

論文

J. of The Korean Society for Aeronautical and Space Sciences 46(3), 210-218(2018)

DOI:https://doi.org/10.5139/JKSAS.2018.46.3.210

ISSN 1225-1348(print), 2287-6871(online)

무요소법의 수치적 안정성 개선을 위한 적분기법 연구

강재원*, 강다훈*, 조진연*, 김정호**

A Study on Integraion Method for Improvement of Numerical Stability of Meshfree Method

JaeWon Kang*, Da Hoon Kang*, Jin Yeon Cho* and Jeong Ho Kim**

Department of Aerospace Engineering, Inha University***

ABSTRACT

In order to generate meshes automatically for finite element analysis of complex structures such as aircraft, a large number of triangular elements are typically created. However, triangular elements are less accurate than rectangular elements, so it is difficult to obtain a reliable solution. This problem can be improved through the meshfree method using the back cell integration. However, this method also causes some problems such as over-use of the integration points and inefficiency of the integral domain. In order to improve these problems, a method of performing integration by setting the integral area based on a node basis has been proposed, but in the case of incompressible material problems, the numerical accuracy deteriorates due to the vibration phenomenon of the solution. Therefore, in this paper, the modified meshfree method is proposed which sets the integral domain as an element domain instead of the nodal domain, and the proposed method improves the numerical instability caused by the conventional meshfree method without decreasing the accuracy regardless of the shape of integral domain. The effectiveness of the modified meshfree method is verified by using 2-D examples.

초 록

항공기와 같은 복잡한 구조물의 유한요소해석을 위해 자동요소망을 생성하면 일반적으로 삼각형 요소가 많이 생성되게 된다. 하지만 삼각형 요소는 사각형 요소에 비해 정확도가 떨어지므로 신뢰성 있는 해를 도출하기 어렵다. 이와 같은 문제는 배경셀 적분을 이용한 무요소법(Meshfree Method)을 통해 개선할 수 있으나 이 또한 적분점의 과다사용, 적분영역의 비효율성 등의 문제가 발생하게 된다. 이를 개선하기 위해 절점 기준으로 적분영역을 설정하여 적분을 수행하는 방법이 제안되었지만 비압축성 문제의 경우 해의 진동현상이 일어나는 등 수치 정확도가 떨어지게 된다. 따라서 본 연구에서는 적분영역을 절점영역이 아닌 요소영역으로 설정하는 수정된 무요소법을 통해 요소의 형태에 따른 정확도 저하가 발생되지 않고 기존의 무요소법에서 발생하는 수치 불안정성 등을 개선하였다. 2차원 예제를 통해 수정된 무요소법의 효용성을 검증하였다.

† Received : December 29, 2017

Accepted : February 5, 2018

** Corresponding author, E-mail : JeongHoKim@inha.ac.kr

Key Words : Meshfree Method(무요소법), Moving Least Squares Method(이동최소자승법), Stabilized Conforming Nodal Integration(SCNI), Locking(잠김현상)

1. 서 론

구조해석이 행해지는 항공기를 비롯한 자동차, 건축물 등에서 유한요소법은 필수적으로 사용이 된다. 이런 유한요소법을 통해 형상을 해석할 시 자동요소망 생성을 통해 요소를 생성하게 된다. 형상이 복잡할 경우 필수적으로 삼각형 형태의 요소가 많이 생성되는데 삼각형 요소의 경우 사각형 형태의 요소의 비해 낮은 정확도를 나타내어 정확한 해의 도출이 어렵게 된다. 또한 형상의 재료가 비압축성에 가까울 경우 체적 잠김 현상이 생겨 수치 불안정성이 커지게 된다. 이와 같은 유한요소법을 이용한 해석에서 발생하는 수치불안정성을 해소하기 위해 Belytschko[1] 등이 배경셀(back cell)을 기반으로 적분을 하는 EFGM(Element-Free Galerkin Method) 기법을 제안하였다. 하지만 EFGM의 경우 비효율적인 적분영역 분포, 과도한 적분점 사용 등의 문제가 발생된다. 이런 문제를 개선하기 위해 Chen[2] 등이 제안한 SCNI(Stabilized Conforming Nodal Integration) 기법을 통해 절점영역을 기반으로 하여 비효율성을 개선하였다. 하지만 비압축성의 가까운 재료를 해석할 때 SCNI 기법을 경우 해의 진동 현상이 일어나 해석 정확도가 떨어지게 된다. 이를 해결하기 위해 Puso[3] 등이 제안한 MSCNI(Modified SCNI) 기법이 있지만 이 기법 또한 해의 진동현상을 완벽히 개선하지 못하였다.

따라서 본 연구에서는 무요소법을 통한 해석 시 발생하는 문제들을 개선하기 위해 기존의 절근법을 개선한 수정된 무요소법을 사용하여 수치 불안정성을 해소하여 보다 정확한 해를 도출하고 비압축성 문제에서 발생하는 해의 진동현상을 개선하고자 한다.

II. 본 론

2.1 무요소 형상 함수

이동최소자승법

무요소법은 요소와 관계없이 임의의 절점과 영향반경을 정의하여 형상함수를 구성한다. 대표적으로 형상함수 보간법으로 이동최소자승법을 사용한다. 이동최소자승법은 기존의 최소자승법을 개선하여 가중함수(weighted function)을 사

용하여 정확도를 높이는 방법이다.

이동최소자승법을 기술하면 아래와 같다[1].

먼저 변위 $u(x)$ 를 도메인 Ω 에서 정의될 때 $u(x)$ 의 x 점에서의 근사값을 $u^h(x)$ 로 표기한다. 이를 식으로 표기하면 다음과 같다.

$$u(x) \cong u^h(x) = p^T(x)a(x), \quad (1)$$

for all $x \in \Omega$

여기서 $p^T(x)$ 는 x 를 변수로 갖는 기저 함수(Basis function)을 의미하며, $a(x)$ 는 계수 값을 의미한다. $p^T(x)$ 는 차원에 따라 다음과 같이 정의한다.

$$\begin{aligned} p^T(x) &= [1, x, x^2, \dots, x^m] \text{ for } 1D \\ p^T(x) &= [1, x, y, xy, x^2, y^2, \dots, x^m, y^m] \text{ for } 2D \\ p^T(x) &= [1, x, y, z, xy, yz, zx, x^2, y^2, z^2, \dots, x^m, y^m, z^m] \text{ for } 3D \end{aligned} \quad (2)$$

형상함수를 구성하기 위해서는 $a(x)$ 를 찾아야 하는데 여기서 $a(x)$ 는 임의의 근사점인 \bar{x} 에서 오차가 최소화 되는 값으로 결정한다.

따라서 근사오차 J 를 다음과 같이 정의하고 $\frac{\partial J_x(b)}{\partial b} = 0$ 을 만족할 때 근사오차의 최솟값을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} J_x(b) &= [p(x)a(\bar{x}) - u(x)]^T w(\bar{x}) [p(x)a(\bar{x}) - u(x)] \\ &= [pb - \hat{u}]^T w(\bar{x}) [pb - \hat{u}] \end{aligned} \quad (3)$$

$$\frac{\partial J_x(b)}{\partial b} = 2(p^T w(\bar{x}) pb - p^T w(\bar{x}) \hat{u}) = 0$$

위 식을 다시 정리하면 b 는 다음과 같이 계산될 수 있다.

$$\begin{aligned} [p^T w(\bar{x}) p] b &= [p^T w(\bar{x}) \hat{u}] \\ b &= A(x)^{-1} B(x) \hat{u} \end{aligned} \quad (4)$$

where, $A(\bar{x}) = p^T w(\bar{x}) p$, $B(\bar{x}) = p^T w(\bar{x})$

따라서 최종적으로 변위와 형상 함수는 식 (5)와 같이 표현될 수 있다.

$$\begin{aligned} u(x) \cong u^h(x) &= p^T(x) A(x)^{-1} B(x) \hat{u} = \Phi(x) \hat{u} \\ \Phi(x) &= p^T(x) A(x)^{-1} B(x) \end{aligned} \quad (5)$$

가중치 함수인 $w(\bar{\mathbf{x}})$ 는 무요소 형상함수의 결정에 있어서 중요한 역할을 한다. 가중치 함수는 형상 함수가 0이 아닌 값을 갖는 영향영역을 정의하는데 일반적으로 원형인 영역을 정의하게 된다. 하지만 원형으로 영역을 정의할 경우 절점이 방향 별로 다른 분포를 갖게 되는 경우 효율적으로 영역을 정의할 수 없다.

따라서 본 연구에서는 이를 위해 Puso[3] 등이 제안한 타원형 영향영역을 정의하기 위한 가중치 함수를 사용한다. 타원형 영향영역 정의를 위한 가중치 함수는 다음과 같이 정의한다.

영향영역의 중심절점인 $\bar{\mathbf{x}}$ 를 기준으로 가장 가까운 이웃절점인 \mathbf{x}_j 들을 선택하여 모멘트 행렬을 구성한다.

$$\mathbf{M} = \sum_{j \in N} (\mathbf{x}_j - \bar{\mathbf{x}}) \otimes (\mathbf{x}_j - \bar{\mathbf{x}}) \quad (6)$$

where N is set of nearest neighbors of $\bar{\mathbf{x}}$

이를 이용하여 영향반경 r 을 다음과 같이 정의한다.

$$r^2(\mathbf{x}) = \beta(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})^T \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) \quad (7)$$

$$\beta = 1/\max((\mathbf{x}_j - \bar{\mathbf{x}})^T \mathbf{M}_j^{-1}(\mathbf{x}_j - \bar{\mathbf{x}}))$$

여기서 β 는 가장 멀리 떨어진 이웃절점을 영향반경 내로 포함시키도록 해주는 값이며 이 값의 조절을 통해 영향반경의 크기를 조절할 수 있다. 가중치 함수는 일반적으로 영향반경을 이용한 스칼라 함수로 정의되며 $r < 1$ 인 영역에서 0이 아닌 값을 가진다. $r=0$ 에서 함수값이 1, $r=1$ 인 경계에서 함수값 및 기울기가 0이 되도록 정의한다. 본 연구에서는 다음과 같은 가중치 함수를 사용하였다.

$$w(\bar{\mathbf{x}}) = w(r) = \begin{cases} 1 - 6r^2 + 8r^3 - 3r^4 & \text{for } r \leq 1 \\ 0 & \text{for } r > 1 \end{cases} \quad (8)$$

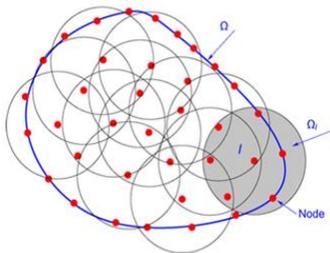


Fig. 1. Nodes and influence domains (Circular shape)[4]

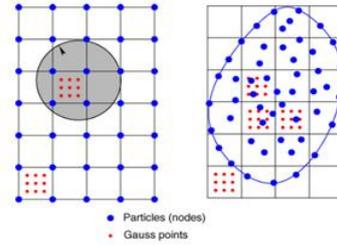


Fig. 2. Back-cell structure for numerical integration[4]

이상과 같은 이동최소자승법을 사용할 경우 절점이 불규칙하게 위치하여도 부드러운 함수 보상을 통하여 수치안정성을 높일 수 있으며 요소 뒤틀림에 덜 민감한 장점을 가지게 된다.

2.2 무요소 적분기법

무요소 형상함수를 이용하여 Galerkin 기법을 적용하기 위해 수치적분을 할 때 무요소 기법에서는 배경셀(back cell)을 이용하는 것이 일반적이다[1]. 이런 기법을 사용하기 위해서는 Fig. 2와 같이 배경셀을 생성하여 Gauss quadrature 이용하여 적분을 수행하게 된다.

$$\int_{\Omega} f(x) d\Omega = \sum_j f(\xi_j) w_j \det J(\xi_j) \quad (9)$$

이렇게 정구격자를 생성하여 적분을 하면 절점의 분포에 따라 적분의 정확도가 일정하게 유지되는 것이 힘들고 전체적으로 일정 수준 이상의 정확도를 유지하기 위해서는 과도한 적분점을 사용해야 하는 문제가 야기된다. 요소정보와 같은 절점 간 연결정보가 사용 가능한 경우 이를 배경셀로 이용하여 적분을 수행하여 정확도를 확보할 수 있지만 이 경우에도 유한요소법과 같은 Galerkin 기법 기반 수치해법의 안정성 및 수렴성을 확인하기 위한 중요 테스트인 패치테스트를 통과하지 못한다.

따라서 본 연구에서는 이러한 문제를 해결하기 위해 Chen 등[2]이 제안한 SCNI(Stabilized Conforming Nodal Integration) 기법을 적용하고자 하였다.

SCNI 기법을 적용하기 위해서는 문제의 전체 영역을 각 절점 별로 할당된 고유의 절점 영역(nodal domain)으로 나눈 다음 L 번째 절점 영역에 대해 smoothed strain ϵ^h 을 식 (10)과 같이 정의한다.

$$\begin{aligned} \epsilon_{ij}^{\sim h} &= \int_{\Omega} \epsilon_{ij}^{\sim h}(\mathbf{x}) \Phi(\mathbf{x}; \mathbf{x} - \mathbf{x}_L) d\Omega \\ \frac{1}{2A_L} \int_{\Omega_L} \left(\frac{\partial u_i^h}{\partial x_j} \right) + \left(\frac{\partial u_j^h}{\partial x_i} \right) d\Omega \\ &= \frac{1}{2A_L} \int_{\Gamma_L} (u_i^h n_j + u_j^h n_i) d\Gamma \end{aligned} \quad (10)$$

where

$$\Phi(\mathbf{x}; \mathbf{x} - \mathbf{x}_L) = \begin{cases} 1/A_L, & x \in \Omega_L \\ 0, & x \notin \Omega_L \end{cases}$$

smoothed strain $\epsilon^{\sim h}$ 을 이용하여 I번째 절점의 변위벡터 \mathbf{d}_I 에 대해 다음과 같이 기술할 수 있다.

$$\epsilon_{ij}^{\sim h}(\mathbf{x}_L) = \sum_{I \in G_L} \tilde{\mathbf{B}}_I(\mathbf{x}_L) \mathbf{d}_I \quad (11)$$

where G_L is a group of nodes in which their associated shape function supports cover node L .

$\tilde{\mathbf{B}}_I(\mathbf{x}_L)$ 는 2 차원의 경우 다음 식과 같이 나타낼 수 있다.

$$\tilde{\mathbf{B}}_I = \begin{bmatrix} \tilde{b}_{11}(\mathbf{x}_L) & 0 \\ 0 & \tilde{b}_{22}(\mathbf{x}_L) \\ \tilde{b}_{12}(\mathbf{x}_L) & \tilde{b}_{21}(\mathbf{x}_L) \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$\text{where } \tilde{b}_k(\mathbf{x}_L) = \frac{1}{A_L} \int_{\Gamma_L} \Psi_I(\mathbf{x}) n_i(\mathbf{x}) d\Gamma$$

따라서 변위와 변형률은 식 (13)과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^h(\mathbf{x}) &= \sum_{I=1}^{NP} \Psi_I(\mathbf{x}) \mathbf{d}_I \equiv \Psi \mathbf{d} \\ \text{where } \mathbf{d}_I^T &= [d_{1I} \ d_{2I}] \\ \epsilon^{\sim h}(\mathbf{x}) &= \sum_{I=1}^{NP} \tilde{\mathbf{B}}_I(\mathbf{x}) \mathbf{d}_I \equiv \tilde{\mathbf{B}} \mathbf{d} \\ \text{where } \epsilon^{\sim h}(\mathbf{x}) &= [\epsilon_{11}^{\sim h} \ \epsilon_{22}^{\sim h} \ \epsilon_{12}^{\sim h}] \end{aligned} \quad (13)$$

선형탄성문제는 식 (14)와 같이 이산화 할 수 있으며 앞서 구한 $\tilde{\mathbf{B}}_I$ 를 이용하여 다음 식 (15)와 같이 나타낼 수 있다.

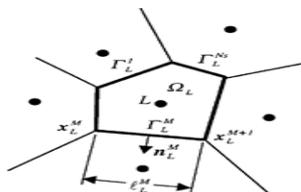


Fig. 3. Nodal Domain[3]

$$\sum_{J=1}^{NP} \mathbf{K}_{IJ} \mathbf{d}_J = \mathbf{f}_I \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{IJ} &= \int_{\Omega} \mathbf{B}_I^T(\mathbf{x}) \mathbf{C} \mathbf{B}_J(\mathbf{x}) d\Omega \\ &\cong \sum_{L=1}^{NP} \tilde{\mathbf{B}}_I^T(\mathbf{x}_L) \mathbf{C} \tilde{\mathbf{B}}_J(\mathbf{x}_L) \int_{\Omega_L} d\Omega \\ \mathbf{f}_I &= \int_{\Omega} \Psi_I(\mathbf{x}) \mathbf{b}(\mathbf{x}) d\Omega \\ &\quad + \int_{\Gamma} \Psi_I(\mathbf{x}) \mathbf{h}(\mathbf{x}) d\Gamma \\ &= \sum_{L=1}^{NP} \Psi_I(\mathbf{x}_L) \mathbf{b}(\mathbf{x}_L) \int_{\Omega} d\Omega \\ &\quad + \sum_{L=1}^{NP} \Psi_I(\mathbf{x}_L) \mathbf{h}(\mathbf{x}_L) \int_{\Gamma_L} d\Gamma \end{aligned} \quad (15)$$

이와 같이 SCNI 기법을 적용하여 $\tilde{\mathbf{B}}_I$ 행렬을 수정함으로써 해의 불안정성을 상당부분 안정시킬 수 있다. 하지만 비압축성 구속조건이 들어가는 재료의 경우, 즉 포아송비가 0.5에 가까워진 경우 SCNI 기법 또한 해의 불안정성이 발생하여 해의 정확도가 크게 떨어지게 된다.

이러한 문제의 해결을 위해 Puso[3] 등이 제안한 MSCNI(Modified SCNI) 기법을 적용하였다. MSCNI 기법의 경우 Fig. 4와 같이 기존의 절점 적분영역(nodal integration domain)을 절점 기준으로 더 세분하여 적분 부영역(integration sub-cell)으로 나눈 다음 각각의 적분 부영역에 대해 적분 부영역 변형률(integration subcell strain) $\epsilon_c^{\sim h}$ 을 구하면 식 (16)과 같이 smoothed strain을 구할 수 있다.

$$\epsilon_I^{\sim h} = \frac{1}{A_I} \sum_{c \in T_I} A_c \hat{\epsilon}_c^{\sim h} \quad (16)$$

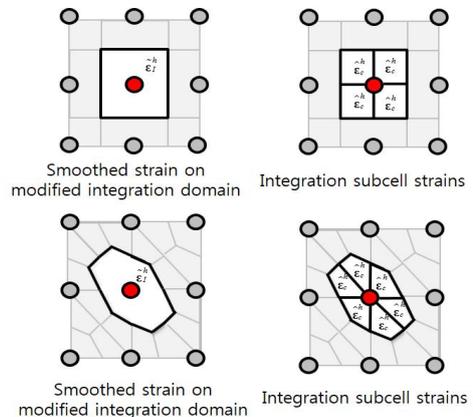


Fig. 4. Smoothed strain on nodal domain & integration subcell strains

여기서 A_I 는 I번째 절점영역의 면적, A_c 는 각 적분 부영역의 면적을 나타내며 T_I 는 I번째 절점 영역에 속하는 적분 부영역을 뜻한다. ϵ_c^h 을 이용하여 식 (17)과 같이 변형에너지의 변분값에 대한 보정을 수행하여 해의 진동을 제거함으로써 해의 안정성과 정확도를 높이게 된다.

$$\delta W = \sum_{I=1}^{NP} \left[\delta \epsilon_I^h C \epsilon_I^h - \sum_{c \in T_I} \alpha (\delta \epsilon_I^h - \delta \epsilon_c^h) \bar{C} (\epsilon_I^h - \epsilon_c^h) A_c \right] \quad (17)$$

여기서 α 는 보정계수이며 \bar{C} 는 보정 재료상수이다. 만약 $\alpha = 1, \bar{C} = C$ 를 사용하면 적분 부영역을 절점영역으로 하여 전체 적분을 수행하는 것과 같은 결과를 얻는다. 일반적으로 α 는 1을 사용하여 \bar{C} 는 재료에 따라 적절히 보정하여 비압축성 재료에 경우에도 체적감김 현상을 보완한다.

이상과 같이 MSCNI를 도입할 경우 전체적인 체적감김 현상은 줄어들게 된다. 하지만 문제에 따라 특정 경계영역 부근에서 해의 진동이 일부 나타나게 되어 해의 정확도를 떨어뜨리게 된다. 이는 경계영역의 경우 적분 부영역이 절점적분영역과 일치하게 되어 보정의 효과가 사라지기 때문에 발생하는 문제인 것으로 판단된다.

따라서 본 연구에서는 이와 같은 MSCNI의 해의 진동 현상으로 인한 수치 불안정성을 제거하기 위해 절점적분영역 대신에 절점 사이에 구성된 요소영역을 적분영역으로 사용하는 방법인 Modified Stabilized Conforming Element Integrator (MSCEI)을 제안하였다.

이 방법에서는 적분영역을 요소영역으로 사용함에 따라 경계영역에서도 적절한 보정이 이루어지게 되어 MSCNI를 사용할 때의 장점들은 그대로 살리면서 비압축성 재료의 경우에 일어나는 경계영역에서의 수치 불안정성을 해결할 수 있다.

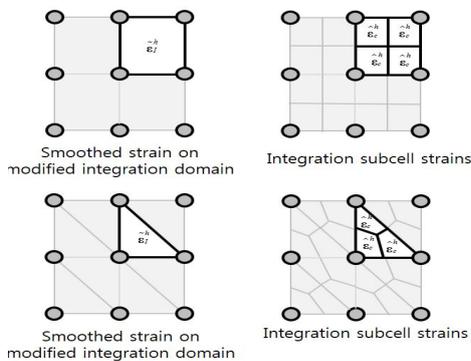


Fig. 5. Smoothed strain on element domain & integration subcell strains

2.3 효용성 검증

검증 모델

기존의 무요소법의 경우 유한요소의 안정성 및 수렴성을 확인하기 위한 중요한 테스트인 패치 테스트를 통과하지 못한다. 따라서 수정된 무요소법을 이용하여 패치 테스트를 행하고 통과여부를 확인하였다.

또한 간단한 보 문제를 유한요소해석, 기존의 무요소법, 수정된 무요소법 등을 통해 해석을 실행하였다. 한쪽 끝단을 고정하고 반대편 끝 단의 힘을 가하여 굽힘 방향으로 변위가 생기게 하였고 이를 통해 전단잠김 현상이 발생하게 하였다. 전단잠김이 발생하였을 경우 각 해석기법에 따른 오차율을 분석하였으며 유한요소법의 사각형 요소의 경우 부적합 모드(Incompatible mode) 요소를 통해 전단잠김을 제거하고 비교 분석하였다.

마지막으로 Prandtl's Punch 문제를 통해 해석 기법 및 요소별 오차를 분석하였다. 엄밀해가 없으므로 요소의 수를 충분히 증가시켜 수렴하는 해를 기준으로 오차를 평가하였다. 비압축성 재료를 해석하였을 때 체적감김 현상으로 인한 유한요소법의 한계와 기존 무요소법에서 발생되었던 해의 진동현상으로 인한 수치불안정성을 수정된 무요소법과 결과 비교를 통해 확인하였다.

- Patch Test(constant stress test)

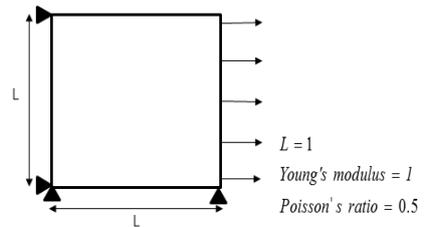


Fig. 6. Patch Test Model

- Beam Problem Test

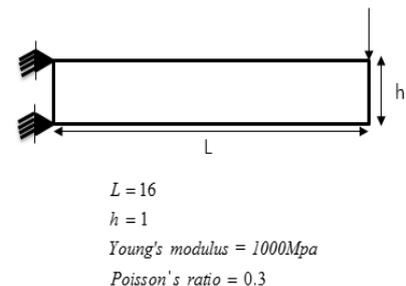
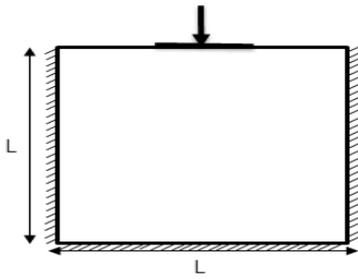


Fig. 7. Beam Problem Test Model

- Prandtl's punch problem



$L = 30 \times 30$
 Young's modulus = 1
 Poisson's ratio = 0.49999

Fig. 8. Prandtl's Punch Problem Model

검증 결과

- Patch Test(constant stress test)

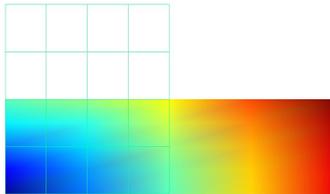


Fig. 9. Result of Patch Test(FEM)

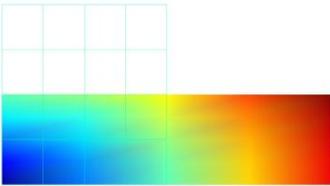


Fig. 10. Result of Patch Test(MSCEI)

EFGM[1]의 경우 패치 테스트를 통과하지 못 하지만 Table 1에서 알 수 있듯이 엄밀해와 비교했을 때 수정된 무요소법의 경우 유한요소해석과 같이 오차가 없는 것을 확인할 수 있다.

Table 1. Comparison of Analysis Results for Patch Test(Constant stress test)

Type of Analysis	Maximum Displacement	Relative Error(%)
FEM	1.0	0.0
MSCEI	1.0	0.0

- Beam Problem Test

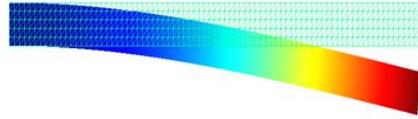


Fig. 11. Result of Beam Problem Test(Triangular)

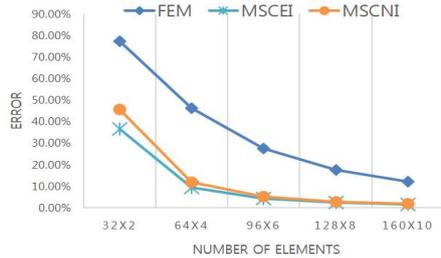


Fig. 12. Comparison of Analysis Results Using Triangular Elements for Beam Problem

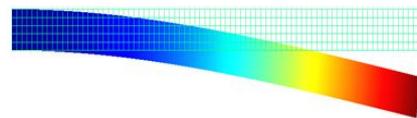


Fig. 13. Result of Beam Problem Test(Rectangular Element)

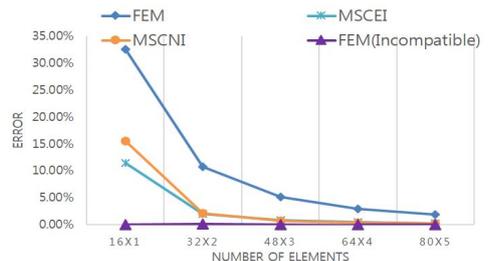


Fig. 14. Comparison of Analysis results Using Rectangular Elements for Beam Problem Test

Figure 12, Fig. 14는 각각 삼각형, 사각형 격자를 사용하여 해석 기법에 따른 엄밀해(exact solution)와 오차를 산출한 그래프이다.

유한요소법을 통해 해석을 하였을 때 요소의 형태와 상관없이 진단잠김 현상으로 인해 요소수에 따른 정확도가 높아질 뿐 간단한 보 문제에 서도 오차가 발생하는 것을 확인할 수 있었다.

특히 자동요소망 생성 시 많이 사용되는 삼각형 요소의 경우 요소 수를 많이 증가하였을 경우에도 엄밀해와 12%의 오차가 발생하여 정확한 해를 도출하기 어려움을 알 수 있다.

반면 기존의 MSCNI 기반의 무요소법과 수정된 무요소법(MSCEI)의 경우 유한요소법과 달리 선택적 적분(selective integration) 등의 특별한 조치 없이도 격자의 형태에 상관없이 진단잠김 현상이 거의 발생하지 않아 엄밀해와 오차가 상당히 줄어든 것을 확인할 수 있었고 그 중에서도 수정된 무요소법이 조금 더 정확한 결과를 내는 것을 알 수 있었다. 다만 유한요소법의 경우 알려진 바와 같이 사각형 격자를 사용할 수 있는 경우에는 진단잠김 현상을 제어할 수 있는 비적합모드(Incompatible mode) 요소를 사용함으로써 잠김현상이 일어나지 않고 적은 격자수로도 엄밀해와 거의 동일한 결과를 얻을 수 있었다.

- Prandtl's punch problem

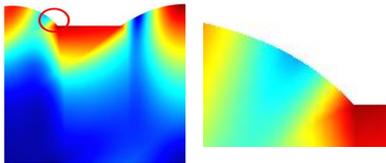


Fig. 15. Result of Prandtl's Punch Problem(FEM-Triangular)

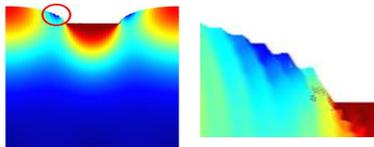


Fig. 16. Result of Prandtl's Punch Problem(SCNI-Triangular)

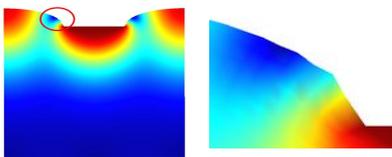


Fig. 17. Result of Prandtl's Punch Problem(MSCNI-Triangular)

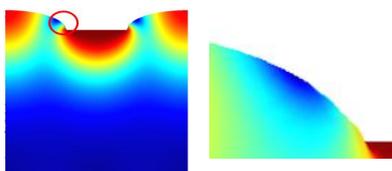


Fig. 18. Result of Prandtl's Punch Problem(MSCEI-Triangular)

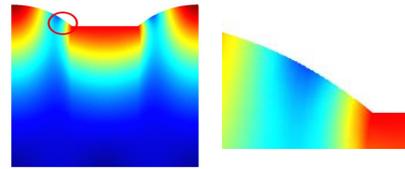


Fig. 19. Result of Prandtl's Punch Problem(FEM-Rectangular)

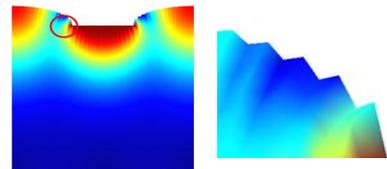


Fig. 20. Result of Prandtl's Punch Problem(SCNI-Rectangular)

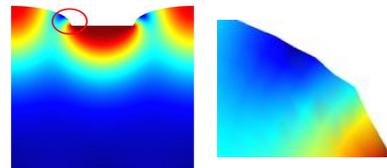


Fig. 21. Result of Prandtl's Punch Problem(MSCNI-Rectangular)

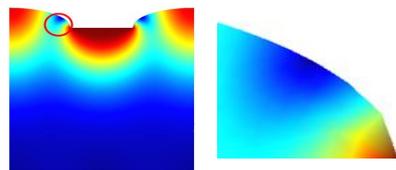


Fig. 22. Result of Prandtl's Punch Problem(MSCEI-Rectangular)

Figures 23, 24는 Prandtl's Punch 문제를 통해 비압축성 재료에 대해 삼각형, 사각형 격자를 사용하여 해석기법에 따른 오차를 도출하였다.

유한요소법의 경우에는 체적잠김 현상으로 인하여 삼각형, 사각형 요소 모두 상당히 오차가 큰 것을 확인할 수 있다. 특히 삼각형 요소로 구성된 형상의 결과인 Fig. 15를 보면 삼각형 요소의 방향성에 따라 형상의 변형이 실제 변형과 상당한 차이가 있음을 알 수 있다.

Figures 16, 17, 20, 21을 보면 기존의 무요소법의 경우 형상의 특정 경계 부근에서 해의 진동이 발생하는 것을 확인하였다. SCNI기법에 비해 MSCNI의 경우 완화가 되었지만 해의 진동이 남아있어 수치불안정성이 남아있는 것을 확인할 수 있다.

수정된 무요소법이 적용된 Figs. 18, 22의 경우 해의 진동현상이 없어졌으며 매끄러운 표면을 확

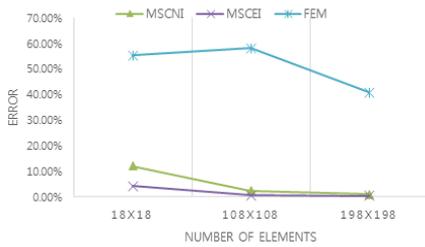


Fig. 23. Comparison of Analysis Results Using Triangular Elements for Prandtl's punch Problem

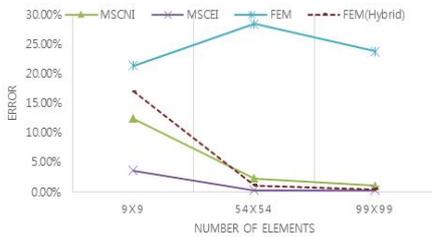


Fig. 24. Comparison of Analysis results Using Rectangular Elements for Prandtl's Punch Problem

인할 수 있다. 또한 Table 2, 3을 보면 상대 오차가 삼각형, 사각형 격자에 따른 결과값이 큰 차이가 없으며 유한요소법을 포함한 다른 해석 기법에 비해 높은 수치 정확성을 확보한 것을 알 수 있다.

비압축성 재료에서 발생하는 체적잡짐을 제어할 수 있는 유한요소법의 Hybrid 사각형 요소를

Table 2. Comparison of Analysis Results Using Triangular Elements for Prandtl's punch Problem

Number of Elements	Type of Analysis	Relative Error(%)
18X18	FEM	55.3
	SCNI	16.9
	MSCNI	12.4
	MSCEI	3.6
108X108	FEM	58.0
	SCNI	5.1
	MSCNI	2.3
	MSCEI	0.3
198X198	FEM	40.7
	SCNI	2.9
	MSCNI	1.1
	MSCEI	0.3

Table 3. Comparison of Analysis results Using Rectangular Elements for Prandtl's Punch Problem

Number of Elements	Type of Analysis	Relative Error(%)
9X9	FEM	21.4
	FEM(Hybrid)	17.0
	SCNI	12.4
	MSCNI	12.4
	MSCEI	4.2
54X54	FEM	28.4
	FEM(Hybrid)	1.2
	SCNI	4.3
	MSCNI	2.3
	MSCEI	0.5
99X99	FEM	23.7
	FEM(Hybrid)	0.4
	SCNI	3.2
	MSCNI	1.1
	MSCEI	0.4

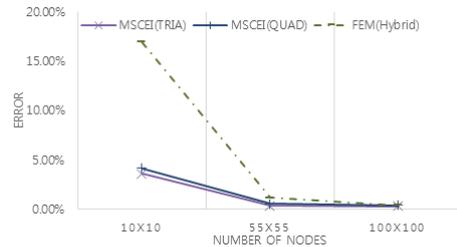


Fig. 25. Comparison of Analysis results Using different elements for Prandtl's Punch Problem

통해 해석을 진행하였을 때 체적잡짐현상이 개선되어 일반적인 사각형 요소와 비교하였을 경우 정확도의 개선을 확인할 수 있다. 하지만 Fig. 25에서 볼 수 있듯이 요소 수에 따른 해의 수렴성을 비교하였을 때 수정된 무요소법이 더 빠른 해의 수렴성을 보이는 것을 알 수 있다.

III. 결 론

본 연구에서 제안한 수정된 적분법을 이용한 무요소법의 경우 유한요소법과 달리 격자 형태에 따른 정확도 저하가 거의 없는 것을 확인하였다. 기존의 무요소법의 가중치 함수의 영향영역을 수정하여 절점이 불규칙할 경우에도 해석 안정성을 확보하였다. 또한 기존의 무요소법을 이용할 경

우 비압축성 모델에서 발생되던 해의 진동 현상을 적분영역을 절점영역이 아닌 요소영역으로 수정함으로써 진동 현상을 제거하였다. 또한 유한 요소법에서 체적잠김 현상을 개선하는 사각형 요소와 결과값을 비교하였을 때도 요소 수에 따른 해의 수렴성에서 더 뛰어난 것을 확인하였다.

따라서 본 기법을 통해 복잡한 형상에 대한 자동요소망 생성을 통해 구조해석 등을 수행할 경우 격자의 형태에 따른 정확도의 저하가 없어짐에 따라 모델링 시의 효율 및 편의성을 크게 향상시키면서도 신뢰성 있는 해를 구할 수 있다.

References

- 1) Belytschoko T., Lu Y.Y, Gu L., "Element-free Galerkin methods," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 37, 1994, pp. 229~256
- 2) Chen J.S., Wu C.T., Yoon S., You Y., "A stabilized conforming nodal integration for Galerkin mesh-free methods," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 50, 2001, pp. 435~466
- 3) Puso M. A. Chen J. S., Zywickz E., Elmer W. "Meshfree and finite element nodal integration methods," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 74, 2008, pp. 416~446
- 4) Vinh Phu Nguyen, Timon Rabczuk, Stephane Bordas, Marc Duflot., "Meshless methods : A review and computer implementation aspects," *Mathematics and Computers in Simulation*, 79, 2008, pp. 763~813