The Journal of The Institute of Internet, Broadcasting and Communication (IIBC)
Vol. 18, No. 3, pp.201-207, Jun. 30, 2018. pISSN 2289-0238, eISSN 2289-0246

https://doi.org/10.7236/JIIBC.2018.18.3.201
JIIBC 2018-3-26

랜덤형 2차원 할당문제의 최소 거리-최대 물동량 배정 알고리즘

The Min-Distance Max-Quantity Assignment Algorithm for Random Type Quadratic Assignment Problem

이상운*

Sang-Un, Lee*

요 약 2차원 할당 문제는 다항시간 알고리즘이 알려지지 않은 NP-완전 문제이다. 본 논문은 위치간 거리가 일정하지 않은 랜덤형 2차원 할당 문제의 최적 해를 $O(n^2)$ 수행 복잡도로 찾을 수 있는 알고리즘을 제안하였다. 제안된 알고리즘은 단순히 거리 합을 오름차순으로, 물동량 합을 내림차순으로 정렬하여 1:1 매치시킨 최소 거리 위치에 최대 물동량 시설을 배정하는 전략을 수행하고, 위치별 거리와 시설별 물동량 상관관계를 최적으로 반영하기 위해 시설들을 교환하는 전략을 적용하였다. 실험 데이터에 적용한 결과, 제안 알고리즘은 $O(n^2)$의 다항시간 알고리즘임에도 불구하고 메타휴리스틱 방법의 일종인 유전자 알고리즘의 해를 개선할 수 있었다.

Abstract There is no known polynomial time algorithm for random-type quadratic assignment problem(RQAP) that is a NP-complete problem. Therefore the heuristic or meta-heuristic approach are solve the approximated solution for the RQAP within polynomial time. This paper suggests polynomial time algorithm for random type quadratic assignment problem (QAP) with time complexity of $O(n^2)$. The proposed algorithm applies one-to-one matching strategy between ascending order of sum of distance for each location and descending order of sum of quantity for each facility. Then, swap the facilities for reflect the correlation of distances of locations and quantities of facilities. For the experimental data, this algorithm, in spite of $O(n^2)$ polynomial time algorithm, can be improve the solution than genetic algorithm a kind of metaheuristic method.

Key Words : Linear assignment problem, Quadratic assignment problem, Random type, Max-flow/min-distance, Concentration

Ⅰ. 서 론

2차원 할당문제(quadratic assignment problem, QAP)는 n개 위치(locations, $l_i, i=1,2,\cdots,n$)에 n개 시설(facilities, $f_j, j=1,2,\cdots,n$)을 배치하는 문제로, 위치 간 $n\times n$ 거리 행렬 L과 시설 간 $n\times n$ 물동량 행렬 F에 대해 운송비용을 최소화하도록 f_j를 l_i에 1:1로 배정하는 문제이다[1].

*정회원, 강릉원주대학교 과학기술대학 멀티미디어공학과
접수일자 : 2018년 4월 1일, 수정완료 : 2018년 5월 1일
게재확정일자 : 2018년 6월 8일

Received: 1 April, 2018 / Revised: 1 May, 2018 / Accepted: 8 June, 2018
*Corresponding Author: sulee@gwnu.ac.kr
Dept. of Multimedia Eng., Gangneung-Wonju National University, Korea

QAP는 1957년에 Koopmans와 Beckman이 건물 배정 문제(facility location problem)를 모형화하기 위해 처음 제기한 이래[2], 근사 해를 얻는 구성 알고리즘, 제한된 나열 방법, 분기한정 법, 유전자 알고리즘 등이 제안되고 있으며, 대부분은 메타 휴리스틱 방법의 일종인 유전자 알고리즘을 적용하고 있는 실정이다[3-4].

일반적인 할당문제(assignment problem, AP)는 1차원 할당 문제로 i행과 j열의 1차원의 양측-최적화만을 수행해야 하지만, QAP는 2개의 행렬에 대해 4차원의 4측-최적화를 수행해야 하는 극도로 어려운 문제로 현재까지 다항시간으로 풀 수 있는 알고리즘이 알려져 있지 않아 NP-완전(NP-complete) 문제로 분류되고 있다[1]. 일반적으로, QAP는 $n!$개의 가능한 할당 경우수가 존재한다.

AP의 해를 다항시간으로 풀 수 있는 방법으로 Lee[5-6]는 역-삭제와 이중경로 경쟁방식 알고리즘을 제안하였다.

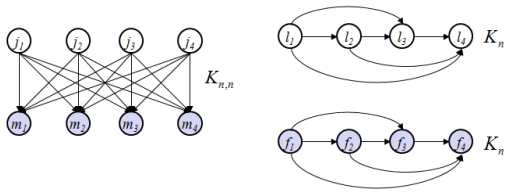
QAP의 대표적인 사례로 병원 시설 배정문제(hospital layout problem)와 전자회로 배선문제(steinberg wiring problem)가 있다[7-8]. 병원 시설 배정문제는 시설(진료실) 간 거리가 일정하지 않은 랜덤형(random type)인 경우이고, 전자회로 배선문제는 위치간 거리가 일정한 그물형이나 사각형(mesh or rectangular type)이다. QAP를 다항시간으로 풀 수 있는 가능성을 보인 연구로는 Lee[9]의 그리드형 QAP(GQAP)와 Lee[10]의 RQAP에 대한 최대흐름-최소거리 방법이 있다. 이 방법들은 거리행렬을 오름차순으로, 흐름 행렬을 내림차순으로 하여 각각에 대한 역-점수화 하여 매칭시키는 방법이다.

본 논문은 랜덤형 QAP(RQAP)에 한정된 알고리즘을 제안한다. 2장에서는 QAP의 형태를 고찰하고, Lee[10]의 RQAP에 대한 최대흐름-최소거리 정렬 역-점수화 매칭 방법을 고찰한다. 3장에서는 Lee[10]의 역-점수화 매칭 알고리즘(reverse- score matching algorithm, RSMA)과는 다른 교환-최적화 기법으로 RQAP의 해를 $O(n^2)$의 다항시간으로 찾을 수 있는 알고리즘을 제안한다. 4장에서는 제안된 알고리즘을 RQAP 사례들에 적용하여 해를 찾는지 평가해 본다.

II. QAP 개념과 관련연구

할당 문제(AP)는 그림 1과 같이 1차원과 2차원으로 분류된다. 1차원 할당 문제는 $K_{n,n}$의 완전 이분 그래프로 형태로 작업이 기계에서 소요되는 단방향 시간에 대해 작업과 기계 측면의 양측-최적화를 수행하는 형태로 볼 수 있다. 반면에, 2차원 할당 문제(QAP)는 2개의 K_n 완전 그래프 형태를 취하는 복잡한 문제이다.

QAP는 시설 $i,j=1,2,\cdots,m$, 위치 $k,l=1,2,\cdots,n$에 대해 i 시설이 k위치에 위치할 때 $u_{ik}=1$, i에서 j로의 물동량을 b_{ij}, 위치간의 거리를 a_{kl}라 할 때, 식 (1)을 만족하도록 시설을 위치에 배정하는 문제이다[1].



(a) One-dimensional (b) Quadratic

그림 1. 할당문제 분류
Fig. 1. Class of assignment problems

$$z=\min\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}b_{ij}a_{kl}u_{ik}u_{jl} \quad (1)$$

such that. $\sum_{k=1}^{n}u_{ik}=1$ for $i=1,2,\cdots,m$

$\sum_{i=1}^{m}u_{ik}=1$ for $k=1,2,\cdots,n$

QAP의 최적 해를 찾는 다항시간 알고리즘이 알려져 있지는 않다. 다만, 휴리스틱 방법으로 최적 해라고 알려진 다양한 사례들이 QAPLIB[11]로 제시되어 있다.

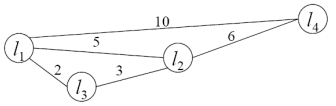
QAP의 위치별 거리는 블록간 거리가 1로 일정한 맨허튼 거리(manhattan distance)인 그물형과 일정하지 않은 유클리드 거리(euclidean distance)의 랜덤형이 있다. 그림 2는 그물형과 랜덤형의 사례를 보여주고 있다.

Location

d	l_1	l_2	l_3	l_4
l_1		5	10	2
l_2	5		6	3
l_3	10	6		4
l_4	2	3	4	

Facility

f	f_1	f_2	f_3	f_4
f_1		21	11	44
f_2	21		12	30
f_3	11	12		9
f_4	44	30	9	



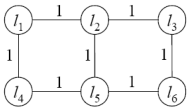
(a) Random type

Location

d	l_1	l_2	l_3	l_4	l_5	l_6
l_1		(1)	2	(1)	2	3
l_2	1		(1)	2	(1)	2
l_3	2	1		3	2	(1)
l_4	1	2	3		(1)	2
l_5	2	1	2	1		(1)
l_6	3	2	1	2	1	

Facility

f	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
f_1		5	2	4	1	0
f_2	5		3	0	2	2
f_3	2	3		0	0	0
f_4	4	0	0		5	2
f_5	1	2	0	5		10
f_6	0	2	0	2	10	



(b) Mesh type

그림 2. QAP 위치의 거리 형태
Fig. 2. Distance type of locations for QAP

Tsutsui와 Fujimoto[12]는 그림 2의 (a)인 $n=4$, 랜덤형 시설 배정 문제 FL-QAP(1)에 대해 유전자 알고리즘(genetic algorithm, GA)을 적용하여 그림 3과 같이 $(l_1,f_2),(l_2,f_1),(l_3,f_4),(l_4,f_3)$ 으로, 위치 순서대로 2-1-4-3의 시설을 할당하였으며, $z=1{,}524$를 제시하였다.

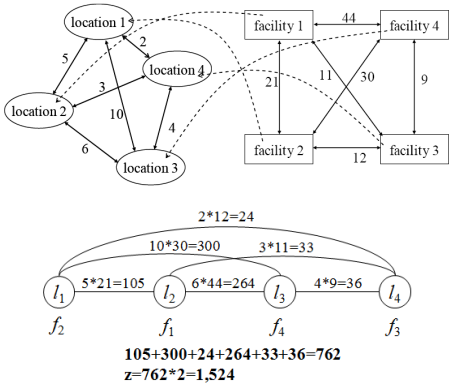


그림 3. FL-QAP(1)의 해
Fig. 3. Solution of FL-QAP(1)

QAP는 별개인 위치간 거리와 시설간 물동량의 2개 행렬에 대해 위치와 시설을 1:1로 최적화되도록 매칭시켜야 하는 어려운 문제로 다항시간 알고리즘이 알려지지 않고 있다[1]. 따라서 메타휴리스틱 방법의 일종인 유전자 알고리즘을 적용하고 있는 실정이다.

Lee[10]의 RSMA는 주어진 QAP의 거리행렬을 거리 오름차순으로, 흐름량 행렬의 용량을 내림차순으로 정렬한다. 두 번째로, 거리행렬의 $\{l_i,l_j\}$와 흐름량 행렬의 $\{f_k,f_l\}$가 일치하면 $(l_i,f_k),(l_j,f_l)$로 배정한다. 만약, 다르면 최적의 위치로 배정한다. 이는 정렬된 순서에 대한 역수의 값으로 순위 점수를 매긴 합을 이용하여 최대-최대 점수 쌍(시설-위치)으로 결정할 수도 있다.

FL-QAP(1)에 대해 Lee[11]의 RSMA를 적용하면 그림 4와 같이 $(l_1,f_1),(l_2,f_2),(l_3,f_3),(l_4,f_4)$로 4개 시설을 4개의 위치에 배정하여 비용 $z=1{,}002$를 얻는다.

$$l_1:6+3+1=10, l_2:5+3+2=10,$$
$$l_3:4+2+1=7, l_4:6+5+4=15$$

$$f_1:6+4+2=12, f_2:5+4+3=12,$$
$$f_3:3+2+1=7, f_4:6+5+1=12$$

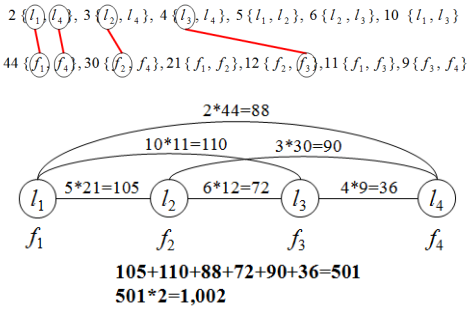


그림 4. FL-QAP(1)에 대한 역-순위 매칭
Fig. 4 Reverse-score matching for FL-QAP(1)

거리행렬을 거리 오름차순 정렬하면 $2\{l_1,l_4\},3\{l_2,l_4\},4\{l_3,l_4\},5\{l_1,l_2\},6\{l_2,l_3\},10\{l_1,l_3\}$이며, 흐름행렬을 용량 내림차순 정렬하면 $44\{f_1,f_4\},30\{f_2,f_4\},21\{f_1,f_2\},12\{f_2,f_3\},11\{f_1,f_3\},9\{f_3,f_4\}$이다. 정렬된 순서에 대해 이분그래프의 시설-위치 쌍이 최적이 되도록 1:1 매칭 결과 $l_1(f_1),l_2(f_2),l_3(f_3),l_4(f_4)$로 4개 시설을 각각의 위치에 설치할 수 있다.

그러나 Lee[10]의 RSMA는 최대흐름-최소거리 배정을 1:1로 정확히 매칭시키는 방법이 어려운 경우가 발생하기도 하여 특정 데이터에 대해서는 약간의 예외 규칙을 적용해야만 하는 경우도 발생한다. 따라서 3장에서는 항상 단일화된 규칙을 갖는 매칭 알고리즘을 제안한다.

Ⅲ. 최소 거리-최대 물동량 할당 알고리즘

위치간 거리가 일정하지 않은 RQAP의 주어진 위치 행렬 L의 K_n 거리 정보와 시설 행렬 F의 K_n 물동량 정보로는 어느 시설을 어느 위치에 배정되는 것이 최적인지에 대한 사전정보가 전무한 상태이다. 이와 같이, 사전

정보가 전혀 없는 상황에서 수송비용(=거리×물동량)이 최소가 되도록 n개 시설을 n개 위치에 1:1로 최적으로 배정해야만 한다.

단지, 우리는 주어진 위치 행렬 L의 각 위치별 타 위치들과의 거리 합과 시설 행렬 F의 각 시설별 타 시설들과의 물동량 합은 알 수 있다. 따라서 본 장에서는 이러한 거리 합과 물동량 합의 사전 정보를 활용하는 전략을 제안한다.

제안 알고리즘은 위치 행렬 L의 각 위치의 거리 합을 오름차순으로 정렬하고, 시설 행렬 F의 각 시설별 물동량 합을 내림차순으로 정렬하여 1:1로 매치시켜 초기 해를 구한다. 이와 같이 n개 값에 대한 정렬은 $O(n\log n)$의 복잡도가 요구된다. 이와 같은 방법으로 수행하면 중심에 위치한 장소에 최대 물동량 시설을, 가장 변두리 장소에 최소 물동량 시설을 배정시키는 집중화를 달성할 수 있다.

그러나 최소 위치-최대 물동량 배정 전략은 전체 시설을 배정한 경우의 시설들 간과 위치들 간의 복잡한 상관관계를 반영하지 못해 최적 해를 얻지 못할 수 도 있다. 이러한 문제점을 해결하고자, $k-opt\,(k=1,2,\cdots)$ 사이클의 시설 위치를 교환하는 최적화 전략을 수행하여 최적해를 얻는다.

제안된 알고리즘을 최소위치-최대 물동량 배정으로 초기 집중화를 수행하고 교환 최적화 기법으로 미세 조정하는 집중화 알고리즘(concentration algorithm, CA)이라 하며, 그림 5와 같이 수행된다.

CA가 Lee[10]의 RSMA와의 차이점은 Step 2로, RSMA는 거리와 흐름의 정렬된 순서 각각에 대해 역-점수화하여 1:1로 매칭시킴에 있어 유일한 규칙을 갖고 있지 않은데 반해, CA는 정렬된 순서를 1:1 매칭시킨 초기해에 대해 Step 2의 교환 최적화를 수행하는 유일한 규칙을 가진 방식이다.

그림 2의 FL-QAP(1)에 대해 CA를 적용하면 거리행렬은 4-2-1-3, 흐름 행렬은 4-1-2-3 순서가 된다. 여기서 거리행렬의 2-1을 1-2로 교환하면 그림 6과 같이 $(l_1,f_1),(l_2,f_2),(l_3,f_3),(l_4,f_4)$로 z=1,002가 된다. 결국, FL-QAP(1)에 대해 GA는 최적 해를 얻는데 실패하였지만 CA는 RSMA와 동일한 최적 해를 얻었음을 알 수 있다.

Step 1. **초기 해 /* 수행 복잡도 : $O(n\log n)$ */**
(1) 거리 정보 위치 행렬 L의 각 $l_i,(i=1,2,\cdots,n)$ 의 거리 합 $\sum_{j=1}^{n} l_{ij}$를 구하여 오름차순으로 정렬.
(2) 물동량 정보 시설 행렬 F의 각 $f_j,(j=1,2,\cdots,n)$ 의 물동량 합 $\sum_{i=1}^{n} f_{ij}$를 구하여 내림차순으로 정렬.
(3) l_i와 f_j를 1:1로 (l_i,f_j) 쌍을 형성.

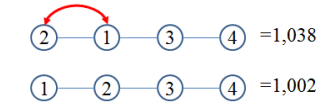
Step 2. **교환 최적화 /* 수행 복잡도 : $O(n^2)$ */**
z를 더 이상 감소시킬 수 없을 때까지 반복 수행.
(1) (l_i,f_j)와 $(l_{i'},f_{j'})$에 대해 $f_j \leftrightarrow f_{j'}$ 교환으로 z가 감소되면 $f_j \leftrightarrow f_{j'}$의 2-opt 사이클 교환 수행
(2) $(l_i,f_j),(l_{i'},f_{j'}),(l_{i''},f_{j''})$에 대해 $f_j \rightarrow f_{j'}, f_{j'} \rightarrow f_{j''}, f_{j''} \rightarrow f_j$ 교환시 z를 감소시키면 $f_j \rightarrow f_{j'}, f_{j'} \rightarrow f_{j''}, f_{j''} \rightarrow f_j$의 3-opt 사이클 교환 수행

그림 5. 집중화 알고리즘(CA)
Fig. 5. Concentration algorithm(CA)

L	l_1	l_2	l_3	l_4	Sum
l_1		5	10	2	17
l_2	5		6	3	14
l_3	10	6		4	20
l_4	2	3	4		9
Ascending order : l_4,l_2,l_1,l_3					

F	f_1	f_2	f_3	f_4	Sum
f_1		21	11	44	76
f_2	21		12	30	63
f_3	11	12		9	32
f_4	44	30	9		83
Descending order : f_4,f_1,f_2,f_3					

$(l_1,f_2),(l_2,f_1),(l_3,f_3),(l_4,f_4) : 2-1-3-4$



$z=\{(l_1,f_1),(l_2,f_2),(l_3,f_3),(l_4,f_4)\}=1,002$

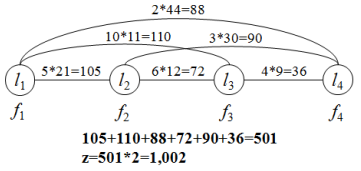


그림 6. CA를 이용한 FL-QAP(1) 최적 해
Fig. 6. The optimal solution of FL-QAP(1) using CA

그림 7의 $n=4$ FL-QAP(2)는 Jensen과 Bard[13]에서 인용되었다. Jensen과 Bard[13]은 엑셀을 이용해 $(l_1,f_1),(l_2,f_4),(l_3,f_3),(l_4,f_2)$로 z=6,520을 얻었다.

FL-QAP(2)에 대해 CA를 적용하면 그림 8과 같이 z=6,520으로 Jensen과 Bard[13]과 동일한 결과를 얻었다.

	Location					Facility			
d	l_1	l_2	l_3	l_4	f	f_1	f_2	f_3	f_4
l_1		80	150	170	f_1		5	2	7
l_2	80		130	100	f_2	5		3	8
l_3	150	130		120	f_3	2	3		3
l_4	170	100	120		f_4	7	8	3	

그림 7. $n=4$ FL-QAP(2)
Fig. 7. $n=4$ FL-QAP(2)

The Journal of The Institute of Internet, Broadcasting and Communication (IIBC)
Vol. 18, No. 3, pp.201-207, Jun. 30, 2018. pISSN 2289-0238, eISSN 2289-0246

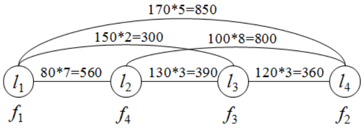
L	l_1	l_2	l_3	l_4	Sum
l_1		80	150	170	400
l_2	80		130	100	310
l_3	150	130		120	400
l_4	170	100	120		390
Ascending order : l_2, l_4, l_1, l_3					

F	f_1	f_2	f_3	f_4	Sum
f_1		5	2	7	14
f_2	5		3	8	16
f_3	2	3		3	8
f_4	7	8	3		18
Descending order : f_4, f_2, f_1, f_3					

$$(l_1, f_2), (l_2, f_4), (l_3, f_3), (l_4, f_2) : 1-4-3-2$$

(1) — (4) — (3) — (2) =6,520

$$z = \{(l_1, f_1), (l_2, f_4), (l_3, f_3), (l_4, f_2)\} = 6,520$$



560+300+850+390+800+360=3260
z=3260*2=6,520

그림 8. CA를 이용한 FL-QAP(2) 최적 해
Fig. 8. The optimal solution of FL-QAP(2) using CA

Ⅳ. 알고리즘 적용성 평가

본 장에서는 그림 9의 $n=9$ FL-QAP(3) 시설 배정 문제와 $n=19$ FL-QAP(4) 병원 배정 문제에 대해 제안된 CA의 적용성을 평가해 본다. 두 문제 모두 물동량 행렬이 완전 그래프가 아닌 희소행렬 그래프로 특정 시설들 간에만 물동량이 존재하는 특징이 있다.

	l_1	l_2	l_3	l_4	l_5	l_6	l_7	l_8	l_9	Sum
l_1	-	1	2	3	3	4	2	6	7	28
l_2	1	-	12	4	7	5	8	6	5	48
l_3	2	12	-	5	9	1	1	1	1	32
l_4	3	4	5	-	1	1	1	4	6	25
l_5	3	7	9	1	-	1	1	1	1	24
l_6	4	5	1	1	1	-	1	4	6	23
l_7	2	8	1	1	1	1	-	7	1	22
l_8	6	6	1	4	1	4	7	-	1	30
l_9	7	5	1	6	1	6	1	1	-	28

	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	Sum
f_1	-	100	3	0	6	35	190	14	12	360
f_2	100	-	6	8	109	78	1	1	104	407
f_3	3	6	-	0	0	17	100	1	31	158
f_4	0	8	0	-	100	1	247	178	1	535
f_5	6	109	0	100	-	1	10	1	79	306
f_6	35	78	17	1	1	-	0	1	0	133
f_7	190	1	100	247	10	0	-	0	0	548
f_8	14	1	1	178	1	1	0	-	12	208
f_9	12	104	31	1	79	0	0	12	-	239

(a) FL-QAP(3) of $n=9$ facility layout problem

	l_1	l_2	l_3	l_4	l_5	l_6	l_7	l_8	l_9	l_{10}	l_{11}	l_{12}	l_{13}	l_{14}	l_{15}	l_{16}	l_{17}	l_{18}	l_{19}	Sum
l_1	-	12	36	28	52	44	110	126	94	63	130	102	65	98	132	132	126	120	126	1,596
l_2	12	-	24	75	82	75	108	70	124	86	93	106	58	124	161	161	70	64	70	1,563
l_3	36	24	-	47	71	47	110	73	126	71	95	110	46	127	163	163	73	67	73	1,522
l_4	28	75	47	-	42	34	148	111	160	52	94	148	49	117	104	109	111	105	111	1,645
l_5	52	82	71	42	-	42	125	136	102	22	73	125	32	94	130	130	136	130	136	1,660
l_6	44	75	47	34	42	-	148	111	162	52	96	148	49	117	152	152	111	105	111	1,756
l_7	110	108	110	148	125	148	-	46	46	136	47	30	108	51	79	79	46	47	41	1,505
l_8	126	70	73	111	136	111	46	-	69	141	63	46	119	68	121	121	27	24	36	1,508
l_9	94	124	126	160	102	162	46	69	-	102	34	45	84	23	80	80	69	64	51	1,515
l_{10}	63	86	71	52	22	52	136	141	102	-	64	118	29	95	131	131	141	135	141	1,710
l_{11}	130	93	95	94	73	96	47	63	34	64	-	47	56	54	94	94	63	46	24	1,267
l_{12}	102	106	110	148	125	148	30	46	45	118	47	-	100	51	89	89	46	40	36	1,476
l_{13}	65	58	46	49	32	49	108	119	84	29	56	100	-	77	113	113	119	113	119	1,449
l_{14}	98	124	127	117	94	117	51	68	23	95	54	51	77	-	79	79	68	62	51	1,435
l_{15}	132	161	163	104	130	152	79	121	80	131	94	89	113	79	-	10	113	107	119	1,977
l_{16}	132	161	163	109	130	152	79	121	80	131	94	89	113	79	10	-	113	107	119	1,982
l_{17}	126	70	73	111	136	111	46	27	69	141	63	46	119	68	113	113	-	6	24	1,462
l_{18}	120	64	67	105	130	105	47	24	64	135	46	40	113	62	107	107	6	-	12	1,354
l_{19}	126	70	73	111	136	111	41	36	51	141	24	36	119	51	119	119	24	12	-	1,400

	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}	f_{16}	f_{17}	f_{18}	f_{19}	Sum
f_1	-	76687	0	415	545	819	135	1368	819	5630	0	3432	9082	1503	0	0	13732	1368	1783	117,318
f_2	76687	-	40951	4118	5767	2055	1917	2746	1097	5712	0	0	0	268	0	1373	268	0	0	142,959
f_3	0	40951	-	3848	2524	3213	2072	4225	566	0	0	404	9372	0	972	0	13538	1368	0	83,053
f_4	415	4118	3848	-	256	0	0	0	0	829	128	0	0	0	0	0	0	0	0	9,694
f_5	545	5767	2524	256	-	0	0	0	47	1655	287	0	42	0	0	0	226	0	0	11,349
f_6	819	2055	3213	0	0	-	0	0	0	926	161	0	0	0	0	0	0	0	0	7,174
f_7	135	1917	2072	0	0	0	-	0	196	1538	196	0	0	0	0	0	0	0	0	6,054
f_8	1368	2746	4225	0	0	0	0	-	0	0	301	0	0	0	0	0	0	0	0	8,640
f_9	819	1097	566	0	47	0	196	0	-	1954	418	0	0	0	0	0	0	0	0	5,097
f_{10}	5630	5712	0	829	1655	926	1538	0	1954	-	0	282	0	0	0	0	0	0	0	18,526
f_{11}	0	0	0	128	287	161	196	301	418	0	-	1686	0	0	0	0	226	0	0	3,403
f_{12}	3432	0	404	0	0	0	0	0	0	282	1686	-	0	0	0	0	0	0	0	5,804
f_{13}	9082	0	9372	0	42	0	0	0	0	0	0	0	-	0	0	0	0	0	0	18,496
f_{14}	1503	268	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-	0	0	0	0	0	1,771
f_{15}	0	0	972	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-	99999	0	0	0	100,971
f_{16}	0	1373	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	99999	-	0	0	0	101,372
f_{17}	13732	268	13538	0	226	0	0	0	0	0	226	0	0	0	0	0	-	0	0	27,990
f_{18}	1368	0	1368	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-	0	2,736
f_{19}	1783	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-	1,783

(b) FL-QAP(4) of $n=19$ Hospital layout problem

그림 9. 실험 데이터
Fig. 9. Experimental data

FL-QAP(3)과 FL-QAP(4)에 CA를 적용한 결과는 그림 10에 제시되어 있다.

Ascending order of $l : l_7, l_6, l_5, l_4, l_1, l_9, l_8, l_3, l_2$
Descending order of $f : f_7, f_4, f_2, f_1, f_5, f_9, f_8, f_3, f_6$
Initial solution : $(l_1, f_5), (l_2, f_6), (l_3, f_3), (l_4, f_1), (l_5, f_2), (l_6, f_4), (l_7, f_7), (l_8, f_8), (l_9, f_9)$:
$5-6-3-1-2-4-7-8-9 = 7,872$
Optimization : $1 \leftrightarrow 9 : 5-6-3-9-2-4-7-8-1 = 7,560$
$2 \leftrightarrow 8 : 5-6-3-9-8-4-7-2-1 = 7,518$
$9 \leftrightarrow 4 : 5-6-3-4-8-9-7-2-1 = 7,226$
$5 \rightarrow 3, 3 \rightarrow 4, 4 \rightarrow 5 : 4-6-5-3-8-9-7-2-1 = 6,420$
$6 \leftrightarrow 8 : 4-8-5-3-6-9-7-2-1 = 4,774$
Optimal solution : $z = \{(l_1, f_4), (l_2, f_8), (l_3, f_5), (l_4, f_3), (l_5, f_6), (l_6, f_9), (l_7, f_7), (l_8, f_2), (l_9, f_1)\} = 4,774$

(a) The optimal solution of FL-QAP(3)

Ascending order of $l : l_{11}, l_{18}, l_{19}, l_{14}, l_{13}, l_{17}, l_{12}, l_7, l_8, l_9, l_3, l_2, l_1, l_4, l_5, l_{10}, l_6, l_{15}, l_{16}$
Descending order of $f : f_2, f_1, f_{16}, f_{15}, f_3, f_{17}, f_{13}, f_{10}, f_5, f_4, f_8, f_6, f_7, f_{12}, f_9, f_{11}, f_{18}, f_{19}, f_{14}$
Initial solution : $7-6-8-12-9-18-10-5-4-11-2-13-3-15-19-14-17-1-16 = 38,459,388$
Optimization :
$3 \leftrightarrow 16 : 7-6-8-12-9-18-10-5-4-11-2-13-16-15-19-14-17-1-3 = 37,526,514$
$2 \leftrightarrow 17 : 7-6-8-12-9-18-10-5-4-11-17-13-16-15-19-14-2-1-3 = 32,423,908$
$2 \leftrightarrow 1 : 7-6-8-12-9-18-10-5-4-11-17-13-16-15-19-14-1-2-3 = 31,734,320$
$5 \leftrightarrow 13 : 7-6-8-12-9-18-10-13-4-11-17-5-16-15-19-14-1-2-3 = 31,734,320$
$8 \leftrightarrow 15 : 7-6-15-12-9-18-10-13-4-11-17-5-16-8-19-14-1-2-3 = 25,364,558$
$12 \leftrightarrow 18 : 7-6-15-18-9-12-10-13-4-11-17-5-16-8-19-14-1-2-3 = 25,364,558$
$9 \leftrightarrow 14 : 7-6-15-18-14-12-10-13-4-11-17-5-16-8-19-9-1-2-3 = 25,277,976$
$7 \leftrightarrow 9 : 9-6-15-18-14-12-10-13-4-11-17-5-16-8-19-7-1-2-3 = 25,250,178$
$13 \leftrightarrow 17 : 9-6-15-18-14-12-10-17-4-11-13-5-16-8-19-7-1-2-3 = 25,038,006$
$15 \leftrightarrow 7, 12 \rightarrow 16, 16 \rightarrow 19, 19 \rightarrow 12 : 9-6-7-18-14-19-10-4-11-13-5-12-8-15-16-17-1-2-3 = 17,544,574$
$6 \leftrightarrow 10 : 9-10-7-18-14-19-6-17-4-11-13-5-12-8-15-16-1-2-3 = 17,434,750$
$6 \leftrightarrow 4 : 9-10-7-18-14-19-4-17-6-11-13-5-12-8-15-16-1-2-3 = 17,363,672$
$4 \leftrightarrow 13 : 9-10-7-18-14-19-13-17-6-11-4-5-12-8-15-16-1-2-3 = 17,212,548$
Optimal solution : $z = \left\{ \begin{matrix} (l_1, f_9), (l_2, f_{10}), (l_3, f_7), (l_4, f_{18}), (l_5, f_{14}), (l_6, f_{19}), (l_7, f_{13}), (l_8, f_{17}), (l_9, f_6), (l_{10}, f_{11}), \\ (l_{11}, f_4), (l_{12}, f_5), (l_{13}, f_{12}), (l_{14}, f_8), (l_{15}, f_{15}), (l_{16}, f_{16}), (l_{17}, f_1), (l_{18}, f_2), (l_{19}, f_3) \end{matrix} \right\} = 17,212,548$

(b) The optimal solution of FL-QAP(4)

그림 10. 실험 데이터에 대한 CA
Fig. 10. CA for experimental data

FL-QAP(3)은 4-8-5-3-6 -9-7-2-1의 시설 배정으로 z=4,774를 얻었다. 이 결과는 유전자 알고리즘으로 얻은 해 z=4,818을 개선하였음을 알 수 있다.

FL-QAP(4)에 대해 CA는 기존에 알려진 해 9-10-7-18-14-19-13-17-6-11-4-5-12-8-15-16-1-2-3의 z= 17,212,548과 동일한 결과를 얻었다.

본 논문에서 거론된 4개 데이터에 대해 기존에 알려진 최적해와 CA를 비교한 결과는 표 1에 제시되어 있다. 제안된 CA는 단지 2와 3-opt만을 수행하는 $O(n^2)$의 수행 복잡도를 갖는 다항시간 알고리즘임에도 불구하고, 4개의 실험 데이터 모두에서 메타휴리스틱 방법의 일종인 유전자 알고리즘에 비해 최적 해를 찾았음을 알 수 있다.

표 1. 알고리즘 성능 비교
Table 1. Compare of algorithm performance

문제	n	알려진 최적 해	RSMA [10]	CA	
				z	최적화
FL-QAP(1)	4	1,524	1,002	1,002	2-opt (1회)
FL-QAP(2)	4	6,520	6,520	6,520	-
FL-QAP(3)	9	4,818	4,774	4,774	2-opt (4회) 3-opt (1회)
FL-QAP(4)	19	17,212,548	17,212,548	17,212,548	2-opt (13회) 3-opt (1회)

V. 결 론

본 논문은 지금까지 다항시간으로 해를 구하는 알고리즘이 알려져 있지 않은 RQAP에 대해 $O(n^2)$의 다항시간 알고리즘을 제안하였다.

RQMA에 대해 $O(n^2)$의 다항시간으로 해를 구하는 Lee[10]의 RSMA는 거리와 물동량을 1:1로 매칭시키는 유일한 규칙을 갖고 있지 않아 최적의 매칭을 시키지 못할 수도 있는 단점을 갖고 있었다. 이러한 문제점을 해결하기 위해 본 논문에서는 RSMA와 동일하게 최소 거리(거리 오름차순 정렬)-최대 물동량(물동량 내림차순 정렬) 순서에 대해 초기 실현 가능 해로 1:1로 매칭시키는 과정을 동일하게 수행하였다. 본 논문에서 제안된 알고리즘과 RSMA의 차별성은 본 논문에서는 초기 실현 가능 해에 대해 비용을 감소시킬 수 있는 시설을 상호 교환하는 규칙을 적용하여 항상 동일한 최적 해의 결과를 얻을 수 있는 방법을 제안하였다는 점이다.

제안된 알고리즘은 수행 복잡도가 $O(n^2)$인 다항시간 알고리즘임에도 불구하고, FL-QAP(1)과 FL- QAP(3)에 대해서는 메타휴리스틱 방법의 일종인 유전자 알고리즘의 해를 개선하는 효과를 얻었다. 또한 RSMA와 동일한 결과를 얻었지만 RSMA의 최적의 매칭 어려움을 해결할 수 있는 단일화된 규칙을 제시하였다.

결국, 본 논문은 NP-완전인 RQAP에 대해 RSMA에 비해 보다 다항시간 알고리즘 존재 가능성을 높일 수 있는 알고리즘이 존재함을 보였다.

References

[1] E. M. Loiola, N. M. M. Abreu, P. O. Boaventura-Netto, P. Hahn, and T. Querido, "A Survey for the Quadratic Assignment Problem," European Journal of Operational Research, Vol. 176, No. 2, pp. 657-690, Jan. 2007. doi:10.1016/j.ejor.2005.09.032

[2] P. Ji, Y. Wu, and H. Liu, "A Solution Method for the Quadratic Assignment Problem (QAP)," The 6th International Symposium on Operations Research and Its Applications (ISORA), Xinjiang, China, pp. 106-117, 2006.

[3] M. Solimanpur and A. Jafari, "Optimal Solution for the Two-dimensional Facility Layout Problem using a Branch-and-bound Algorithm," Journal of Computers and Industrial Engineering, Vol. 55, No. 3, pp. 606-619, Oct. 2008. doi:10.1016/j.cie.008.01.018

[4] I. Mihajlovic, Z. Zivkovic, N. Strbac, D. Zivkovic, and A. Jovanovic, "Using Genetic Algorithms to Resolve Facility Layout Problem," Serbian Journal of Management, Vol. 2, No. 1, pp. 35-46, Jan. 2007.

[5] S. U. Lee, "A Reverse-Delete Algorithm for Assignment Problems," Journal of KIIT, Vol. 10, No. 8, pp. 117-126, Aug. 2012. uci:G704-001947.2012.10.8.007

[6] S. U. Lee, "Assignment Problem Algorithm Using Dual-path Competition Method," Journal of KIIT, Vol. 13, No. 12, pp. 75-83, Dec. 2015. doi:10.4801/jkiit.2015.13.12.75

[7] L. Steinberg, "The Backboard Wiring Problem: A Placement Algorithm," SIAM Review, Vol. 3, pp. 37-50, Jan. 1961. doi:10.1137/1003003

[8] A. N. Elshafei, "Hospital Layout as a Quadratic Assignment Problem," Operations Research Quarterly, Vol. 28, No. 1, pp. 167-179, Mar. 1977.

[9] S. U. Lee, "The Grid Type Quadratic Assignment Problem Algorithm," Journal of KSCI, Vol. 19, No. 4, pp. 91-99, Apr. 2014. doi:/10.9708/jksci.2014.19.4.091

[10] S. U. Lee, "The Random Type Quadratic Assignment Problem Algorithm," Journal of KSCI, Vol. 21, No. 4, pp. 81-88, Apr. 2016. doi:10.9708/jksci.2016.21.4.081

[11] R. E. Burkard, S. E. Karisch, and F. Rendl, "QAPLIB-A Quadratic Assignment Problem Library," Journal of Global Optimization, Vol. 10, No. 4, pp. 391-403, Jun. 1997. doi:10.1023/A:1008293323270

[12] S. Tsutsui and N. Fujimoto, "Solving Quadratic Assignment Problems by Genetic Algorithms with GPU Computation: a Case Study," Proceedings of the 11th Annual Conference Companion on Genetic

and Evolutionary Computation Conference, pp. 2523-2530, Jul. 2009. doi:10.1145/1570256. 1570355

[13] P. A. Jensen and J. F. Bard, "Operations Research Models and Methods, Section 7.4 Facility Location Problem," John Wiley and Sons. 2003. ISBN:0-471-38004-0

[14] K. C. Chan and H. Tansri, "A Study of Genetic Crossover Operations on the Facilities Layout Problem," Computers and Industrial Engineering, Vol. 26, No. 3, pp. 537-550, Jul. 1994. doi: 10.1016/0360-8352(94)90049-3

[15] K. L. Mak, Y. S. Wong, and F. T. S. Chan, "A Genetic Algorithm for Facility Layout Problems," Computer Integrated Manufacturing Systems, Vol. 11, No. 1-2, pp. 113-127, Sep. 1998. doi:10. 1016/S0951-5240(98)00018-4

[16] M. A. El-Baz, "A Genetic Algorithm for Facility Layout Problems of Different Manufacturing Environments," Computers & Industrial Engineering, Vol. 47, No. 2-3, pp. 233-246, Nov. 2004. doi:10.1016/j.cie.2004.07.001

[17] S. Jannat, A. A. Khaled, and S. K. Paul, "Optimal Solution for Multi-Objective Facility Layout Problem Using Genetic Algorithm," International Conference on Industrial Engineering and Operations Management, Dhaka, Bangladesh, Jan. 2010.

[18] M. G. Misola and B. B. Navarro, "Optimal Facility Layout Problem Solution Using Genetic Algorithm," World Academy of Science, Engineering and Technology, Vol. 7, No. 8, pp. 545-550, Aug. 2013. doi:scholar.waset.org/ 1307 -6892/16153

저자 소개

이 상 운(정회원)

- 1987년 : 한국항공대학교 항공전자공학과 (학사)
- 1997년 : 경상대학교 컴퓨터과학과 (석사)
- 2001년 : 경상대학교 컴퓨터과학과 (박사)
- 2003년 : 강원도립대학 컴퓨터응용과 전임강사
- 2004년 ~ 2007년 2월 : 국립 원주대학 여성교양과 조교수
- 2007년 3월 ~ 현재 : 강릉원주대학교 멀티미디어공학과 정교수
- 관심분야 : 소프트웨어 프로젝트 관리, 개발 방법론, 분석과 설계 방법론, 시험 및 품질보증, 소프트웨어 신뢰성, 최적화 알고리즘
- E-Mail : sulee@gwnu.ac.kr