

유한요소법을 이용한 진동물체의 최적 제어에 관한 연구

박승진*

Optimal Control of An Oscillating Body Using Finite Element Methods

Park, Sung-Jin*

Abstract: Long bridges, such as suspension bridges and diagonal bridges, are complex phenomenon that show different behaviors depending on the shape and rigidity of the cross sections, such as wind vibrations and liquid vibrations from earthquakes in liquid storage containers.

This is called the lower skirt on the lower side of the bridge, and the installation of lower skirt is effective for release and vortex vibrations caused by rapid winds, and that increases the stability of the wind resistance of the bridge. Optimal shape and installation of the lower skirt is also essential to make maximum wind speed effect of the lower skirt.

Therefore, this study proposes a numerical analysis method to control the vibration of a bridge by calculating the optimal installation angle of an optimal lower skirt according to the optimal control theory and this study evaluates the impact on the optimal control system by minimizing the dominance equation with an evaluation function, which is an indicator for evaluating the optimal control theory state.

키 워 드: 유한요소법, 진동물체, 최적화

Key Words: Finited Element Method, Vibration body, Optimal Control

1. 서론

구조물은 흐름의 작용에 따라 다양한 진동을 나타낸다. 예를 들어 현수교와 대각선 교량과 같은 긴 교량 대들보, 타워 또는 케이블 바람의 진동, 고층 건물 및 굴뚝의 바람에 의한 진동, 바람에 의한 진동, 액체 저장 용기 내의 액체의 지진에 의한 진동, 해상 또는 해저 구조물의 파도 및 해류 댐의 지진 및 배후의 저수지로 인한 진동 등이중에서 교량의 진동은 건물의 단면 형상과 강성에 따라 다양한 상태를 나타내어주는 복잡한 현상이다. 와류를 생성시키는 비정상적인 공기 역학적 힘의 작용에 의한 와류가 초과하면 발전 진폭이 급격히 증가하고 떨림이나 발산 진동 등이 발생하고 있고, 이러한 진동은 교량에 있어서 안좋은 영향을 발생하고, 교통의 장애 요인이 되어, 최악의 경우 교량의 진동의 의한 붕괴가 발생하기도 한다. 미끄럼과 진동으로 인한 교량 붕괴, 바람에 의한 교량의 진동을 제어는 유체역학의 관점에서 다양한 연구가 수행 되고 있다. 유체역학 제어법에서는 교량 형상을 변화 시킴으로써 외력에서 발생하는 공기 역학적 힘을 감소시킬려고 하는 시도가 예전부터 실시되고 있다.

현재 교량 하부에 날개와 같은 구조물을 설치한 장경간 박스형교는 하부 스킨트의 급속한 바람에 의한 소용돌이 여진 발산 진동과 와류진동에 효과적이어서, 교량의 바람 저항 안정성을 증가시키는 것이 가능하다.

하부 스킨트 의한 풍속 효과를 최대한 끌어내기 위해서는 바람에 대한 하부 스킨트 최적의 형상 및 설치가 필수적이다. 하부 스킨트를 설치하기 위해 고려해야 할 사항 중 하나는 하부 스킨트 받침부가 있다. 비행기인 경우 비행기의 각도가 증가하고 일정 각도를 초과하면 날개에 작용하는 리프트가 감소하는 것으로 알려져 있다. 마찬가지로 교량에 부착된 하부 스킨트의 경우에도, 받침부를 특정 크기로 설정함으로써 교량에서 발생하는 진동을 억제 할 수 있을 것으로 생각한다. 그러므로 교량의 진동을 최소화 할 수 있는 하부 스킨트의 최적 설치 각도를 선택함으로써 교량의 바람 저항 안정성을 더욱 향상시킬 수 있다. 따라서 본 연구에서 최적의 제어 이론에 따라 최적의 하부 스킨트의 최적 설치 각도를 계산하여 교량의 진동을 제어하는 수치 해석 방법을 제안한다.

* 인천대학교 도시과학대학 도시공학과 교수, 교신저자(sjpark@inu.ac.kr)

2. 기초방정식

2.1 ALE 유체구조 방정식

유체와 구조물 상호 작용을 고려한 유체의 거동 및 교량의 거동을 해석하고, 진동 물체를 고려한 Navier-Stokes에 대해서 ALE 유한요소법에 의한 이산화를 나타내는 수치해석에 대한 예를 나타낸다. 유체에 관한 기초방정식은 무차원화된 ALE 표기를 이용한 Navier-Stokes 방정식을 이용하여, 구조에 관한 기초방정식에는 강체를 가정한 진동방정식을 사용한다. 이산화 기법으로서 공간 방향에는 유한요소법을 적용하고, 시간 방향에는 예측·수정자법을 적용한다.

ALE 표기에 의한 비압축 Navier-stokes의 운동방정식과 연속식은 무차원화로서 표기하고,

$$\dot{u}_i + b_j u_{i,j} + p_{,i} - \nu(u_{i,j} + u_{j,i}) = 0 \quad \text{in } \Omega, \quad (1)$$

$$u_{i,j} = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (2)$$

b_j 는 메시 속도를 고려한 상대 유속으로,

$$b_j = u_j - \tilde{u}_j \quad (3)$$

가 된다. 여기서 u_i, \tilde{u}_i, p, ν 는 유속, 메시 속도, 압력, 운동점성계수를 나타내고, 또 ν 는 $\nu = 1/Re$ 으로, Re 는 레이놀즈 수이다. ALE법에는 점점좌표를 임의로 가려낼 수 있기 때문에 \tilde{u}_i 는 좌표 X_i 의 시간미분에 의해 나타난다.

$$\tilde{u}_i = \frac{\partial X_i}{\partial t} \quad (4)$$

해석하는 유체 흐름의 전체를 Ω 으로 표시하고, 그것을 둘러싼 경계를 Γ 로 한다. 경계 Γ 는 제 1종 경계 Γ_1 와 제 2종 경계 Γ_2 로 나누며, 이하의 경계 조건이 규정된다.

$$u_i = \hat{u}_i \quad \text{on } \Gamma_1 \quad (5)$$

$$-p\delta_{ij} + \nu(u_{i,j} + u_{j,i}) = \hat{t}_i \quad \text{on } \Gamma_1 \quad (6)$$

여기서 δ_{ij} 는 크로네커 델타 함수, n_j 는 경계 Γ_2 의 외향 법선 벡터이다.

2.2 ALE 유한요소법의 이산화

Navier-stokes 방정식의 유한요소법에 의한 이산화는 비압축의 연속식을 만족시키기 위한 속도와 압력의 보간 함수의 조합이 상충될 수 있다. 유속과 압력에 동차 보간 함수를 이용하는 동차 보간은 프로그램이 복잡하지 않고 물리량 각각 절점마다 수치해로 나타내기 때문에 계산결과와 사후 처리에도 매우 유효하고 범용성이 뛰어나다. 그러나 Galerkin법에 의해 이산화가 되면 안정성의 조건(상한 하한조건)을 만족시키지 않는다. 따라서 본 논문에서는 유속의 보간 함수의 차수를 압력의 차수 보다 높은 차원의 혼합형 유한요소법을 적용하기로 한다.

여기서 이산화 해법을 요약하면 다음과 같다.

- 1) 해석 영역을 임의의 형상을 가진 유한요소로 분할한다.
- 2) 미분방정식에서 잔차 방정식을 작성한다.
- 3) 각각의 유한요소에 주목하고 유한요소 내부의 미지변수를 요소의 접점의 값을 사용하여 보간하는 방정식을 작성한다.
- 4) 무게에 의한 잔차방정식과 보간 함수에 의한 각각의 유한요소에 대해 이산화한 유한요소 방정식을 작성한다.
- 5) 각요소에 대해서 작성된 유한요소 방정식을 서로 중첩시켜 해석 영역 전체에 관한 이산화 방정식을 구한다.
- 6) 해석 영역 전체에 관한 연립방정식을 풀고 근사해를 얻는다.

2.3 유체의 상호 작용에 대한 유한요소방정식

이동 경계면 Γ_B (물체 표면)의 성분과 그 이외의 영역내의 성분으로 나타내면

$$u_{\beta j} = U_{\beta j} + v_{\beta j}, \quad (7)$$

$$\tilde{u}_{\beta j} = \tilde{U}_{\beta j} + v_{\beta j}. \quad (8)$$

여기서 $v_{\beta j}$ 는 이동 경계면 Γ_B 위의 변수를 나타내며 $U_{\beta j}$ 와 $\tilde{U}_{\beta j}$ 는 그 이외의 해석 영역 내의 변수를 나타낸다. 또한 물체 표면적인 변수를 물체의 중심에서 정의한 변수는 다음의 관계를 만족할 필요가 있다.

적합 조건식

$$v_{\beta j} = T_{\rho\beta j} \dot{V}_{\rho} \quad \text{on } \Gamma_B \quad (9)$$

$$\dot{v}_{\beta j} = T_{\rho\beta j} \ddot{V}_{\rho} \quad \text{on } \Gamma_B \quad (10)$$

균형 조건식

$$T_{\mu\alpha i} f_{\alpha i} + F_{\mu} = 0 \quad \text{on } \Gamma_B \quad (11)$$

$T_{\mu\alpha i}$ 는 물체의 중심으로 물체 표면의 각 절점의 사이의 기하학적인 관계를 나타내는 행렬이다.

유한 요소 방정식에 대해서는 조건부 표현의 균형 잡힌 조건 표현을 할당하면 유한요소 방정식이 다음과 같이 다시 작성된다.

$$\begin{aligned} M_{\alpha i\beta j} \dot{U}_{\beta j} + A_{\alpha\beta\gamma j} B_{\beta j} U_{\gamma i} - H_{\alpha i\lambda} p_{\lambda} + D_{\alpha i\beta j} U_{\beta j} + S_{\alpha i} &= 0, \\ m_{\mu\rho}^* \ddot{V}_{\rho} + c_{\mu\rho}^* \dot{V}_{\rho} + k_{\mu\rho} V_{\rho} + N_{\mu} &= 0, \\ H_{\alpha i\lambda} U_{\alpha i} + H_{\alpha i\lambda} T_{\mu\alpha i} \dot{V}_{\mu} &= 0, \end{aligned} \quad (12)$$

여기서

$$\begin{aligned} m_{\mu\rho}^* &= m_{\mu\rho} + T_{\mu\alpha i} M_{\alpha i\beta j} T_{\rho\beta j} \\ c_{\mu\rho}^* &= c_{\mu\rho} + T_{\mu\alpha i} (A_{\alpha\beta\gamma j} B_{\beta j} T_{\rho\gamma i} + D_{\alpha i\beta j} T_{\rho\beta j}), \\ S_{\alpha i} &= M_{\alpha i\beta j} T_{\rho\beta j} \ddot{V}_{\rho} + A_{\alpha\beta\gamma j} B_{\beta j} T_{\rho\gamma i} \dot{V}_{\rho} + D_{\alpha i\beta j} T_{\rho\beta j} \dot{V}_{\rho}, \\ N_{\mu} &= T_{\mu\alpha i} (M_{\alpha\beta\gamma j} U_{\beta j} + A_{\alpha\beta\gamma j} B_{\beta j} U_{\gamma i} - H_{\alpha i\lambda} p_{\lambda} + D_{\alpha i\beta j} U_{\beta j}), \end{aligned} \quad (13)$$

위식에서 물체의 질량 m 과 감쇠 c 그 주위의 유체와 결합에 의한 추가적인 질량, 감쇠 효과가 각각 더해진 것을 의미 있다. 물체 표면 절점 이외의 절점에 대한 유체의 운동 방정식이며, 물체의 중심을 기준으로 한 운동 방정식이다.

3. 수치해석 예

3.1 2차원 원주 주위의 유체 연성해석

안정화 기포 함수 유한 요소법을 이용한 ALE 포기에 의한 Navier-Stokes 흐름의 수치 해석 예로 2차원 원주 주위의 유체 구조 연성 해석을 보인다. 그림 1과 같이 계산 영역에서 경계 조건으로

유입 속도 $u = 1.0, v = 0.0$ 를 유입 경계 (경계 Γ_U) 및 유출 경계 (경계 Γ_D)에 상부 경계 및 하

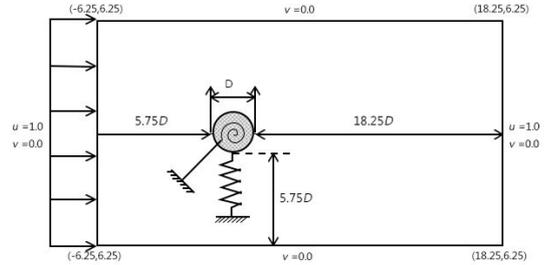


Fig. 1 분석영역과 경계조건

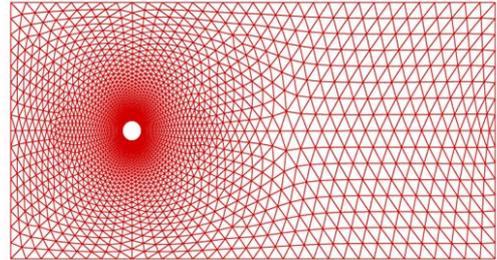


Fig. 2 유한요소 메쉬

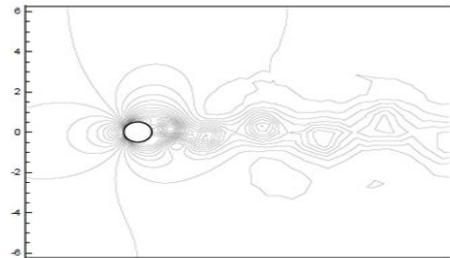


Fig. 3 압력 등고선도 (Re=250.0)

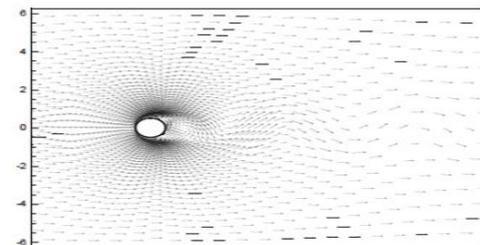


Fig. 4 유속 벡터도 (Re=250.0)

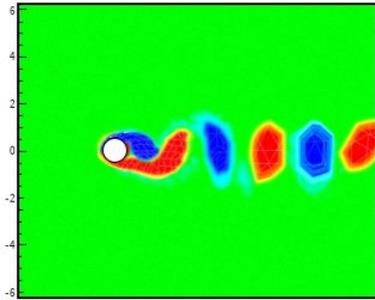


그림 3.9 : 소용돌이도 분포도(Re=250.0)

Fig. 5 와류 분포도 (Re=250.0)

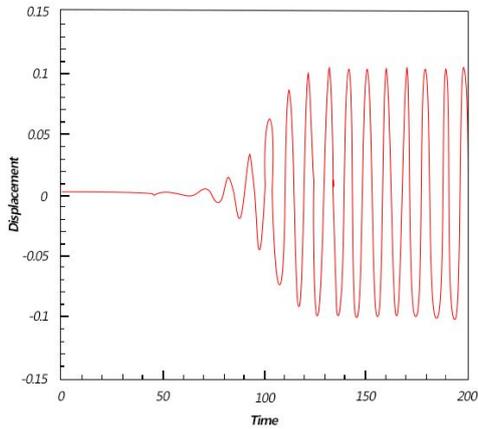


Fig. 6 최전변위와 시간이력

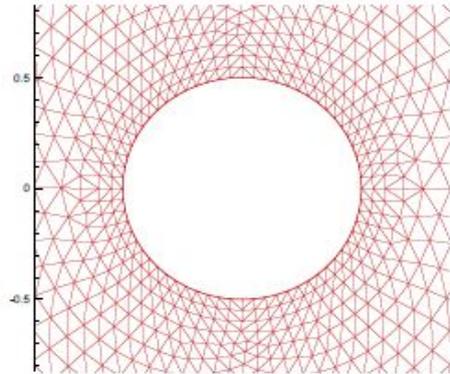
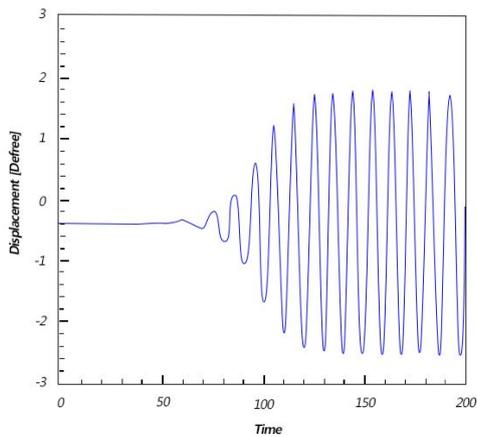


Fig. 7 물체 진동의 모습(무차원 시간=0.0)

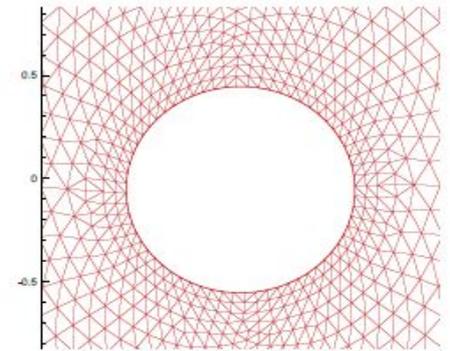


Fig. 8 물체 진동의 모습 (무차원 시간 = 192.5)

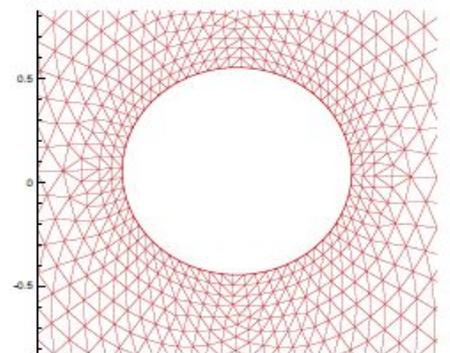


Fig. 9 물체 진동의 모습 (무차원 시간 = 197.5)

부 경계 (경계 Γ_f)에 $t_1 = 0.0$, $v = 0.0$ 가 주어진다. 또한 원주는 연직 방향 및 회전 방향에 스프링지지 되어 균일 유동 중에 놓인 상태이고, 질량 $m = 10$, 연직 방향의 스프링 상수 $k_y = 20.0$, 회전 방향의 스프링 상수 $k_\theta = 10.0$ 로 하고, 스프링에 의한 구조 감쇠는 무시한다. Fig. 2의 유한

요소 매쉬는 절점수 2448, 요소수 4736이다. 레이놀즈 수 $Re = 250.0$ 경우에 해석을 하고, 무차원 시간 200.0에서의 압력 분포, 유속 벡터, 소용돌이도 분포도를 각각 Fig. 3-5에 나타낸다. 연직 방향의 변위, 회전 방향의 변위의 지각력을 각각 Fig 6에 나타내고, 또한 무차원 시간 0.0, 192.5, 197.5에서 물체의 진동의 모습을 각각 그림 7-9에 나타낸다. 일반적으로 레이놀즈 수가 높을수록, 물체 표면보다 흐름이 떠나는 현상인 경계층의 박리 (separation)가 일어난다. 이 박리 현상은 저항력 증가에 큰 영향을 미친다. 레이놀즈 수가 250.0 인 해석 결과에는 물체 뒤에 큰 소용돌이가 형성되고, 상하 교대로 뒤로 흘러 이른바 카르만 소용돌이가 형성되고 있는 것으로 알 수 있다. 이 물체 뒤에 소용돌이 영역에서는 급격한 유체 혼합 운동으로 더 큰 에너지 손실이 발생하여 압력이 저하된다. 그 결과 물체의 전 후면의 압력 차이로 인한 저항이 생긴다. 이것은 압력 저항 (pressure drag) 또는 형상저항 (profile drag)라고 불린다.

3.2 교량진동의 수치해석 결과

교량은 수직 방향으로만 스프링상태이며 해석 조건은 하부 스키트를 제거한 교량에서 유체 구조 관련성 해석을 했을 때, 흐름에 의해서 와류가 발생하도록 설정하였다. 교량 진동이 최소가 된 하부 스키트의 최적 각도를 수치 계산하고 초기 각도와 최적 각도에서의 교량 진동을 비교함으로써 본 방법의 유효성을 검증한다. 또한 하부 스키트의 유효성을 검증하기 위해서 하부 스키트를 설치하고 교량의 진동과 최적 각도에서 해석 결과와 비교 검토한다.

교량 진동의 최적 제어에 의한 수치 해석 결과는 Fig 10~16에 나타낸다. Fig. 10은 평가 함수의 반복 계산에 따른 추이이고, Fig. 11은 하부 스키트의 각도의 반복 계산에 따른 추이이다. 평가 함수는 반복 계산 시(초기 각도 $\phi = 40.0$)에서의 평가 함수치를 1.0으로 기준으로 한다. 평가 함수는 반복 계산 12회째에서 수렴하고 반복 계

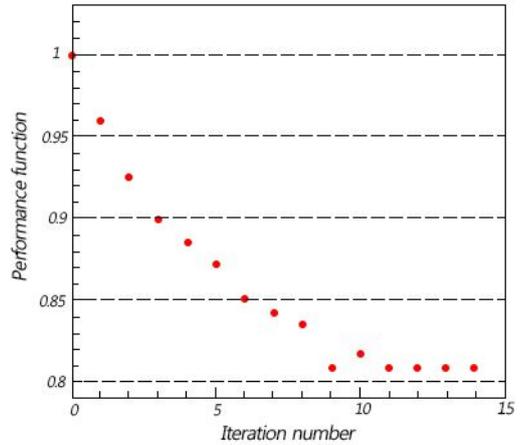


Fig. 10 평가함수의 반복계산에 따른 추이

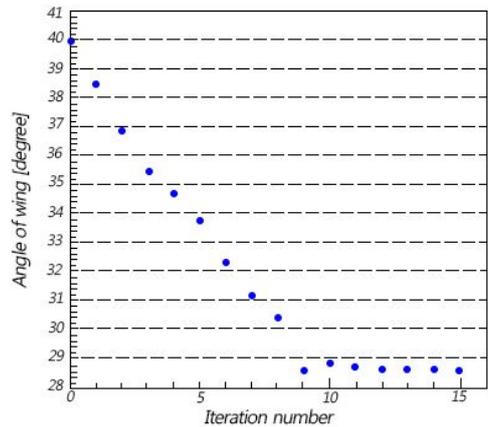


Fig. 11 평가함수의 반복계산에 따른 추이

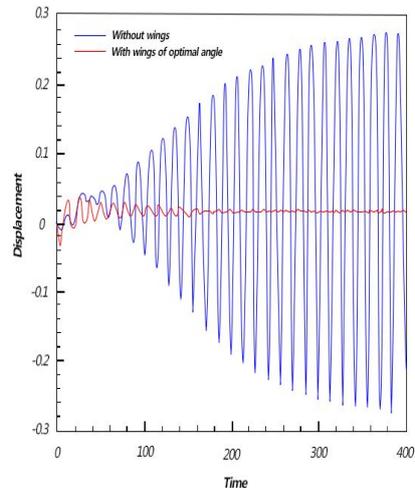


Fig. 12 하부스키트 유무에 의한 변위비교

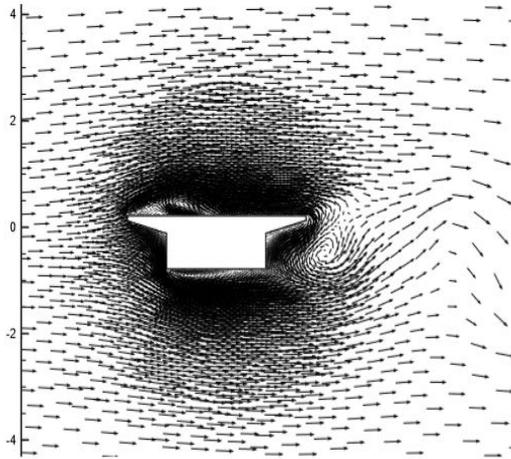


Fig. 13 교량 주위의 속도 분포도(하부 스커트 없음)

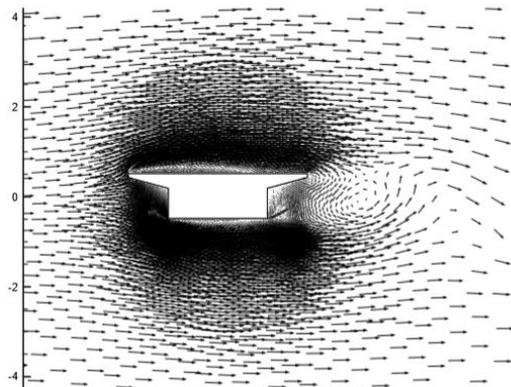


Fig. 14 교량 주위의 속도 분포도(하부 스커트가 있음)

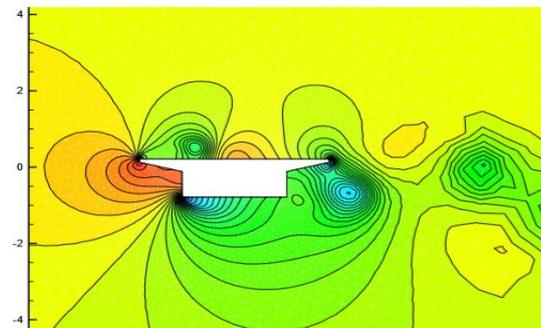


Fig. 15 교량 주위의 압력 분포도(하부 스커트 없음)

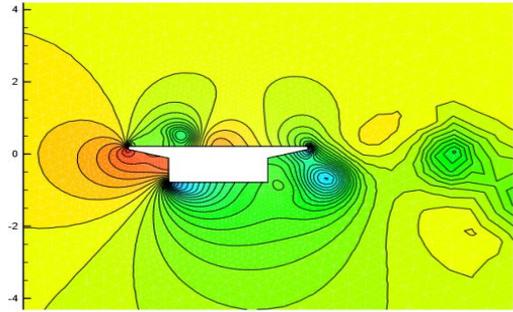


Fig. 16 교량 주위의 압력 분포도(하부 스커트가 있음)

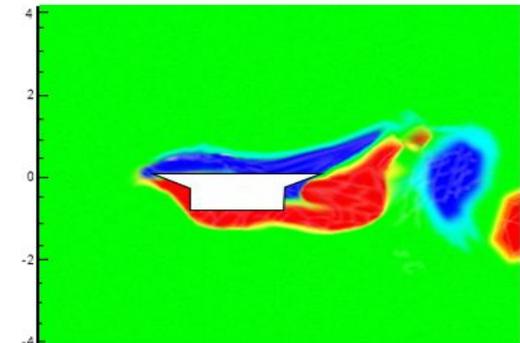


Fig. 17 교량 주위의 와류 분포도(하부 스커트가 없음)

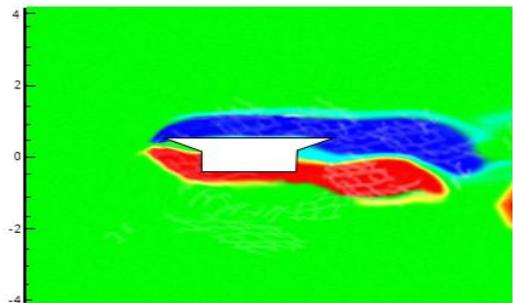


Fig. 18 교량 주위의 와류 분포도(하부 스커트가 있음)

산 시의 평가 함수치와 비교하면 19.1%를 감소시킬 수 있었다. 또, 하부 스커트는 초기 각도 $\phi=40.0$ 에서 최적 각도 $\phi=28.6$ 에 수렴하였다. Fig. 12는 하부 스커트를 설치하지 않은 교량과 하부 스커트를 최적 각도로 설치한 교량으로, 교량의 중심점의 변위의 시각 흐름을 나타낸다.

가로축은 무차원 시간을 세로축은 교량 변위를 나타내며, 파란선은 하부 스커트를 설치하지 않은 교량의 변위를 빨간선은 하부 스커트를 최적 각도로 설치한 교량의 변위를 나타낸다. 하부 스커트를 설치하지 않은 교량은 흐름의 와류가

발생하고 변위의 진폭이 서서히 증가하고 있는 것으로 나타나고 있으며, 하부 스키트를 최적 각도로 설치한 교량에서는 변위의 진폭이 점점 줄어든 것을 알 수 있다. 두 해석 결과를 비교하면, 하부 스키트를 최적 각도로 설치한 데 따른, 연직 진동을 98.0% 감소시킬 수 있었다. Fig. 13, 15는 하부 스키트를 설치하지 않은 교량 주위에서 무차원 시간 400의 속도, 압력, 소용돌이도 분포도를 나타낸다, Fig. 14, 16은 하부 스키트를 최적 각도로 설치한 교량 주위에서 무차원 시간 400의 속도, 압력, 소용돌이도 분포도를 나타낸다. 유속 분포도 Fig. 17, 18을 비교하면, 교량에 하부 스키트를 설치함으로써, 하면 상류 측의 하면에서 분리식 유하 속도가 떨어진 것이 확인할 수 있다. 그 결과 상하로 진동할 때 진동의 방향과는 역 방향의 힘이 나기 쉽게 된다. 와류의 분포도 Fig. 17, 18을 비교하면 하부 스키트가 교량 전후에서의 흐름을 변화시키고, 박리식 규모가 작게 나타난다.

4. 결론

본 연구에서는 제어 문제의 공학적 응용의 하나로 진동 물체를 고려한 Navier-Stokes 흐름의 해석 및 진동 교량의 최적 제어 해석을 실시하였다.

진동 물체를 고려한 Navier-Stokes 흐름에서는 레이놀즈 수 250.0의 흐름에서 ALE 유한요소법을 이용한 유체구조 해석기법에 의한 상호 작용을 고려한 유체와 구조물의 거동을 해석할 수 있었다.

그 결과 흐름에 의해서 물체에 생기는 연직 방향 및 회전 방향의 물체 변위 해석에 구할 수 있었으며, 물체 이동에 따른 유한 요소 메시가 적용되어 이산화해법에 적절히 사용되었다. 진동 교량의 최적 제어 해석에서는 비정상 비압축 점성 흐름의 하부를 이용한 교량 진동의 최적 제어 방식의 정식화를 유도함과 동시에 최적 조건에서 그 유효성을 검토하였다.

그 결과 레이놀즈 수 250.0의 흐름에서 하부 스키트의 최적 각도로 28.6이 산출되었고 평가 함수를 19.2% 감소 시키는데 성공했다. 또한 하부 최적 각도로 와류 여진, 연직 진동을 98.0% 감소시킬 수 있었다. 이들 해석 결과로부터 교량에 설치할 유효성을 나타낼 수 있었다. 하부 스키트의 설치 각도를 변화시키기로 교량의 진동의 대소에 변화가 생길 것. 그러므로, 하부 스키트의 설치 각도에는 최적의 각도가 존재할 가능성을 나타낼 수 있었다.

REFERENCES

- Lamb,H. and Southwell,R.V.(2015) The Vibration of a Spinning Disk , Proceedings of The Foyal Society of London, 99, 272.
- Southwell,R.V.(2013) On the Free Transverse Vibration of a Uniform Circular Disc Clamped at its Centr;and on the Effects of Rotation, Proceedings of The Royal Society of London, 101, 133.
- Tobies,S.H. and Arnold,R.N.(2012) The Influence of Dynamical Imperfection on the Vibration of Rotating Disks , Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, 171 , 669.
- Iwan,W.D. and Stahl,K.J.(2001) The Response of an Elastic Disk With a Moving Mass System, Transactions of the ASME ,Journal of Applied Mechanics, 445.
- Iwan,W.D. and Moeller,T.L.(2016) The Sability of a Spinning Elastic Disk With a Transverse Load System , Transactions of the ASME ,Journal of Applied Methanics, 48, 485.
- Benson,R.C. and Bogy,D.B.(2012) Deflection of a Very Flexible Spinning Disk Due to a Stationary Transverse Load, Transactions of the ASME ,Journal of Applied Mechanics, 45, 636.
- Hutton,S.G.,Chonan,S. and Lehmann,B.F.(1999) Dynamic Respones of a Guided Circular Saw, Journal of Sound and Vibration, 112-3, 527.

논문투고일: 6월 19일

논문게재일: 6월 30일