

## 피보나치 수열을 활용한 가변스텝 LMS 알고리즘

우홍채

대구대학교 정보통신공학부

### Variable Step LMS Algorithm using Fibonacci Sequence

Hong-Chae Woo

School of Computer and Communication Engineering, Daegu University

**요 약** 다양한 신호처리 및 통신환경에서 적응신호처리는 매우 중요하다. 적응신호처리 방식 중에서 least mean square(LMS) 알고리즘은 단순하면서도 강인하기 때문에 널리 사용되고 있다. 가변스텝 LMS 알고리즘은 스텝을 가변하므로 빠른 수렴속도와 작은 초과자승오차를 얻을 수 있는 방식이다. 성능향상을 위하여 다양한 가변스텝 LMS 알고리즘이 연구되어 왔다. 하지만 성능향상을 위하여 가변스텝 LMS 알고리즘의 계산 복잡도는 일부 방식에서는 크게 높아지게 되었다. 계산 복잡도가 낮은 고정스텝 LMS 알고리즘과 빠른 수렴속도의 가변스텝 LMS 알고리즘의 장점을 같이 가질 수 있는 간헐적 스텝 갱신 알고리즘을 제안한다. 간헐적으로 스텝 갱신을 할 때 피보나치 수열을 사용하여 스텝 갱신 횟수를 상당히 낮추면서도 가변스텝 LMS 알고리즘의 성능을 유지할 수 있었다. 적응 등화기에 제안한 가변스텝 LMS 알고리즘을 적용하여 그 성능을 확인하였다.

- **주제어** : 적응신호처리, 가변스텝 LMS, 적응 등화기, 피보나치 수열, 계산 복잡도

**Abstract** Adaptive signal processing is quite important in various signal and communication environments. In adaptive signal processing methods since the least mean square(LMS) algorithm is simple and robust, it is used everywhere. As the step is varied in the variable step(VS) LMS algorithm, the fast convergence speed and the small excess mean square error can be obtained. Various variable step LMS algorithms are researched for better performances. But in some of variable step LMS algorithms the computational complexity is quite large for better performances. The fixed step LMS algorithm with a low computational complexity merit and the variable step LMS algorithm with a fast convergence merit are combined in the proposed sporadic step algorithm. As the step is sporadically updated, the performances of the variable step LMS algorithm can be maintained in the low update rate using Fibonacci sequence. The performances of the proposed variable step LMS algorithm are proved in the adaptive equalizer.

- **Key Words** : Adaptive Signal Processing, Variable Step LMS, Adaptive Equalizer, Fibonacci Sequence, Computational Complexity

Received 25 May 2018, Revised 29 June 2018, Accepted 25 June 2018

\* **Corresponding Author** Hong-Chae Woo, School of Computer and Communication Engineering, Daegu University, 201, Daegu-dae-ro, Jillyang-eup, Gyeongsan-si, Gyeongsangbuk-do, Korea E-mail: hcwoo@daegu.ac.kr

## I. 서론

LMS 알고리즘은 단순하면서도 강인하다고 알려져 있으며 널리 사용되고 있다[1]. 이동통신채널과 같이 지속적으로 변하는 환경에 필요한 적응 신호처리에서 LMS 알고리즘은 매우 유용하다. 일반적인 고정스텝 LMS 알고리즘은 최적계수로 수렴이 느린 것으로 알려져 있다. LMS 알고리즘의 수렴속도는 스텝의 크기에 달려있다. LMS 알고리즘의 스텝의 크기를 결정할 때 고려해야 할 것은 큰 스텝 값은 빠른 수렴속도를 가지지만 큰 초과자승오차(excess mean square error, MSE)를 초래하고, 작은 스텝 값은 느린 수렴속도와 작은 초과자승오차를 가진다는 것이다. 수렴속도와 초과자승오차 사이의 절충점을 찾기 위하여 스텝의 크기를 가변 하는 방법을 찾게 되었다. 가변 스텝 LMS 알고리즘에서는 초기단계에는 스텝을 크게 하여 수렴속도를 높이고, 후기단계에서는 스텝을 작게 하여 수렴속도는 느리지만 초과자승오차를 작게 하도록 한다. 가변스텝 LMS 알고리즘에 대한 많은 연구가 진행되어 왔으며 성능향상을 위해서 다양한 가변스텝 방식들이 제안되어 왔다.

가변스텝의 크기를 결정하기 위하여 신호입력과 오류신호가 사용되어 왔다. 적응신호처리 대상 시스템의 출력 오류신호는 시스템의 현재 상태를 나타내는 값이라 할 수 있다. Kwong은 가변스텝 갱신을 위하여 오류신호의 자승값을 사용하였다[2]. Mathews는 오류신호의 자승값에 대한 스텝값의 기울기의 음 값을 사용하고 있다[3]. Aboulmasr는 2개의 연속된 오류신호값의 자기상관계값을 활용하여 가변스텝을 갱신한다[4]. Pazaitis는 데이터 분포의 뾰족한 정도를 나타내는 척도인 첨도를 활용하여 가변스텝을 갱신하고 있다[5]. 첨도를 계산할 때는 오류신호의 4승값과 자승값 등이 필요하다. 가변스텝을 계산하기 위하여 고차원 통계값을 사용하고 있는 것이다. Haweel은 가변스텝 계산 복잡도를 낮추기 위하여 오류신호의 부호값을 사용하여 가변스텝을 갱신하고 있다[6]. 또한 간단한 결정함수를 활용하여 가변스텝 계산 복잡도를 낮추기도 하고 있다[7]. 수렴속도는 느리지만 정해진 고정스텝값을 사용하는 고정스텝 LMS 알고리즘과 스텝값을 매번 새롭게 계산하는 가변스텝 LMS 알고리즘을 혼합한 간헐적 스텝 갱신 방식의 가변스텝 LMS 알고리즘을 제안하고자 한다.

## II. 가변스텝 LMS 알고리즘

LMS의 계수 갱신식은 다음과 나타낼 수 있다.

$$w(n+1) = w(n) + \mu(n)e(n)X(n) \quad (1)$$

여기서  $w(n)$ 은 가중벡터이며,  $e(n)$ 은 예측 출력오류이다.  $X(n)$ 은 입력벡터이며,  $\mu(n)$ 은 가변스텝이다. 고정스텝 LMS 알고리즘에서는  $\mu(n)$ 은 고정값  $\mu$ 가 된다. 여러 가지 접근 방식으로 가변스텝 LMS 알고리즘이 지금까지 연구되고 있다. Kwong의 가변스텝 LMS 알고리즘은 예측 출력오차 자승값을 활용하는데 식 (2)로 기술할 수 있다[2].

$$\mu(n+1) = \alpha\mu(n) + \gamma e^2(n) \quad (2)$$

$\alpha$ 는  $0 < \alpha < 1$  값을 가지며,  $\gamma$ 는  $\gamma > 0$ 이다.  $\mu(n)$ 은  $\mu_{\min} < \mu(n) < \mu_{\max}$  값을 가진다. 미지의 대상 시스템의 예측 출력오류  $e(n)$ 은 다음과 같다.

$$e(n) = d(n) - X^T(n)W(n) \quad (3)$$

$d(n)$ 은 시스템 기대신호로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$d(n) = X^T(n)W^*(n) + \xi(n) \quad (4)$$

여기서  $W^*(n)$ 은 시변최적계수 벡터이며,  $\xi(n)$ 은 시스템의 측정오차이다. 가변스텝의 평균자승오차 수렴을 보장하는 충분조건은 가변스텝의 최댓값  $\mu_{\max}$ 가 다음 조건을 만족하면 된다.

$$\mu_{\max} \leq \frac{2}{3\text{tr}(R)} \quad (5)$$

식 (5)에서  $R = E[X^T(n)X(n)]$ 이다[2].

Mathews는 가변스텝을 갱신하기 위하여 오류값의 기울기를 사용하고 있는데 식(6)과 같이 가변스텝 갱신식을 나타낼 수 있다[3].

$$\mu(n+1) = \mu(n) - \frac{\gamma}{2} \frac{\partial e^2(n)}{\partial \mu(n)} \quad (6)$$

Aboulnasr는 인접한 오류값  $e(n)$ 과  $e(n-1)$  사이의 자기상관을 사용하여 측정잡음에 강인할 수 있는 가변스텝 갱신방식을 제안하고 있는데, 식 (7)과 (8)로 표현된다[4].

$$p(n) = \beta p(n-1) + (1-\beta)e(n)e(n-1) \quad (7)$$

$$\mu(n+1) = \alpha\mu(n) + \gamma p^2(n) \quad (8)$$

Pazaitis는 고차원 통계값인 첨도, 즉  $Kurt$ 를 사용하여 가변스텝을 갱신하는데 측정잡음에 강인한 것으로 알려져 있다[5]. Pazaitis의 갱신식은 식 (9)와 같다.  $Kurt$ 를 계산하기 위해서는 오류값  $e(n)$ 의 4승값과 자승값이 필요하다.

$$\mu(n) = \mu_{\max} (1 - e^{-\alpha |Kurt(e(n))|}) \quad (9)$$

Haweel은 가변스텝 갱신식에서 계산 복잡도를 낮추기 위해서 오류값의 부호만을 사용하는 접근방법을 식 (10)에서 보여 주고 있다[6].

$$\mu(n+1) = \alpha\mu(n) + \gamma sign(e(n)) \quad (10)$$

가변스텝 갱신식의 계산 복잡도를 낮추는 새로운 접근방식으로 간헐적 갱신방식을 보이고자 한다. 두 가지 간헐적 갱신방식을 제시하여 사용하였다. 한 가지 방식은 주기적 갱신방식이고 다른 하나는 피보나치 수열을 사용하는 방식이다. 주기적 방식에서는 예를 들면 일정 간격 매 20번째 마다 갱신하는 것이다. 피보나치 수열은 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ... 등으로 증가하는 수열로서 자연의 성장 혹은 증식 현상에서 자주 보인다. 피보나치 수열 갱신방식에서는 수열에 따라 가변스텝을 갱신한다. 하지만 피보나치 수열 갱신방식에서도 최댓값은 있으며 최댓값 이후에 새로운 피보나치 수열을 다시 시작한다. 즉 끝이 없는 피보나치 수열의 앞 구간을 사용하는 것이다. 주기적 혹은 피보나치 갱신방식에 주기 사이 혹은 수열 사이에서는 가변스텝 갱신을 멈추고 현재 가변스텝값을 유지한다. 갱신을 멈추는 구간에서는 그 때 가변스텝값이 고정스텝값이 되어 고정스텝 LMS 알고리즘으로 작동한다. 제안한 간헐적 갱신방식은 가변스텝과 고정스텝이 혼합된 방식으로 볼 수 있다. 갱신을 멈추는 구간에서

가변스텝을 계산하지 않으므로 전체 계산 복잡도는 낮추어진다. 제안한 간헐적 가변스텝 갱신 방식은 식 (5)의 수렴 충분조건을 따르기 때문에 최적계수로의 수렴은 보장된다.

### III. 시뮬레이션 결과

본 연구에서는 Kwong의 가변스텝 LMS 알고리즘을 사용하여 간헐적 갱신방식을 적응등화기에 적용하여 그 성능을 확인하고자 한다. Fig. 1의 적응등화기에서 입력  $x(n)$ 은 랜덤 비트열로서  $\pm 1$  값을 가지며 평균 0 그리고 분산 1이다. 또한 적응등화기는 선형분산채널을 가지며, 가우시안 분포의 측정잡음  $\xi(n)$ 이 더해진다[8].

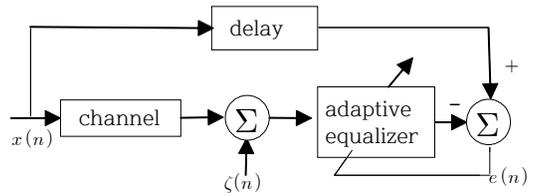


Fig. 1. Block diagram of adaptive equalizer system

Fig. 1의 적응등화기 채널의 임펄스 응답  $h(k)$ 는 식 (11)로 나타낼 수 있다.

$$h(k) = \begin{cases} \frac{1}{2} [1 + \cos(\frac{2\pi}{B}(k-2))], & k = 1, 2, 3 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (11)$$

$B$ 는 통신채널에서 신호크기 왜곡을 통제하며,  $B$  값이 증가하면 왜곡도 커진다.  $B = 3.1$ 로 하였다. 식 (4)의 기대신호  $d(n)$ 은 지연된 입력 신호값으로 얻어진다. 적응등화기는 통신채널의 왜곡을 보상하는 기능을 한다. 적응등화기의 필터계수 크기는 11이며,  $\alpha = 0.97$  그리고  $\gamma = 10^{-2}$ 로 하였다. 가변스텝의 최솟값 및 최댓값으로  $\mu_{\min} = 10^{-5}$ ,  $\mu_{\max} = 10^{-1}$ 을 사용했다. 가변스텝의 초깃값은  $10^{-1}$ 으로 설정하였다. 가변스텝 LMS 알고리즘의 성능을 평가하기 위하여 학습 곡선  $J(n)$ 을 사용하였으며,  $J(n)$ 은  $K$ 번의 독립적인 사건의 평균인데 식 (12)으로 나타낼 수 있다.  $K = 50$ 으로 하였다.  $N$ 은 각 사건에서 사용한 샘플 수이며,

$N=5000$ 이다.  $e_i^2(n)$ 은  $i$ 번째 사건에서  $n$ 번째 자승 오류값이다.

$$J(n) = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K e_i^2(n), \quad n = 1, 2, \dots, N \quad (12)$$

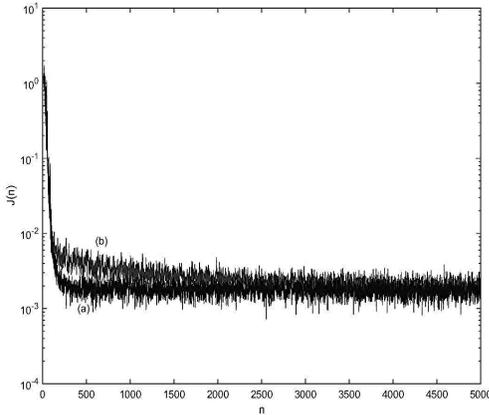


Fig. 2. Comparison of learning curves in VS LMS: (a) algorithm with Fibonacci seq. 21, (b) original algorithm

Fig. 2는 Kwong의 가변스텝 LMS 알고리즘에 대한 학습곡선이며, 피보나치 수열의 최댓값을 21을 사용하면 Kwong의 원본 가변스텝 LMS 알고리즘보다 성능이 우수함을 보이고 있다. 이는 초기 단계에서 큰 값의 가변스텝을 부분적으로 유지하므로 초기에 수렴속도가 빨라지는 것을 보여준다.

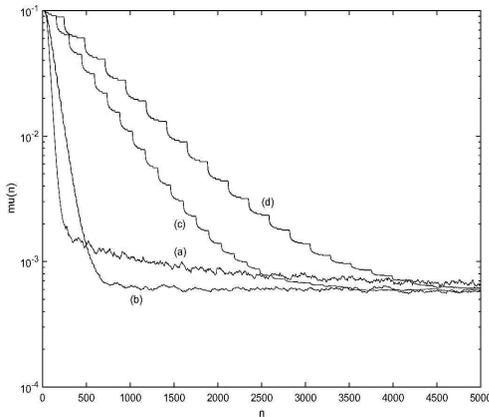


Fig. 3. Comparison of step size in VS LMS: (a) original algorithm, (b) algorithm with Fibonacci seq. 21, (c) algorithm with Fibonacci seq. 144, (d) algorithm with Fibonacci seq. 233

Fig. 3은 피보나치 수열의 최댓값에 따른 가변스텝값의 시간적 변화를 나타낸다. 가장 길고 큰 피보나치 수열은 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233이다. Kwong의 원본 가변스텝 LMS 알고리즘의 학습곡선 성능과 최댓값 144인 피보나치 수열의 가변학습 LMS 알고리즘의 성능이 거의 같았다. 이 두 개의 학습곡선이 거의 겹쳐져서 구별할 수 없어서 Fig. 2에는 최댓값 144인 피보나치 수열의 학습곡선을 나타내지 않았다. Fig. 3을 살펴보면 피보나치 수열을 사용한 가변스텝 갱신일 때, 가변스텝이 반복하여 작은 파도 모양 구간에서 매우 천천히 작아지는 것을 알 수 있다. 이는 피보나치 수열 사이에는 가변스텝을 계산하지 않고 현재 값을 유지하고 있기 때문이다.

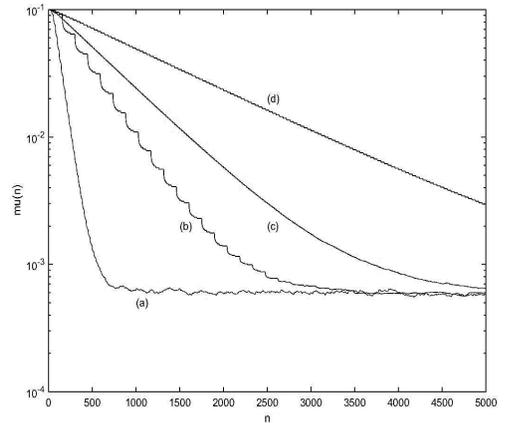


Fig. 4. Comparison of step size in VS LMS: (a) algorithm with Fibonacci seq. 21, (b) algorithm with Fibonacci seq. 144, (c) algorithm with periodic seq. 20, (d) algorithm with periodic seq. 40

Fig. 4는 주기적 갱신과 피보나치 수열 갱신의 성능을 가변스텝의 시간적 변화 그래프로 보여주고 있다. 학습곡선은 겹쳐지는 부분들이 많아서 구별이 어려워서, 확연하게 차이를 보이는 가변스텝의 변화 그래프를 제시하였다. 최댓값 144인 피보나치 수열 갱신의 학습곡선과 주기 20인 주기적 갱신의 학습곡선은 거의 같았으며, 주기 40일 때의 주기적 갱신의 학습곡선은 최댓값 144인 피보나치 수열 갱신의 학습곡선보다 수렴속도가 느렸다. 따라서 피보나치 수열의 가변스텝 갱신방식이 주기적인 갱신방식보다 우수함을 알 수 있다. 따라서 Kwong의 원본 알고리즘, 주기 20인 주기적

갱신 알고리즘, 그리고 최댓값 144인 피보나치 수열 갱신 알고리즘은 학습곡선으로 볼 때 거의 같은 성능을 보였다. 간헐적 가변스텝 갱신 방식은 기존의 다른 가변스텝 LMS 알고리즘에도 적용할 수 있을 것이다.

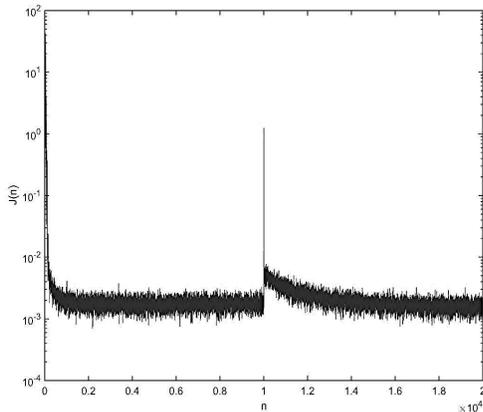


Fig. 5. Learning curve of VS LMS with Fibonacci seq. 144 under abrupt system change

Fig. 5는 최댓값 144인 피보나치 수열인 가변스텝 LMS 알고리즘이 급격하게 시스템 계수가 변할 때 학습곡선의 특성을 보여주고 있다. 적응등화기의 통신채널 왜곡 특성을 결정하는 시스템 계수  $B$  값을 10000 샘플에서 3.1에서 3.0으로 바꾸었다. 급격한 시스템 변화에도 간헐적 가변스텝 LMS 알고리즘이 잘 동작하고 있음을 보여준다.

#### IV. 결론

고정스텝 LMS 알고리즘과 가변스텝 LMS 알고리즘을 장점을 결합한 간헐적 가변스텝 LMS 알고리즘을 제안하였다. 주기적 가변스텝 갱신과 피보나치 수열 간헐적 갱신을 비교하였으며, 피보나치 수열의 갱신 방식이 우수하였다. 간헐적 가변스텝 갱신으로 계산 복잡도를 낮추면서도 원본 가변스텝 LMS 알고리즘의 성능을 얻을 수 있었다.

#### ACKNOWLEDGMENTS

이 논문은 2017학년도 대구대학교 학술연구비지원으로 수행된 연구이다.

#### REFERENCES

- [1] D. Bismor, K. Czyz, and Z. Ogonowski, "Review and comparison of variable step-size LMS algorithm," *International Journal of Acoustics and Vibration*, vol. 21, no.1, pp. 24-39, 2016.
- [2] R. H. Kwong, "A variable step size LMS algorithm," *IEEE Trans. On Signal Proc.*, vol. 40., no. 7, pp. 1633-1642, 1992.
- [3] V. J. Mathews, and Z. Xie, "A stochastic gradient adaptive filter with gradient adaptive step size," *IEEE Trans. On Signal Proc.*, vol. 41, no. 6, pp. 2075-2087, 1993.
- [4] T. Aboulnasr and K. Mayyas, "A robust variable step size LMS-type algorithm: analysis and simulations," *IEEE Trans. On Signal Proc.*, vol. 45, no. 3, pp. 631-639, 1997.
- [5] D. I. Pazaitis and A. G. Constantinides, "A novel kurtosis driven variable step-size adaptive algorithm," *IEEE Trans. On Signal Proc.*, vol. 47, no. 3, pp. 864-872, 1999.
- [6] T. I. Haweel, "simple variable step size LMS adaptive algorithm," *International Journal of Circuit Theory and Applications*, vol. 32, pp. 523-536, 2004.
- [7] Hong Chae Woo, "Deterministic function variable step size LMS algorithm," *Journal of the Korea Institute of Convergence Signal Processing*, vol. 2, no. 2, pp. 128-132, 2011.
- [8] S. Haykin, "A adaptive filter theory," 4th Ed., New York: Prentice Hall, 2002.

#### 저자 소개

우 흥 체 (Hong-Chae Woo)



1980년 2월 : 경북대학교  
전공학과(공학사)  
1979년 12월 : 국방과학연구소  
연구원  
1988년 12월 : Texas A&M 대학교  
전기과(공학석사)  
1991년 12월 : Texas A&M 대학교  
전기과(공학박사)

1992년 3월~현재 : 대구대학교, 정보통신공학부 교수  
관심분야 : 멀티미디어신호처리, 적응필터, 시각암호