한국항행학회논문지
Journal of Advanced Navigation Technology

기반 기술

J. Adv. Navig. Technol. 22(3): 228-232, Jun. 2018

실용적 안정성을 보장하는 양자화기 데이터 율 조건

Data Rate Condition for Quantizer Achieving Practical Stability

양 장 훈
서울미디어대학원대학교 뉴미디어학부

Janghoon Yang
Department of New Media, Seoul Media Institute of Technology, Seoul, 07590, Korea

[요 약]

많은 사물들이 네트워크를 통해서 연결되고 제어되면서 제어 시스템에서 양자화 오류를 다루는 문제의 중요성이 증가하고 있다. 따라서, 본 논문에서는 제어시스템의 실용적 안정성을 달성하기 위해서 양자화기에서 필요로 하는 데이터 율에 대한 조건을 제시한다. 먼저, 프로세스 잡음이 없는 조건에서 데이터율이 궤환 시스템 행렬의 고유값, 초기 상태의 크기, 초기 양자화 오류의 크기 및 제어 이득 등에 의해서 결정됨을 보이고, 프로세스 잡음이 있는 경우 프로세스 잡음의 최대 크기에 의한 추가적인 데이터율이 발생함을 보인다. 또한, 점근적 분석을 통해서 네트워크 제어를 위한 데이터율을 감소시키기 위해서는 이를 고려한 제어기의 설계가 필요함을 보인다. 간단한 예제를 통해서 균일 양자화기 및 로그형 양자화기가 데이터 율에 따라서 어떤 실용적 안정성을 보이는지를 확인한다.

[Abstract]

Dealing with quntization error in a control system properly becomes much more important as many devices are connected through network and controlled. Thus, in this paper, we study a data rate condition on quantizer to achieve practical stability in a discrete time linear time invariant system with state feedback control. First, required data rate is shown to depend on eigenvalue of the closed loop system, the size of the initial state vector, the magnitude of initial quantization error, and control gain in the absence of process noise. It additionally depends on the maximum magnitude of process noise when noise is not zero. Asymptotic analysis shows that a new design method may be needed to reduce the date rate for a networked control in the presence of quantization error and noise.. We provide a simple numerical evaluation of uniform quantizer and logarithmic qunatizer to assess their characteristics of practical stability depending on data rate in the presence of noise.

Key word : Control, Data rate, Feedback system, Quantization, Stability.

https://doi.org/10.12673/jant.2018.22.3.228

Received 23 April 2018; **Revised** 4 June 2018
Accepted (Publication) 19 June 2018 (30 June 2018)

***Corresponding Author; Janghoon Yang**

Tel: +82-2-6393-3237
E-mail: jhyang@smit.ac.kr

Ⅰ. 서 론

통신 시스템의 발달은 디지털 네트워크를 기반으로 한 유비쿼터스 시스템의 진화를 촉진 시키고 모든 사물들이 네트워크를 통해 연결되는 사물 인터넷 시대를 열어가고 있다. 사물 인터넷 환경에는 다양한 디바이스나 시스템이 연결되고 제어된다[1]. 제어에 통신이 결합되면서 네트워크 기반 제어가 융합되어 사이버물리시스템이 등장하였고[2], 무인 비행체의 제어에 대표적으로 활용되고 있다 [3]. 이런 시스템이 디지털 네트워크를 통해서 연결되기 위해서는 먼저 아날로그 신호를 디지털 신호로 변환하는 과정이 필요하고 이산화된 신호를 유한개의 레벨로 표현하는 양자화 과정에서 신호의 왜곡이 발생한다.

양자화에 따른 제어 시스템의 안정성을 확보하기 위한 연구들은 주로 90년대에 시작되어 양자화에 대한 분리 이론, 점근적 최적 양자화기, 네트워크 기반 제어 등의 연구들이 수행되었다. 다양한 제어 목적에 따라 요구되어지는 점근적 성능 관점에서의 데이터율에 대한 조건을 제시하였다[4]. 또한, 리아푸노프 조건을 이용한 안정성을 보장하는 최적의 양자화기가 로거리듬의 밀도를 갖는 양자화기를 증명하고, 샘플링과 양자화기를 동시에 고려하는 경우 양자화기에 사용되는 지수의 최적값이 상수로 결정됨을 보였다[5]. 양자화된 LQG (linear quadratic gaussian)제어 문제는 분리 법칙에 의해서 상태 제어 설계 문제와 양자화 상태 추정 문제로 분리되어 설계가 가능함을 보였고[6], 이후 곱셈 잡음으로 왜곡된 출력 신호를 양자화 할 때에 목표로 하는 LQG 성능을 달성하는 제어기 설계 방법이 개발되었다[7].

제어기 설계에 있어서 안정성은 상태 신호의 크기가 점근적으로 0에 수렴함으로써 시스템이 안정적으로 동작하는 가를 의미한다. 기존 연구에서 점근적 안정성을 위한 조건과, 사용 가능한 정보 종류에 따른 점근적 안정성을 달성할 수 있는 양자화기가 제시되었다[4]. 하지만, 많은 현실적인 시스템에서는 유한 시간내에 원하는 상태의 크기 이하로 상태 정보를 제어할 수 있는가에 관한 실용적 안정성이 주요한 시스템의 지표가 되기 때문에 본 논문에서는 기존 연구 방법을[4] 확장하여 실용적 안정성을 보장하기 위해서 제어 시스템에서 양자화기가 필요로 하는 데이터율에 대한 조건을 제시한다.

Ⅱ. 실용적 안정성을 위한 데이터율 조건

본 논문에서는 시불변 이산 시간 선형 제어 시스템을 고려한다. k번째 이산 시점에서의 시스템은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k)+Bu(k)+v(k) \\ y(k) &= Cx(k) \end{aligned} \tag{1}$$

여기서, $x(k)\in R^n$ 는 시스템의 상태, $u(k)\in R^m$ 는 제어 입력, $v(k)\in R^n$ 는 프로세스 잡음, $y(k)\in R^p$ 는 시스템 출력이다.

상태 궤환 제어를 할 때에 제어이득이 K 인 궤환 시스템 행렬 $A_C = A+BK$ 를 고유 값 분해를 통해서, 상태 벡터를 선형 변환한 벡터를 다음과 같이 표현한다.

$$z(k) = W^k Tx(k) \tag{2}$$

$A_C = TDT^{-1}$ 에서 T 는 고유벡터 행렬, D는 고유값이 대각선상에 위치하는 대각행렬이고 W는 A_C의 고유값이 복소수일 때에 고유값이 대각선상에 위치하는 대각행렬 W에 곱함으로써 WD의 대각성분이 양의 실수를 갖도록 만들어 주는 행렬이다. 필요로 하는 양자화에 따른 데이터율을 실용적 안정성 관점에서 유도하기 위해서 다음과 같이 정의한다.

정의-1 (실용적 안정성) : 크기가 유한한 초기 상태와 주어진 상수 ϵ_T대해서, 모든 $k \ge k_0$ 에 대해서 $\|x(k)\|_2 \le \epsilon_T$ 를 만족하는 k_0가 존재한다.

$z(k)$를 양자화한 신호를 $\hat{z}(k)$ 라고 표기하고 양자화 오류 $q(k) = z(k) - \hat{z}(k)$ 로 정의할 때에 실용적 안정성을 위해서 필요로 하는 데이터율은 다음과 같이 결정된다.

정리-1. : $v(k) = 0, \forall k, \|q(0)\|_2 \le \psi, \|z(0)\|_2 \le L,$ 이면서, 상태 궤환 제어 이득이 K 와 $z(j)$ 의 양자화기가 모든 j에 대해서 다음 식(3)의 조건을 만족하면서 실용적 안정성을 달성하는 k가 존재하는 경우 필요로 하는 데이터율은 식(4)와 같이 주어진다.

$$\|q(k+1)\|_2 \le \|z(j+1) - WD\hat{z}(j)\|_2 \tag{3}$$

$$R \ge \frac{1}{k} log \frac{|\det(D)|^k L^n + \left(\psi \prod_{j=0}^{k-1} f_j\right)^n}{\epsilon_T^n} \tag{4}$$
$$f_j = \max|\lambda(D - W^j TBKT^{-1} W^{-j})|$$

식(4)에서 $\lambda()$는 괄호안의 행렬에 대한 고유값을 구하는 함수이며, max는 고유값 중에 최대 크기의 고유값을 구하는 연산이다.

증명 : $(W^k T)^{-1}\hat{z}(k)$를 $\hat{x}(k)$로 표기하면 $q(k)$는 다음과 같이 표현 가능하다.

$$q(k) = W^k T(x(k) - \hat{x}(k)) \tag{5}$$

$u(k) = K\hat{x}(k)$에 대해서 $e(k) = x(k) - \hat{x}(k)$의 정의로부터 다음의 관계가 유도된다.

$$x(k+1) = (A+BK)x(k) - BKe(k) \tag{6}$$

(6)을 다시 (2)를 이용하여 재정리하면 다음과 같다.

$$z(k+1) = WDz(k) - W^{k+1}TBT^{-1}W^{-k}q(k) \tag{7}$$

$z(k+1) - WD\hat{z}(k)$는 $(WD - W^{k+1}TBT^{-1}W^{-k})q(k)$로 정리되며, (3)의 조건에 위 결과를 삽입하여 정리하면 다음의 관계를 얻을 수 있다.

$$\|q(k+1)\| \le \prod_{j=0}^{k-1} f_j q(0) \tag{8}$$

k 시점에 $\hat{z}(k)$가 존재하는 공간의 부피 $V_{\hat{z}}(k)$ 는 $z(k)$의 공간의 부피와 $q(k)$신호 공간의 부피의 합보다 작다. 따라서 $V_{\hat{z}}(k)$는 다음과 같은 관계를 갖는다.

$$V_{\hat{z}}(k) \le |\det(A+BK)|^k G_n L^n + G_n\left(\psi \prod_{j=0}^{k-1} f_j\right)^n \equiv \widehat{V}_{\hat{z}}(k) \tag{9}$$

여기서 G_n는 n차원 공간에서 부피를 구할 때에 사용되는 상수이다. 또한, k시점에 요구되는 $\hat{z}(k)$의 크기의 최대값을 ϵ_T 라고 할 때에 이 신호를 포함하는 공간의 부피 크기는 $G_n\epsilon_T^n$ 이 된다. 정보이론의 데이터 전송율을 구하는 부피 채우기 방식에 따라서 계산되는 요구되는 데이터율은 다음과 같다.

$$R \ge \frac{1}{k} log \frac{\widehat{V}_{\hat{z}}(k)}{G_n \epsilon_T^n} \tag{10}$$

(9)를 (10)에 삽입하여 정리하면 최종적인 결과 (4)를 얻을 수 있다.

식(4)는 실용적 안정화를 달성하기 위해 필요로 하는 양자화된 데이터 양을 결정하는 요소들을 보여주고 있다. 요구되는 정보양은 A_C의 크기, 초기 상태가 존재하는 공간의 크기, 최대 초기 추정 오차, 요구되는 크기의 역수 및 $f_j, j \le k-1$에 비례한다. 또한, 요구되는 정보량을 결정하는 주요한 요소는 k를 파라미터로 갖는 $|\det(A_C)|^k$와 $\prod_{j=0}^{k-1} f_j$이 k가 커짐에 따라서, 점근적인 데이터율을 결정하게 된다. 양자화 잡음을 고려하지 않고 안정성을 달성하도록 설계된 제어이득에 대해서 $\prod_{j=0}^{k-1} f_j > 1$이면 점근적으로 이 요소에 의해서 요구되는 데이터율이 결정되는 것을 확인 가능하다. 따라서, 시스템의 안정성을 달성하면서 필요로 하는 데이터 양을 최소화 하기 위해서는 A_C의 고유값 크기의 최대값을 1보다 작게 하면서 부등식(4)의 오른쪽 부분을 최소화하도록 하는 새로운 방식의 제어기 설계에 대한 추가적인 연구가 요청된다.

정리-1에서는 프로세스 잡음이 없는 이상적인 경우에 양자화에 따라서 필요로 하는 데이터율을 계산하였다. 유사한 방식으로 프로세스 잡음의 최대 크기가 유한할 때에 요구되는 데이터율은 다음과 같이 정리될 수 있다.

정리-2. $\|v(k)\|_2 \le \zeta, \forall k, \|q(0)\|_2 \le \psi, \|z(0)\|_2 \le L$, 이면서, 상태 궤환 제어 이득이 K와 $z(j)$의 양자화기가 모든 j에 대해서 식(3)의 조건을 만족하면서 실용적 안정성을 달성하는 k가 존재하는 경우 필요로 하는 데이터율은 식(11)과 같이 주어진다.

$$R \ge \frac{1}{k} log \frac{|\det(D)|^k L^n + \left(\psi \prod_{j=0}^{k-1} f_j\right)^n + \sigma_v}{\epsilon_T^n} \tag{11}$$

$$\sigma_v = \left(\zeta \sum_{j=0}^{k-1} \max|\lambda(T)| \prod_{i=j}^{k-2} f_i\right)^n$$

증명 : $v(k) \ne 0$일 때에 $q(k)$의 크기의 상한치는 다음과 같이 표현 가능하다.

$$\|q(k)\|_2 \le \prod_{j=0}^{k-1} f_j \|q(0)\|_2 + \sum_{j=0}^{k-1}\prod_{i=j}^{k-2} f_i \|W^{j+1}Tv(j)\|_2 \tag{12}$$

정리-1의 증명과정과 (12)결과를 이용하여 (11)의 식이 쉽게 유도된다.

정리-2와 정리-1의 비교를 통해서 프로세스 잡음에 의한 성분은 (11)의 분모에 위치한 마지막 성분이 추가적으로 발생함을 알 수 있다. 또한, 잡음의 최대 크기가 커질수록 요구되는 데이터율이 증가함을 확인할 수 있다. 정리-2의 결과는 k 가 무한대로 증가하는 점근적인 경우에 대해서 다음과 같이 간략한 형태로 정리된다.

정리-3. 정리-2에서 동일한 조건에서 k 가 무한대로 증가하는 경우 식(11)은 (14)와 같다.

$$g(\psi,\zeta,\nu) = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} log \frac{\psi^n \nu^{kn} + \left(\zeta \max|\lambda(T)| \frac{\nu^{k-1} - \nu^{-1}}{1 - v^{-1}}\right)^n}{\epsilon_T^n} \tag{13}$$

$$R \ge \max(\log|\det(D)|, g(\psi,\zeta,\nu)) \tag{14}$$

여기서, $\nu = \max|\lambda(D - TBKT^{-1})|$이다.

증명 : 식(4)에서 f_j를 구할 때에 고유값을 구하는 행렬의 좌변과 우변에 W^{-j}와 W^j를 곱하더라도 unitary 행렬을 곱해주었기 때문에 동일한 고유값을 갖는다. 따라서 $f_j = \nu$. 이 결과를 (11)에 넣고 정리하면 (11)에서 로그함수 안의 두 번째와 세 번째 성분은 (13)과 같이 정리된다. 식(11)의 크기는 두 지수 성

분 $\det(D)$와 ν에 의해서 결정되고, 이에 따라서 (14)식이 유도된다.

정리-3에서는 점근적 실용적 안정성을 결정하는 중요한 요인이 $\lambda(D-TBKT^{-1})$이고 양자화의 데이터율을 줄이기 위해서는 이를 추가적으로 고려한 제어기의 설계가 필요함을 확인할 수 있다. 또한, 정리-1과 정리-2는 상태 정보를 선형 변환한 $z(k)$에 대해서 양자화를 실시한다는 전제하에 필요로 하는 데이터율에 대한 조건이 유도되었다. 제어 이득이 고정되었을 때에 (4)와 (11)의 하한치에 영향을 줄 수 있는 는 양자화 오류의 최대값이기 때문에 이를 최소화하는 양자화기는 균일 양자화기이다. 기존 연구에서 로그형 양자화기가 최적임이 증명되었으나 그 경우는 점근적 성능을 만족하는 경우이고[5], 본 연구에서는 필요로 하는 데이터율의 하한치를 최적화하는 관점에서 균일 양자화기가 최적이기 때문에 실제 데이터율을 최적화는 보장되지 않는다.

Ⅲ. 모의실험

유도된 수식의 정확성과 잡음과 양자화 오류에 의한 실용적 안정성을 확인하기 위해서 상태 정보의 양자화에 가장 많이 사용되는 균일 양자화기와 로그형 양자화기를 사용하여 양자화 레벨 수에 따른 수렴 특성을 살펴보았다. 이를 위해 임의의 시스템 행렬을 다음과 같이 발생 시켜서 고정하였다.

$$A=\begin{bmatrix}0.538 & -2.259\\ 1.834 & 0.682\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}0.319 & -0.434\\ -1.308 & 0.343\end{bmatrix}$$

이를 안정화 시키는 상태 궤환 제어 이득은 선형 행렬 부등식을 이용하면 $K=\begin{bmatrix}1.752 & -0.750\\ 1.882 & -5.634\end{bmatrix}$이다. 주어진 궤환 제어 이득으로생성되는 궤환 시스템 행렬이 갖는 최대 고유값의 크기는 0.252로서 시스템의 안정성이 확인된다.

실험을 위해서 상태의 초기 벡터는 [1 -1]'을 사용하였고, 양자화 구간의 최대값과 최소값의 크기는 10과 -10으로 설정하였으며, 지수형 양자화기에서는 주어진 행렬에 대해서 최적으로 계산되는 지수 값 0.643을 사용하였다. 1000번의 이산 시간 동안 상태의 변화를 관찰한 결과 수렴을 하는 경우 매우 빠르게 수렴하는 것을 관찰하였으며 그에 따라서 뒤의 500번 이산 시간에 대한 상태 벡터 크기 제곱평균을 계산하여 레벨 수에 따른 상태 제곱 값의 평균값을 도시하였다. 또한, (11)의 부등식에서 오른쪽 편에 위치한 값을 계산하기 위해서 초기 벡터의 최대크기 L은 $\sqrt{2}$로 설정하고, 초기 양자화 오류의 최대 허용치 ψ를 1로 설정하였다. A, B, K로부터 계산된 ν와 $\max|\lambda(T)|$는 각각 1.153과 1.123이었다.

그림-1에서는 ζ를 0, 0.25, 1로 설정했을 때에 상태 벡터의 수렴 특성을 보여주고 있다. ζ가 0이 아닐때에는 점근적 수렴 특성을 보이지 않지만, 두 양자화기 모두 실용적 안정성을 달성함

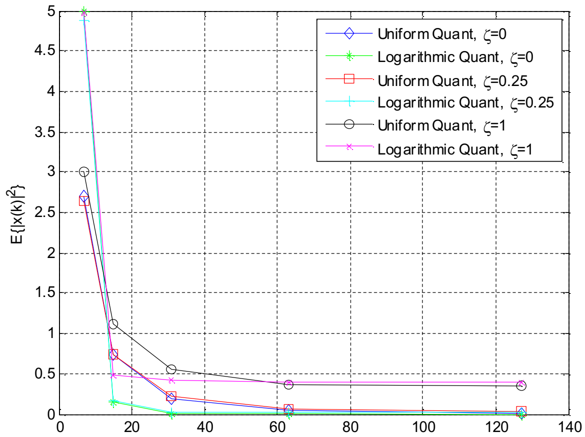

그림 1. 레벨 수에 따른 균일 양자화기와 로그형 양자화기의 수렴 특성

Fig. 1. Convergence characteristics of uniform and logarithm quantizers depending on the number of levels

을 확인할 수 있다. ζ가 0.25일 때에는 0.1보다 작은 크기내에서 상태벡터가 수렴하고 ζ가 1일 때에는 0.5보작 작은 크기내에서 수렴하는 특성을 보이고 있다. 이 결과와의 비교를 위해서 식 (11)에서 (ζ,ϵ)를 각각 (0.25, 0.1), (1,0.5)로 설정하여 최소 데이터율을 구하면 0.239와 0.238의 값을 갖는다. 정보이론은 매우 긴 시퀀스를 이용하여 부호화를 했을 때의 성능이기 때문에 균일 양자화기와 로그형 양자화기 모두 이론적은 최소값과는 다소 차이가 존재함을 확인할 수 있다. 또한, 모든 경우에 레벨 수가 적을 때에는 균일 양자화기의 성능이 우수하지만, 잡음이 없거나 최대치가 작은 경우에는 로그형 양자화기의 특성이 우수하다. 레벨수가 적을 때에 신호가 존재하는 곳에서 로그형 양자화기에 의차 최대 오류가 크기 때문에 발생하는 현상이다. 또한 잡음이 큰 경우도 마찬가지로 최대 양자화 오류가 균일 양자화기의 오류 크기에 비해서 크게 발생하기 때문에 상태의 크기가 크게 발생하는 것을 확인할 수 있다. 또한 이 실험 결과는 프로세스 잡음이 존재하는 경우에도 적절한 제어기 설계와 양자화 레벨을 충분히 허락할 때에 실용적 안정성을 달성할 수 있음을 보이고 있다.

Ⅳ. 결 론

본 논문에서는 유한 시간 제어를 수행할 때에 실용적 안정성을 달성하기 위해 필요로 하는 양자화 데이터율에 대한 조건을 제시하였다. 프로세스 잡음이 없을 때에는 요구되는 데이터율은 궤환 시스템 행렬의 고유값, 초기 조건에서의 최대 크기, 제어 이득, 초기 양자화 오류의 최대 크기 등에 의해서 데이터율이 결정되고, 프로세스 잡음이 있는 경우에는 추가적으로 최대 프로세스 잡음의 크기 및 궤환 시스템 행렬의 고유 벡터로 만들어지는 행렬의 고유값에 의해서 추가적으로 필요로 하는 데이

터율이 증가함을 하한치 분석을 통해서 확인할 수 있었다.

본 연구는 양자화에 대한 기초 연구로서 다음과 같은 한계와 추가적인 후속 연구를 필요로 한다. 먼저, 필요로 하는 데이터율은 정보 이론 기반으로 계산되었기 때문에 계산된 하한치가 기존의 양자화기를 사용했을 때의 안정성을 보장하지 않는다. 따라서, 정보이론 관점에서의 제어시스템의 안정성을 고려한 양자화기 설계가 요구된다. 또한, 본 연구는 상태 궤환 정보 기반의 제어기 설계를 기본으로 프로세스 잡음을 고려했지만, 많은 시스템의 경우 상태 정보에 대한 접근이 어렵기 때문에 출력 궤환 제어기를 사용하고 이 경우에 측정 잡음을 고려한 정보 이론 관점에서의 실용적 안정성을 보장하는 데이터율과 제어기 설계에 대한 추가적인 연구가 요청된다.

Acknowledgement

이 논문은 2018년도 정부(미래창조과학부)의 재원으로 한국연구재단의 지원을 받아 수행된 기초연구사업임(과제번호:NRF-2017R1A2B4007398)

References

[1] C, Lee and D. Kim, “A study of actuator continuous control in IoT platform,” in *Proceeding of KICS Summer Conference, 2017*, Jeju: Korea, pp. 1510-1511, June 2017.

[2] E. A. Lee, “Cyber physical systems: desisgn challenges,” in *Proceeding of 11th IEEE International Symposium on Object Oriented Real-time Distributed Computing*, Orlando: FL, pp. 363-369, 2008.

[3] A. Loquercio, A. I. Maqueda, C. R. del-Blanco, and D. Scaramuzza, “DroNet: learning to fly by driving,” *IEEE Robotics and Automation Letters*, Vol. 3, No. 2, pp. 1088 - 1095, Mar. 2018.

[4] S. Tatikonda, and S. Mitter, “Control under communication constraints,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 47, No. 7, pp. 1056-1068, July, 2004.

[5] N. Elia and S. Mitter, “Stabilization of linear systems with limited information,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 46, No. 9, pp. 1384-1400, Sep. 2001.

[6] M. Fu, “Lack of separation principle for quantized linear quadratic gaussian control,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 57, No. 9, pp. 2385-2390, Sept. 2012.

[7] L. Wei, M. Fu, and H. Zhang, “Quantized output feedback control with multiplicative measurement noises,” *International Journal of Robust Nonlinear Control*, Vol. 25, No. 9, pp. 1338-1351, 2015.

양 장 훈 (Janghoon Yang)
2006년 8월 : University of Southern California, Department of Electrical Engineering (공학박사)
2010년3월 ~ 현재 : 서울미디어대학원대학교 뉴미디어학부 부교수
※관심분야 : 제어, 통신, 감성, 콘텐츠

.