직 이론적 해석이 거의 되어 있지 않다는 것이다.

한편, Xavier 등은 벌집모양의 무선 네트워크(honeycomb network) 환경에 대해서 로마 지배수(Roman domination number)의 개념을 접목한 방법을 통하여 무선 액세스 포인트(wireless access point)간에 자원을 빌려주는 방법을 제안하였다[4]. 다만, 이 연구는 네트워크를 구성하는 모든 노드에 대해서 자원을 동시에 빌려 주는 환경을 가정하였기에 엄밀히 말하면 자원의 완전 이중화(full duplication)를 가정한 것이고 이 방법은 두 가지 한계를 가지고 있다. 하나는 비용이 많이 든다는 것이고 다른 하나는 본 연구에서 고려하는 위기상황을 대응하기 위한 유한한 자원의 재배치 방안과는 관점이 다르다는 것이다.

이상에서 논의한 배경 하에 본 연구에서는 정상적인 트래픽 예측방법에 의해서 이미 각 노드에 자원이 할당된 그리드 네트워크에 대해서 돌발적으로 발생하는 위기상황에 대응하기 위해서 네트워크가 준비하고 있어야 할 최소한의 여유자원을 계산하는 방법을 제안하고자 한다.

본 논문의 구성은 다음과 같다. 제 II장에서는 본 연구에서 사용될 그래프에 대한 용어 및 개념과 Roman 지배수의 개념을 요약한다. 제 III장에서는 Roman 지배집합에 대한 기본 특성을 소개한다. 제 IV장에서는 강한 Roman 지배수의 상계 값에 대한 새로운 결과를 기술한다. 마지막으로 제 V장에서는 본 연구의 결론을 맺는다.

II. 그래프이론의 기본 개념

제 II장에서는 본 연구에서 사용되는 그래프이론의 용어에 대해서 간단히 요약 정리한다. 본 연구에서 사용되는 용어는 참고문헌 [5,6,7]에 기반하고 있다.

그래프 G 는 노드의 집합 V 와 V 의 2-중복조합의 다중부분집합 E 의 쌍 $G = (V, E)$ 으로 정의한다. V 의 원

소를 노드(node)라고 하고 E 의 원소를 링크(link)라고 한다. 주어진 두 노드 u, v 가 링크로 이어져 있을 때, u, v 가 서로 인접하다(adjacent) 또는 이웃(neighbors)이라고 한다.

어떤 두 개의 노드 u, v 에 대하여 u 와 v 를 연결하는 링크의 개수가 두 개 이상일 때, 이 링크들을 다중링크라 한다. 그러나 다중링크가 없는 그래프를 단순(simple) 그래프라 한다.

$G = (V, E)$ 를 $n = |V|$ 개의 노드와 $m = |E|$ 개의 링크를 갖는 유한 단순그래프라 하자 (단, $|X|$ 는 집합 X 의 농도). 그래프 G 의 노드 v 와 이웃해 있는 노드 집합과 그 닫힌 이웃 노드 집합을 각각 $N(v)$ 및 $\bar{N}[v] = N(v) \cup \{v\}$ 라 표시한다.

그래프 G 의 노드 v 에 연결되어 있는 링크의 수를 노드 v 의 차수(degree)라고 부르고 $d(v)$ 로 표기한다. 차수가 1인 노드를 단말노드(end node) 또는 리프(leaf)라 하고 그 이웃해 있는 노드를 받침점(support node)이라 한다. 컴퓨터 네트워크에서 단말노드는 디바이스에 해당하고 받침점은 액세스 노드(access node)에 해당한다.

그래프 G 에서 인접한 변들의 수열 $v_0v_1, v_1v_2, v_2v_3, \dots, v_{n-1}v_n$ 을 길(walk)이라 부른다. 만약 그래프가 단순그래프이면 $v_0 \rightarrow v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow \dots \rightarrow v_n$ 또는 $v_0, v_1, v_2, \dots, v_n$ 와 같이 나타낸다. v_0 와 v_n 을 각각 길의 시점과 종점이라 하고 길을 이루는 선분의 개수 n 을 이 길의 길이(length)라 한다. 시점과 종점이 같은 길을 닫힌 길(closed walk)이라 한다. 어떤 길을 이루는 변들이 모두 다르면 트레일(trail)이라 부르고, 트레일을 이루는 모든 꼭지점이 다르면 경로(path)라 부른다. 특히, $v_0 \rightarrow v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow \dots \rightarrow v_{n-1}$ 이 경로이고 $v_0 = v_n$ 인 trail $v_0 \rightarrow v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow \dots \rightarrow v_{n-1} \rightarrow v_n$ 을 유험그래프 또는 회로(cycle)라 부른다. 길이가 n 인 회로를 C_n 으로 나타내고, 길이가 n 인 경로를 P_n 으로 나타낸다. 그래프 G 의 차수들 중에서 최고차수를 $\Delta = \Delta(G)$ 라고 하고 최저차수를 $\delta = \delta(G)$ 라 한다.

임의의 두 그래프 $G_1 = (V_1, E_1), G_2 = (V_2, E_2)$ 에 대해서 두 그래프의 Cartesian 곱은 $G_1 \times G_2 = (V, E)$ 이다. 노드 집합 $V = V_1 \times V_2$ 과 링크집합 E 의 두 노드 $(u, x), (v, y)$ 가 인접하기 위한 필요충분조건은 $x = y$ 이고 $uv \in E_1$ 또는 $u = v$ 이고 $xy \in E_2$ 로 정의된다.

임의의 양의 정수 m, k 에 대하여 $P_m \times P_k$ 를 그리드 그래프(grid graph)라고 하고, $G_{m,k} = P_m \times P_k$ 라고 표기한다. 그리드 그래프 $G_{m,k}$ 의 노드들

$$(i, j) \mid 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq k$$

라 하자.

D 를 그래프 G 의 노드 부분집합이라 할 때, D 에 속하는 않는 임의의 노드 v 가 D 에 속하는 노드와 인접하여 있으면 D 를 그래프 G 의 지배집합이라 한다. 그래프 G 의 지배집합 중 최소 농도를 갖는 값을 그래프 G 의 지배 수라 하고 $\gamma(G)$ 로 표시한다. $\gamma(G) = |D|$ 를 만족하는 그래프 G 의 지배 집합 D 를 $\gamma(G)$ -지배 집합이라 한다.

f 를 노드들의 집합 V 에서 $\{0, 1, 2\}$ 의 값을 가지는 함수이고, $f(v) = 0$ 를 갖는 모든 노드에 대하여 $f(u) = 2$ 를 갖는 인접한 노드 u 가 존재하는 성질을 갖는 함수를 Roman 지배 함수라 한다.

$f(V) = \sum_{v \in V} f(v)$ 를 Roman 지배 함수의 값(weight)이라 한다. 그래프 G 의 Roman 지배 함수 값 중 최솟값(minimum weight)을 Roman 지배수(Roman domination number)라 하고 $\gamma_R(G)$ 라 표시한다. 그래프 G 의 Roman 지배 함수의 값 중 최소 농도를 갖는 값을 그래프 G 의 $\gamma_R(G)$ -지배 함수라 한다.

Roman 지배수에 대한 개념은 Cockayne et al.에 의해 정의되었다[8]. 로마는 1세기 초 영토가 넓은 강대국이였다. 하지만 로마제국의 국경 주위에 군대를 유지하는 것은 많은 비용이 들었다. 콘스탄틴(Constantine) 황제는 로마제국이 최소의 비용으로 적의 공격으로부터 효과적으로 방어 계획을 수립할 필요가 있었고 그는 최소한의 비용으로 제국을 방어할 수 있는 방법을 고안했다. 이 방법에 따르면 로마제국을 구성하는 여러 도시 가운데 군대를 상주시켜야 하는 도시 이외에는 모든 위치에 군대를 주둔시키지 않고 군대가 주둔하지 않는 위치가 공격을 받으면 인접한 위치에 있는 군대를 보내는 방법이었다. 이 개념은 ReVelle, Rosing, Stewart, Cockayne 등의 여러 수학자들에 의해서 연구되어 Roman 지배수 개념이 등장하게 되었다[9,10,11].

그런데 Roman 지배 문제는 여러 위치가 적으로부터 동시에 공격을 받을 때는 적용할 수 없는 약점이 있다. 이를 해결하기 위해 2017년 Alvarez-Ruiz et al.[5]은 여

러 위치에 동시 공격을 받을 때의 적용할 수 있는 강한 Roman 지배라고 불리는 새로운 매개 변수에 대한 연구를 시작했다.

강한 Roman 지배는 앞의 로마제국의 예를 인용하면 로마제국을 구성하는 여러 도시 가운데 전략적으로 중요한 도시에는 그 도시를 수비할 병력 이외에 추가로 병력을 주둔하게 하되 인접 도시에 적이 침략할 경우 그 도시에 병력을 파견하는 것으로서 이렇게 하는 경우 전략적 요충지에는 병력을 수용할 부대가 필요한데 그곳에 추가 병력을 운용하는 것이 모든 도시에 별도로 부대를 운영하는 것에 비해서 비용이 적게 드는 장점이 있기 때문이다.

본 연구에서는 그리드 네트워크에서 강한 Roman 지배의 개념을 적용함에 있어서 해석의 용이성을 확보하기 위하여 다음과 같은 여유 자원 배분 원칙을 가정한다.

첫째, 하나 이상의 여유 자원을 가지는 노드는 최소한 하나의 여유 자원은 자신에게 남겨둔다. 이는 나중에 자기 자신 또는 인접 노드에 비상사태가 발생하였을 때 대처하기 위함이다.

둘째, 여유 자원을 가지지 않은 노드가 긴급하게 자원을 필요로 하는 경우에 자원을 가지고 있는 노드는 자신이 가지고 있는 자원 가운데에서 50%를 초과하지 않는 범위 내에서 자원을 빌려준다. 실제로 그리드 네트워크에서는 노드의 위치에 따라서 하나의 노드와 인접하는 노드(adjacent node)의 수가 달라지는데 최소 두 개에서 최대 네 개다. 따라서 빌려 주는 자원의 수는 0에서 2까지이다. 그런데 그리드 네트워크에서 모든 인접 노드가 동시에 비상사태에 빠질 확률은 거의 0에 가깝다. 따라서 이런 가정은 충분히 현실적이라고 할 수 있다. 다만, 이 가정은 필요에 따라서는 완화될 수 있다.

다시 본문으로 돌아와서 f 를 노드들의 집합 V 에서 $\{0, 1, 2, \dots, \lceil \frac{\Delta}{2} \rceil + 1\}$ (단, $\lceil x \rceil$ 는 x 의 천정함수(ceiling function)로서 x 보다 작지 않는 가장 작은 정수를 가지는 함수이고, $B_0 = \{v \in V : f(v) = 0\}$ 라 하자. 임의의 노드 $v \in V$ 에 대하여 $f(w) \geq 1 + \lceil \frac{1}{2} |N(w) \cap B_0| \rceil$ 을 만족하는 노드 w 를 갖는다면 f 를 강한 Roman 지배 함수(strong Roman dominating function)라 한다. $f(V) = \sum_{v \in V} f(v)$ 를 강한 Roman

지배 함수의 값(weight)이라 한다. 그래프 G 의 강한 Roman 지배 함수 값 중 최솟값(minimum weight)을 강한 Roman 지배수(strong Roman domination number)라 하고 $\gamma_{SR}(G)$ 라 표시한다. 그래프 G 의 강한 Roman 지배 함수의 값 중 최소 농도를 갖는 값을 그래프 G 의 $\gamma_{SR}(G)$ -강한 Roman 지배 함수라 한다.

지금까지 우리는 그래피론에서 통용되는 용어와 개념에 대해서 간략하였다. 그런데 본 연구에서 강한 Roman 지배함수의 개념을 도입한 이유는 컴퓨터 네트워크(computer network)나 스마트 그리드(smart grid) 등 IT분야에 있어서도 로마제국의 군대처럼 모든 장소에 통신 서버(communication server)나 에너지 저장장치(energy storage server) 또는 원격감시(remote surveillance) 장비를 여분으로 둘 수는 없다는 문제를 해결하기 위함이다. 구체적으로는 노드와 링크들로 이루어진 통신 또는 전력 네트워크에서 자원배치의 다중복성을 줄이고 효과적인 최소의 비용을 갖도록 하는 지배집합을 어떻게 구축할 수 있을까 하는 문제에서 이 연구하게 되었다.

위에서 제기한 문제를 해결하는 방안을 연구하기 위하여 먼저 Roman 지배수에 대한 특성을 분석하였는데 Chambers 등 [11]은 Roman 지배수에 관한 특성들을 아래와 같이 규명하였다.

정리 2.1. ([11])

트리 T 가 $n(\geq 3)$ 개의 노드를 가지면, $\gamma_R(G) \leq 4n/5$ 이다.

정리 2.2. ([11])

노드의 수가 n 인 패스 P_n 과 사이클 C_n 에 대하여,

$$\gamma_R(P_n) = \gamma_R(C_n) = \lceil \frac{2n}{3} \rceil \text{ 이다.}$$

한편, 본 연구에서는 위의 결과보다 더 정확한 해법이 존재한다는 것에 착안하여 새로운 모형을 제시하였는데 이에 대해서 아래에 기술하기로 한다.

III. 강한 Roman 지배수의 기본 성질

Alvarez-Ruiz 등[5]은 그래프의 강한 Roman 지배수의 개념을 소개하고 이의 특성에 대한 다음과 같은 기본

적인 정리들을 규명하였다.

정리 3.1. ([5]) 강한 지배수 문제는 평면 그래프에 대하여 제한을 해도 NP-complete 문제이다.

정리 3.2. ([5]) 임의의 그래프 G 에 대하여 Roman 지배수 $\gamma_R(G)$ 는 강한 Roman 지배수 $\gamma_{SR}(G)$ 보다 작거나 같다.

정리 3.3. ([5]) 임의의 연결 그래프 G 의 최대차수 $\Delta(G) \leq 2$ 이면, 그래프 G 의 Roman 지배수 $\gamma_R(G)$ 와 강한 Roman 지배수 $\gamma_{SR}(G)$ 는 같다.

정리 3.4. ([5]) 연결 그래프 G 의 노드의 수가 n 이면, $\gamma_{SR}(G) \geq \lceil \frac{n+1}{2} \rceil$ 이다.

본 연구에서는 강한 Roman 지배수의 상계값에 대하여 초점을 둔다.

IV. 그리드 그래프의 강한 Roman 지배수 상계값

그리드 그래프에서 강한 Roman 지배수의 상계값을 구하려면 먼저 그래프의 토폴로지를 정의하여야 한다. 그리드 그래프는 그림 1과 같이 노드들이 그물 모양의 연결을 가진다.

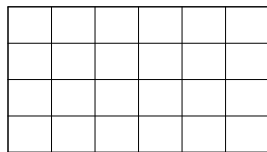


Fig. 1 A grid graph with 5 rows and 7 columns

위의 그림 1에서 선과 선이 만나는 점은 네트워크의 노드(node)를 말하고 선은 링크(link)를 말한다. 위의 그림에서는 가로로 7개의 노드가 있고 이런 노드들이 4열로 구성되어있다.

이 때 어느 노드에 얼마만큼의 네트워크 자원을 배치하는 것이 그리드 네트워크 전체로 볼 때 가장 효율적인가 하는 문제를 푸는 것이 본 연구의 목적이다.

이를 위해서 아래에서는 행과 열의 여러 가지 조합의

경우의 수에 따라서 강한 Roman 지배수 $\gamma_{SR}(G)$ 값이 달라지는데 각 경우에 대해서 $\gamma_{SR}(G)$ 를 구하는 방법을 제안한다. 먼저 그리드 그래프에서 m 을 열의 수, k 를 행의 수라고 하자.

정리 4.1. 양의 정수 $m, k (k = 3t, t$ 는 양의 정수)에 대하여, $\gamma_{SR}(G_{m,k}) \leq \frac{2mk}{3}$ 이다.

[증명] $G = G_{m,k}$ (단 $k = 3t, t$ 는 양의 정수) 라 하자.

$$V_2 = \{ (i, j) : 1 \leq i \leq m, j = 3l - 1, 1 \leq l \leq t \},$$

$V_1 = \emptyset, V_0 = V(G) - (V_1 \cup V_2)$ (단, $-$ 는 두 집합에서 차의 집합(difference set)을 나타냄)라 하자. 그러면 $V(G) = V_0 \cup V_1 \cup V_2$ 이다.

$V(G)$ 상의 임의의 노드 $v_a (\in V_a) (0 \leq a \leq 2)$ 에 대하여 함수 $f(v_a) = a$ 로 정의하자.

그 때 f 는 강한 Roman 지배 함수가 된다. 그러므로

$$\gamma_{SR}(G_{m,k}) \leq |f(V(G))| = \frac{2mk}{3}$$

이다. (끝)

정리 4.2. 양의 정수 $m, k (k = 3t + 1, t$ 는 양의 정수)에 대하여 $\gamma_{SR}(G_{m,k}) \leq \frac{m(2k+1)}{3}$ 이다.

[증명] $G = G_{m,k}$ (단 $k = 3t + 1, t$ 는 양의 정수) 라 하자.

$$V_2 = \{ (i, j) : 1 \leq i \leq m, j = 3l - 1, 1 \leq l \leq t \},$$

$$V_1 = \{ (i, k) : 1 \leq i \leq m \},$$

$$V_0 = V(G) - (V_1 \cup V_2) \text{ 하자.}$$

그러면 $V(G) = V_0 \cup V_1 \cup V_2$ 이다.

$V(G)$ 상의 임의의 노드 $v_a (\in V_a) (0 \leq a \leq 2)$ 에 대하여 함수 $f(v_a) = a$ 로 정의하자. 그러면 f 는 강한 Roman 지배 함수가 된다. 그러므로

$$\gamma_{SR}(G_{m,k}) \leq |f(V(G))| = \frac{m(2k+1)}{3}$$

이다. (끝)

정리 4.3. 양의 정수 $m, k (k = 3t + 2, t$ 는 양의 정수)에 대하여,

$$\gamma_{SR}(G_{m,k}) \leq \begin{cases} \frac{m(4k+1)}{6}, & m = \text{짝수} \\ \frac{m(4k+1)+3}{6}, & m = \text{홀수.} \end{cases}$$

이다.

[증명] $G = G_{m,k}$ (단 $k = 3t + 2$, t 는 양의 정수) 라 하고, 다음의 두 경우로 나누어 생각하자.

[경우 1: m 이 짝수일 때]

$$\begin{aligned} V_2 &= \{ (i, j) : 1 \leq i \leq m, j = 3l - 1, 1 \leq l \leq t \} \\ &\cup \{ (j, k) : j = 4l + 1, 0 \leq l \leq \lfloor \frac{m-1}{4} \rfloor \} \\ &\cup \{ (j, k) : j = 4l, 1 \leq l \leq \lfloor \frac{m}{4} \rfloor \} \\ V_1 &= \{ (j, k-1) : j = 4l + 2, \\ &0 \leq l \leq \lfloor \frac{m-1}{4} \rfloor \} \\ &\cup \{ (j, k-1) : j = 4l - 1, \\ &1 \leq l \leq \lfloor \frac{m}{4} \rfloor \}, \end{aligned}$$

단, $\lfloor x \rfloor$ 는 x 의 바닥함수(floor function)로서 x 보다 크지 않는 가장 큰 정수를 말한다.

마지막으로 $V_0 = V(G) - (V_1 \cup V_2)$ 이고

$$V(G) = V_0 \cup V_1 \cup V_2 \text{이다.}$$

$V(G)$ 상의 임의의 노드 $v_a (\in V_a) (0 \leq a \leq 2)$ 에 대하여 함수 $f(v_a) = a$ 로 정의하자.

f 는 강한 Roman 지배 함수가 된다. 그러므로

$$\gamma_{SR}(G_{m,k}) \leq |f(V(G))| = \frac{m(4k+1)}{6} \text{이다.}$$

[경우 2: m 이 홀수일 때]

$$\begin{aligned} V_2 &= \{ (i, j) : 1 \leq i \leq m, j = 3l - 1, \\ &1 \leq l \leq t \} \\ &\cup \{ (j, k) : j = 4l + 1, 0 \leq l \leq \lfloor \frac{m-2}{4} \rfloor \} \\ &\cup \{ (j, k) : j = 4l, 1 \leq l \leq \lfloor \frac{m-1}{4} \rfloor \}, \\ V_1 &= \{ (j, k-1) : j = 4l + 2, 0 \leq l \leq \\ &\lfloor \frac{m-2}{4} \rfloor \} \cup \{ (j, k-1) : j = 4l - 1, \end{aligned}$$

$$1 \leq l \leq \lfloor \frac{m-1}{4} \rfloor \} \cup \{ (m, k-1), (m, k) \},$$

$$V_0 = V(G) - (V_1 \cup V_2).$$

그러면 $V(G) = V_0 \cup V_1 \cup V_2$ 이다.

$V(G)$ 상의 임의의 노드 $v_a (\in V_a) (0 \leq a \leq 2)$ 에 대하여 함수 $f(v_a) = a$ 로 정의하자.

f 는 강한 Roman 지배 함수가 된다. 그러므로

$$\gamma_{SR}(G_{m,k}) \leq |f(V(G))| = \frac{m(4k+1)+3}{6}$$

이다. (끝)

지금까지 우리는 행과 열의 값이 일반적인 그리드에 대한 강한 Roman 지배수의 상계값을 계산하는 방법을 제안하였는데 지금부터는 제안한 방법의 보다 구체적인 특성을 보이기 위하여 열의 개수가 2에서 4까지의 경우에 대한 해석 결과를 요약한다. 단, 행의 개수는 일반적인 정수값을 가진다.

따름정리 4.4. [$m=2$ 인 경우]

$$\gamma_{SR}(G_{2,k}) \leq \lceil \frac{4k}{3} \rceil \text{이다.}$$

[증명] 증명은 행의 개수가 3의 배수, 3의 배수+1, 3의 배수+2의 세 경우로 나뉜다.

(1) $k = 3t$ (t 는 양의정수)인 경우 정리 4.1.에서

$$\gamma_{SR}(G_{2,k}) \leq \frac{4k}{3} = \lceil \frac{4k}{3} \rceil \text{이 성립한다.}$$

(2) $k = 3t + 1$ (t 는 양의정수)인 경우에는 정리 4.2에서

$$\gamma_{SR}(G_{2,k}) \leq \frac{2(2k+1)}{3} = \lceil \frac{4k}{3} \rceil$$

이 성립한다.

(3) $k = 3t + 2$ (t 는 양의정수)인 경우에는 정리 4.3에서

$$\gamma_{SR}(G_{2,k}) \leq \frac{4k+1}{3} = \lceil \frac{4k}{3} \rceil$$

이 성립한다.

그러므로 결국은 k 의 값이 어느 경우나

$$\gamma_{SR}(G_{2,k}) \leq \lceil \frac{4k}{3} \rceil \text{이 성립한다. (끝)}$$

따름정리 4.5. [m=3인 경우]

$$\gamma_{SR}(G_{3,k}) \leq 2k \text{이다.}$$

[증명] 정리 4.1의 증명에서 $m=3$ 인 경우는 k 의 값에 관계없이, $\gamma_{SR}(G_{3,k}) = \gamma_{SR}(G_{k,3}) \leq 2k$ 이 성립한다. (끝)

따름정리 4.6. [m=4인 경우]

정리 4.2에서 $k = 3t + 1$ (t 는 양의 정수)인 경우 $\gamma_{SR}(G_{4,k}) \leq \frac{4(2k+1)}{3} = \lceil \frac{8k}{3} \rceil + 1$ 이다.

하지만 이 값은 다음의 정리에서 $\lceil \frac{8k}{3} \rceil$ 로 줄일 수 있다.

정리 4.4. 임의의 양의 정수 k 에 대하여 $m=4$ 인 경우

$$\gamma_{SR}(G_{4,k}) \leq \lceil \frac{8k}{3} \rceil \text{이다.}$$

[증명] 정리 4.1 및 정리 4.3에서 $k = 3t$ 또는 $3t + 2$ 이면,

$$\gamma_{SR}(G_{4,k}) \leq \lceil \frac{8k}{3} \rceil \text{이 성립한다.}$$

(1) $G = G_{4,4}$ 의 경우

$$\begin{aligned} V_3 &= \{ (3, 2) \}, \\ V_2 &= \{ (1, 1), (1, 4), (4, 4) \}, \\ V_1 &= \{ (2, 3), (4, 1) \}, \\ V_0 &= V(G) - (V_1 \cup V_2 \cup V_3). \end{aligned}$$

한편 $V(G) = V_0 \cup V_1 \cup V_2 \cup V_3$ 이다.

$V(G)$ 상의 임의의 노드 $v_a (\in V_a) (0 \leq a \leq 2)$ 에 대하여 함수 $f_4(v_a) = a$ 로 정의하자.

그 때는 f_4 는 강한 Roman 지배 함수가 된다. 그러므로 $\gamma_{SR}(G_{4,k}) \leq 11 = \lceil \frac{8k}{3} \rceil$ (단, $k=4$)이다.

(2) $G = G_{4,7}$ 의 경우

$$\begin{aligned} V_3 &= \{ (2, 1), (3, 5) \}, \\ V_2 &= \{ (1, 3), (1, 4), (1, 7), (4, 2), (4, 3), \end{aligned}$$

$$(4, 7)\}, V_1 = \{ (2, 6) \},$$

$$V_0 = V(G) - (V_1 \cup V_2 \cup V_3).$$

그리고 $V(G) = V_0 \cup V_1 \cup V_2 \cup V_3$ 이다.

(3) $G = G_{4,k}$ 에서 $k \geq 10$ ($k = 7 + 3t$)인 경우

$$\begin{aligned} V_3 &= \{ (2, 1), (3, 5) \}, \\ V_2 &= \{ (1, 3), (1, 4), (1, 7), (4, 2), (4, 3), (4, 7) \} \\ &\cup \{ (1, 2+6j), (2, 4+6j), (3, 4+6j), \\ &(4, 2+6j) \mid j = 1, 2, \dots, \lceil \frac{t}{2} \rceil \} \\ &\cup \{ (1, 7+6j), (2, 5+6j), (3, 5+6j), \\ &(4, 7+6j) \mid j = 1, 2, \dots, \lceil \frac{t+1}{2} \rceil - 1 \}, \end{aligned}$$

$$V_1 = \{ (2, 6) \},$$

$$V_0 = V(G) - (V_1 \cup V_2 \cup V_3). \text{그러면}$$

$$V(G) = V_0 \cup V_1 \cup V_2 \cup V_3 \text{이다.}$$

$V(G)$ 상의 임의의 노드 $v_a (\in V_a) (0 \leq a \leq 3)$ 에 대하여 함수 $f_k(v_a) = a$ 로 정의하자.

그 때 f_k 는 강한 Roman 지배 함수가 된다. 그러므로

$$\gamma_{SR}(G_{4,k}) \leq |f_k V(G)| = \lceil \frac{8k}{3} \rceil$$

(단, $k = 7 + 3t \geq 10$)이다. (끝)

결론적으로 정리 4.4로 부터 양의 정수 k 의 값에 관계 없이 $\gamma_{SR}(G_{4,k})$ 는 $\lceil \frac{8k}{3} \rceil$ 보다 작거나 같음을 알 수 있다. 그리고 이 값은 앞의 정리 4.2에서 구한 값보다 훨씬 더 정확(tight)한 상계값이다.

지금까지 우리는 그리드 그래프의 강한 Roman 지배 함수의 상계를 구하는 방법을 제안하였다. 제안한 방법의 효율성을 보기 위해서 지금부터는

$V(G)$ 상의 임의의 노드 $v_a (\in V_a) (0 \leq a \leq 3)$ 에 대하여 함수 $f_7(v_a) = a$ 로 정의하자.

그 때 f_7 는 강한 Roman 지배 함수가 된다. 그러므로

$$\gamma_{SR}(G_{4,k}) \leq \lceil \frac{8k}{3} \rceil = 19 \text{(단, } k=7) \text{이다.}$$

그림 2에서는 $G_{4,7}$ 에 대한 그리드 그래프를 보이고 $\gamma_{SR}(G_{4,k})$ 의 값을 바탕으로 자원을 배치한 결과를 나

타내었다. 그림에서 보는 바와 같이 $G_{4,7}$ 에서 필요한 총 한계 용량은 19이다. 그리고 이 값은 정리[4.2]에서 구한 상계값인 20보다 더 작음을 알 수 있다. 물론 본 예에서는 k 의 값이 작기 때문에 그 효과가 크게 보이지 않지만 k 의 값이 커지면 커질수록 정리4.4의 상계 값이 정리 4.2의 상계값보다 훨씬 정확함을 유추할 수 있으므로 최종적으로 본 연구에서 제안한 가장 주된 부분인 정리 4.4의 유효성을 입증할 수 있다.

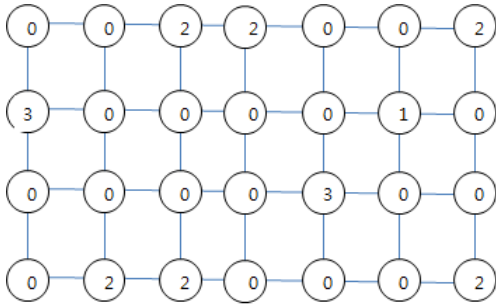


Fig. 2 A grid graph with $G_{4,7}$

V. 결론

본 연구에서는 그리드 네트워크로 표현할 수 있는 컴퓨터 네트워크 혹은 스마트 그리드 등에서 사전에 설계된 용량을 초과하는 일시적 비상상태에 대비하기 위한 예비 자원에 대한 용량의 상한에 대한 최솟값을 해석적으로 구하는 새로운 방법을 제안하였다.

본 연구에서는 일반적인 규모를 가지는 그리드 그래프에서 Roman 지배수의 상계에 대한 특성을 새로이 구명하였고 특히 제안한 방법의 유효성을 입증하기 위하여 예로 든 그리드의 열의 수가 4인 경우에 대해서 기존의 방법보다 더 효율적인 지배수의 상계를 제시하였다.

본 연구의 결과는 컴퓨터 네트워크 뿐만 아니라 자원의 이동성 및 재배치가 허용되는 다양한 산업 분야에서 활용이 가능하리라 기대된다.

향후 연구 계획으로는 본 연구에서 밝혀낸 이론적 토대를 바탕으로 사물인터넷이나 클라우드 네트워크, 스마트 그리드 등 IT 융복합 서비스에서 본 연구가 적용될 수 있는 보다 더 구체적인 또는 현실적인 네트워크 토폴로지를 가정하여 실제로 최소비용의 최적 트리구조를 도출하는 연구를 수행할 예정이다[12].

ACKNOWLEDGEMENT

This research was financially supported by Changwon National University in 2017-2018.

REFERENCES

- [1] H. Kim, *Internet of Things*, Seoul: Hong-Reung publishing company, 2014.
- [2] C. Smith and D. Collins, *Wireless networks: design and integration for LTE, EVDO, HSPA, and WiMAX*, New York, NY: McGraw-Hill, 2014.
- [3] H. Lee, "Capacity design of a gateway router for smart farms," *J. Inf. Commun. Conver. Eng.*, vol. 16, no. 1, pp. 31-37, Mar. 2018.
- [4] D. A. Xavier and C. Kujur, "Extended Roman domination number of honeycomb networks," *International Journal of Computing Algorithm*, vol. 03, pp. 558-561, Feb. 2014.
- [5] M.P. Alvarez-Ruiz, T. M. Gradolph, S.M. Sheikholeslami, J.C. Tripodoro and I.G. Yero, "On the strong Roman domination number of graphs," *Discrete Applied Mathematics*, vol. 231, pp. 44-59, 20 Nov. 2017.
- [6] T. W. Haynes, S. T. Hedetniemi and P. J. Slater, *Fundamentals of Domination in Graphs*, New York, NY: Marcel Dekker, 1998.
- [7] H. Lee and M. Sohn, "Analysis on the characteristics for upper bound of [1,2]-domination in trees," *Journal of the Korea Institute of Information and Communication Engineering*, vol. 20, no. 12, pp. 2243-2251, Dec. 2016.
- [8] E.J. Cockayne, P.A. Dreyer, S. M. Hedetniemi, and S. T. Hedetniemi, "Roman domination in graphs," *Discrete Mathematics*, vol. 278, issues 1-3, pp. 11-22, Mar. 2004.
- [9] C.S. Revelle, and K.E. Rosing, "Defendens imperium romanum: A classical problem in military strategy," *The American Mathematical Monthly*, vol. 107, no. 7, pp. 585-594, Aug. - Sep., 2000.
- [10] I. Stewart, "Defend the Roman empire," *Scientific American*, vol. 281, no. 6, pp. 136-138, Dec. 1999.
- [11] E.W. Chambers, B. Kinnersley, N. Prince and D. B. West, "Extremal problems for Roman domination," *Siam Journal Discrete Mathematics*, vol. 23, no. 3, pp. 1575-1686, Jan. 2009.
- [12] P. Sridhar and R. Caytiles, "Efficient cloud data hosting availability," *Asia-Pacific journal of convergent research interchange*, vol. 3, no. 2, pp. 11-19, June 2017, Available: <http://dx.doi.org/10.21742/APJCRI.2017.06.02>.



이훈(Hoon Lee)

창원대학교 정보통신공학과 교수, 공학박사
※관심분야: 인터넷 설계, IoT, QoS 및 네트워크 보안



손무영(Moo Young Sohn)

창원대학교 수학과 교수, 이학박사
※관심분야: 그래프이론