韓國數學敎育學會誌 시리즈 C <初等數學敎育>
https://doi.org/10.7468/jksmec.2018.21.1.55
2018. 1. 제 21권, 제 1호, 55-73

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. C:
Education of Primary School Mathematics
January. 2018, Vol. 21, No. 1, 55-73

함수적 상황에 대한 초등학생들의 공변추론 사례연구

허 준 호 (서울교육대학교 대학원)
박 만 구 (서울교육대학교)†

본 연구의 목적은 초등학교 4학년 학생들이 그래프가 아닌 언어적 표현이나 대응표, 기하학적 패턴 등으로 표현된 함수 과제에서 연속적으로 변하고 있는 두 양의 변화에 대한 공변추론 수준을 파악하고 공변추론 수준 및 추론 과정에 나타나는 특징을 분석하는 것이다. 연구 참여자들은 검사지를 통해 선정된 초등학교 4학년 학생 7명이며, 선정된 학생들의 학습지 분석 및 면담을 실시하였다. 연구 결과 학생들의 공변추론 수준은 5가지로 파악되었으며, 공변추론 수준에 따라 양적 문제 상황에서 다른 추론과정을 보였다. 특히, 공변추론 수준이 낮은 학생들은 두 변수의 파악에 어려움을 가지고 있었고 대응표를 중심으로 문제를 해결한 반면, 연속공변 수준의 학생들은 시간 변수의 흐름을 생각할 수 있다는 차이가 있었다. 연구 결과로부터 공변추론 관련 다양한 과제의 제시와 각 과제의 의미에 대한 교사들의 탐구가 필요함 등을 시사점으로 제시하였다.

I. 서론

함수는 일상생활에서 다양한 형태로 변하는 현상을 파악하고, 해석하며, 이를 통해 문제를 해결하게 해주는 도구이다. 수학 교육 맥락에 있어서도 함수는 학습자 주변의 다양한 실생활 변화를 체계적으로 기술하거나 관련짓는 중요한 수단으로서 수학의 여러 영역을 학습하는 기초가 된다는 점에서 그 가치가 있다(우정호, 2007). 이에 2015 개정 수학과 교육과정(교육부, 2015)에서도 “함수는 다양한 변화 현상 속의 수학적 관계를 이해하고, 표현함으로써 여러 가지 문제를 해결하는 데 도움이 된다.”(p. 32)고 명시하여 함수 학습의 필요성을 강조하고 있다.

이와 관련하여 Blanton 등(2015)은 핵심적 대수 사고 관행으로 이끄는 다섯 가지 필수 이해로서의 한 가지로 함수적 사고를 제시하고 있다. 그들은 함수적 사고란 공변하는 양 사이의 관계를 일반화하고, 자연언어, 대수적(기호적)표기, 그래프, 표를 통하여 공변하는 양 사이의 관계를 표현하고 추론하는 것을 포함한다고 말하고 있다. 함수적 사고는 초기 대수(Early Algebra)와 관련하여 산술학습과 대수 학습을 의미 있게 연결하는 대수적 사고를 개발하는데 중요한 역할을 한다(Blanton et al., 2015). 이런 이유로 함수적 사고의 연구 분야 중 실생활의 다양한 변화현상 속에서 연속적인 두 양의 변화관계를 생각하는 공변추론이 주목을 받고 있으며, 이러한 공변적 시각은 함수의 개념을 보다 완전하게 이해하는데 중요한 단계를 제공한다고 하였다(Cooney et al., 2010). 또한 공변적 접근은 양들 사이의 종속, 상관, 인과, 상호작용의 관계에 대한 현상을 이해하는 방식으로 작용하기 때문에 수학학습에 있어 중요하다(Chazan, 2000). 그리고 미적분학의 학습과도 관련이 있어 함수에 대한 이해에 중요하다는 점이 밝혀져 왔다(Carlson, 1998).

Carlson 등(2002)은 공변추론을 ‘서로 관련된 두 양이 변하는 방식에 초점을 두면서 두 양을 조정하는 것을 포함하는 인지활동’으로 정의하였으며, 학생들의 공변추론 수준을 5단계로 제시하였다. 그리고 각 수준에서 할 수 있는 정신적 행동(Mental Action, MA)을 그래프와 관련하여 설명하였다. 하지만 Carlson 등(2002)의 공변추론틀은 그래프에 주로 초점을 두었기 때문에 식, 표, 언어적 표현 등으로 함수과제를 해결하였다면 공변수준을 추론하기 어려운 한계가 있었다.

최근에는 Thompson과 Carlson(2017)이 양적추론을 기반으로 공변추론에 대한 지금까지의 이론을 종합하여 새로운 공변추론 수준을 제시하였다. 이 이론에서는 학생들의 공변추론 수준 측정을 위해 함수상황을

---

* 접수일(2017년 12월 25일), 심사(수정)일(2018년 1월 11일), 게재확정일(2018년 1월 28일)
* ZDM 분류 : B55
* MSC2000 분류 : 97C70
* 주제어 : 공변추론, 초기대수, 함수적 사고
† 교신저자 : mpark29@snue.ac.kr
* 본 논문은 제1저자의 학위논문을 수정 보완한 것임.

그래프로만 한정시키지 않았으며, 연속적으로 변수가 변한다는 생각을 기본으로 공변추론 수준을 여섯 가지로 제시하였다.

국내에서는 주로 중학교, 고등학교 학생들을 대상으로 공변추론 수준을 조사한 연구가 대부분이며, 변수가 연속적으로 변하는 상황뿐만 아니라 이산적으로 변하는 상황에 대한 그래프 과제를 Carlson 등(2002)의 공변추론틀을 사용하여 분석하였고, 초등학생의 공변추론 분석에 대한 연구는 Algebra Applet을 활용하여 수준분석을 한 연구(송윤오, 2016)뿐이었다. 이는 초등학교 교육과정에 함수개념의 기초가 되는 규칙성과 대응영역이 나오긴 하지만 함수적 상황을 그래프로 표현하거나, 그래프 상황을 언어적 상황으로 해석하는 교육내용이 없기에 Carlson 등(2002)의 공변추론틀로는 초등학생에 대한 공변추론 연구가 제한될 수밖에 없기 때문으로 보인다.

하지만 초등학생들에게 함수적 사고의 지도는 수학적 일반화 능력을 증진시키고, 형식적 대수와 함수 학습의 도움에 효과적이며(Carraher & Schliemann, 2007), K-5 학생들을 대상으로 한 함수적 사고에 관한 선행연구(Blanton & Kaput, 2004)에서도 초등학교 저학년 학생들이 함수적 사고가 가능하며, 언어와 기호를 사용하여 함수의 대응관계 및 공변관계를 설명할 수 있음을 입증한 바 있다. 이를 통하여 초등학생도 그들 나름의 수준에서 공변추론 능력을 가지고 있을 것으로 나타났다. 그런데 우리나라에서는 이에 대한 연구가 미흡한 실정이다. 본 연구에서는 초등학교 4학년 학생들의 연속적으로 공변하는 함수적 상황에서의 공변추론 수준을 알아보고, 변수가 구체적인 값을 가지는 양적 문제 상황에서 학생들의 공변추론 수준에 따라 추론과정이 어떻게 나타나는지를 파악하였다.

Ⅱ. 이론적 배경

1. 초기 대수에서의 함수적 사고

산술을 강조한 초등학교 교육과정과는 달리 대수는 중·고등학교에서 하나의 독립된 주제로 다뤄졌으며, 기호와 변수를 도입하는 형식적인 학습으로서 대수를 다루는 것이 일반적인 수학적 접근이었다. 따라서 중등교육과정에서 대수를 접한 학생들은 수학학습에 어려움을 겪었고, 학습과정상에 이를 이해하는데 어려움을 겪는 문제점을 가지고 있었다(Carraher & Schliemann, 2007).

학교 수학에서는 초기 대수를 도입하여 이러한 문제점들을 해결하고자 시도하였다. 초기 대수와 중등교육과정에서 다루는 대수의 다른 점은 각 과정에서 다루는 대수의 유형이 유사하지 않다는 점이다(Blanton et al., 2011). 초기 대수적 접근은 산술에 내재된 대수적 구조와 대수적 사고를 학습할 기회를 학생들에게 제공하여, 학생들의 대수적 추론 능력을 강화하고, 나아가 학생들의 형식적 대수 학습 참여에 기초를 형성하며 이와 관련된 많은 연구가 이루어져 왔다(Blanton & Kaput, 2011).

이러한 초기 대수는 산술, 함수적 사고, 수학적 모델링, 양적 추론을 이끌어 내는 다양한 진입점(points of entry)을 제공하며(Carraher & Schliemann, 2007), 대체적으로 수학적 아이디어를 일반화하고, 일반화를 다양한 방법으로 표현하고 정당화하며, 일반화를 가지고 추론하는 것을 핵심으로 하고 있다(Kaput, 2008).

Kaput(2008)은 대수 학습에서의 어려움의 원인을 산술과 대수를 분리하여 지도하는 접근방법으로 보고 대수를 사고의 대상으로 다뤄야하며 유치원에서 고등학교3학년에 이르기까지 교육과정 전체에 대수를 관련시켜 배워야 한다고 주장하였다. 초기 대수교육의 핵심 연구자인 Kaput은 Algebra in the Early Grades라는 책에서 대수적 사고의 핵심 양상과 요소를 [표 1]과 같이 제시하였다.

[표 1] 대수적 사고의 핵심 양상과 요소 (Kaput, 2008, p. 11)
[Table 1] Core aspects and strands (Kaput, 2008, p. 11)

대수적 사고의 핵심 양상
(A) 규칙성과 제한점을 일반화시키는 과정을 체계적으로 기호화하는 것
(B) 관습적인 기호 체계에서 표현되는 일반화과정을 구문으로 안내된 추론으로 수행하는 것
세 가지 요소
1. 일반화된 산술과 양적 추론에서의 계산, 관계를 추상화한 구조와 체계의 연구로서의 대수
2. 함수, 상관관계, 공변에 대한 연구로서의 대수
3. 수학 학습 안팎에 하나의 모델링 언어를 적용하는 것으로서의 대수

[표 1]에 나타난 핵심 양상과 요소는 수학의 양상 및 요소가 대수와 밀접하고 다양하게 연결되어 있음을 강조한다. 또한 수학교육과정 전반에 걸쳐 대수가 핵심적인 역할을 할 수 있는 것을 의미한다. 이 관점에서 대수적 사고를 진작시키는 방안으로 함수적 사고를 보고 있으며, 이를 신장시키는 것을 강조하고 있다.

Blanton 등(2011)은 Kaput(2008)의 연구뿐만 아니라 초기 대수에 대한 선행 연구를 바탕으로 수학적 관계 일반화하기, 표현하기, 정당화하기, 추론하기의 핵심적 대수적 사고과정을 네 가지로 분류하였고, 이러한 대수적 사고를 위한 다섯 가지 필수이해로서 동치·식·등식·부등식, 일반화된 산술, 변수, 함수적 사고, 비례 추론에 대한 이해를 제시하였다. 그 중 함수적 사고는 공변하는 양 사이의 관계를 일반화하기, 관계를 말, 기호, 표 또는 그래프로 표현하기, 함수 행동을 분석하기 위해 다양한 표현으로 추론하기를 포함함으로써 그 중요성을 강조하였다.

Carraher와 Schliemann(2007)는 초기에 함수에 대한 이해는 교육과정 속 주제들에 대한 학생들의 지식을 심화 및 통합시키며, 수학적 일반화 능력을 향상시켜 대수의 도입에 잘 대비시키므로 그 중요성이 강조되고 있음을 언급하였다. 또한 문장제 상황의 구조를 표현하고, 반성하는 활동으로 함수에 대한 추론을 뒷받침할 수 있다고 보았다.

하지만 초등학교 수학과 교육과정에는 형식적 함수 학습이 이루어지지 않기 때문에, 함수적 사고를 다룰 수 없는 것으로 잘못 인식될 가능성이 있지만(박교식, 1993), 함수적 사고는 학생들의 특정 활동이나 표현 등으로 관찰될 수 있고, 이와 같은 활동의 관점에서 기술될 수 있다.

2. 공변추론

가. 공변의 역사

공변추론에 대한 이론적 개념은 1980년대 후반과 1990년대 초에 Confrey와 Thompson의 연구에서 나타났으며(Thompson & Carlson, 2017), Confrey는 두 변수의 값이 변화할 때 각각의 변수 값을 조정시키는 것으로 공변을 설명하였다. Confrey와 Smith(1994)는 공변과 대응을 구분하여 설명하였고, 공변이란 x의 값이 x_m에서 x_{m+1}로 움직일 때, y의 값이 y_m에서 y_{m+1}로 조작적으로 움직이는 것이라고 정의하였다. 다시 말해 공변이란 두 변수의 값들이 변할 때, 두 변수의 값들을 조정하는 것이라고 정의하였다.

반면 Thompson은 상황 속에서 변화하는 양의 값을 정한 다음 두 개 이상의 양이 동시에 변화하는 것을 공변으로 정의하였다. 이때, 누군가 두 개의 변화하는 양의 값을 생각하면서, 그 양의 값들이 동시에 변한다고 상상할 때, 공변추론을 하게 된다고 하였다(Thompson & Carlson, 2017). 그리고 Thompson과 Carlson(2017)에서는 양적추론을 바탕으로 공변추론을 설명하였다. Thompson은 양적추론을 중요시 하였는데 이는 양에 대한 상황과 양사이의 관계를 개념화 하는 것이다(Thompson, 2011). Confrey와 Smith(1994)는 학생들이 함수표의 수열 사이 값에 나타나는 변화를 어떻게 생각하는지를 설명하지 않는 반면 Thompson은 공변을 생각하는 학생의 사고에 초점을 두고, 양이 변하는 값들을 가진다는 것은 구체적 혹은 추상적으로 생각하는 사람에게서 비롯한다고 보았다. 그리고 이러한 공변적 접근은 양들 사이의 종속, 상관, 인과, 상호작용의 관계에 대한 현상을 이해하는 방식으로 작용하기 때문에 수학학습에 있어 중요하다고 보았다(Chazan, 2000).

나. 공변추론 수준에 대한 연구

Carlson 등(2002)은 공변추론을 "공변하는 두 양을 조작화하고 그 두 양의 공변 양상을 생각하는 인지활동"(p. 354)이라고 정의하고, 학생들의 공변추론 능력을 조사하기 위해 공변추론 수준을 제시하였다. Carlson 등(2002)은 대학생들을 대상으로 연구를 하였고, 그들이 과제에 대해 보인 반응을 바탕으로 행동을 분류하고, 수준을 결정하였다. 대학생들이 과제에 참여할 때 보여준 행동의 분류 수단으로 정신적 행동(Mental Action, MA)을 사용하였고, 이러한 정신적 행동을 뒷받침하는 전반적인 이미지로 추론 수준을 분류하였다. 학생들의 공변추론 능력은 그 수준과 관련된 정신적 행동(MA)과 모든 낮은 수준에 관련된 행동이 뒷받침될 때, 주어진 공변추론 수준에 도달했다고 보았다.

반면 Thompson(2016)은 학생들의 함수, 변수, 변화

율의 이해에 대한 연구를 종합하여 새로운 공변수준을 제시하였다. Thompson은 변수의 값이 연속적으로 변한다는 생각이 공변추론의 기본이며, 함수와 그래프 그리고 관계를 이해하는데 필수 구성요소이기 때문에 연속적 변화를 바탕으로 '연속적 변화의 의미(Thompson, 2016, p. 447)'와 '연속적 공변(Thompson, 2016, p. 448)'을 설명하였다.

최근에는 Thompson과 Carlson(2017)이 양적추론을 기반으로 공변추론에 대한 지금까지의 이론을 종합하여 연속적 공변을 여섯 가지 수준으로 설명하고 있다.

Thompson과 Carlson(2017)은 Thompson(2016)을 수정하여, 변화추론수준[표 2]와 공변추론수준[표 5]를 제시하였다. [표 2]는 Castillo-Garsow(2012) 연구의 덩어리 변화 이미지와 부드러운 변화 이미지 사이의 구분과 Thompson(2011)의 반복적인 연속변화 이미지에 대한 연구를 통합한 것이다.

[표 2] 변화추론수준
(Thompson & Carlson, 2017, p. 440)
[Table 2] Major levels of variational reasoning
(Thompson & Carlson, 2017, p. 440)

수준	설명
부드러운 연속변화	변수 값의 변화를 구간들에 의해 증가하거나 감소하는 것으로 생각하며, 각 구간 안에서 변수 값이 부드럽고 연속적으로 변한다는 것을 생각한다. 변화를 같은 크기의 구간으로 생각할지도 모르지만, 반드시 그렇지는 않다.
덩어리 연속변화	변수 값의 변화를 고정된 크기의 구간들에 의해 변하는 것으로 생각한다. 구간들이 같은 크기일 수 도 있지만 반드시 그렇지는 않다. 예를 들면, 자를 놓는 것처럼, 0에서 1, 1에서 2, 2에서 3(기타 등등)으로 변하는 변수 값을 상상한다. 자에 있는 수처럼 0과 1, 1과 2, 2와 3사이 값들은 덩어리의 부분이기 때문에 같이 따라온다. 그러나 이러한 값을 가지는 양은 0, 1, 2가 값을 가지는 것과 같은 방식으로 하나의 값을 가지지 않는다. 또한 덩어리 연속변화는 자연수 양에서만 나타난다고 생각하지 않는다. 변수 값이 0에서 0.25, 0.25에서 0.5, 0.5에서 0.75로 변하는 것은 0에서, 1, 1에서 2로 증가하는 것과 같은 덩어리 연속변화이다.
전체적인 변화	변수의 값이 증가하거나 감소한다고 생각하지만, 변화하는 동안 변수가 값을 가질 것이라는 생각을 거의 하지 않는다.
이산 변화	변수가 구체적인 값을 가진다고 생각한다. 변수는 $a_1, a_2, \cdots, a_n$값을 가져서 a에서부터 b까지 변하는 변수 값을 알 수 있지만, a_i와 a_{i+1}사이의 임의의 값이 있는 것으로 생각하지 않는다.
변화 없음	변수는 하나의 정해진 값을 가진다고 생각하며, 다른 상황에서는 단순히 변수가 다른 값을 가질 수는 있다고 여긴다.
상징으로서의 변수	변수는 상징이다. 변화와 관계가 없다.

[표 5]는 Thompson과 Carlson(2017)이 양적추론과 곱셈적 대상의 형성을 바탕으로, Carlson과 Confrey의 양의 값의 변화에 대한 조정연구에 Castillo-Garsow(2012)의 양의 변화를 인식하는 방식을 추가하였다. 즉 공변추론에 대한 기존 연구들을 모두 통합한 틀이라고 볼 수 있다. 또한 Thompson과 Carlson(2017)은 공변추론 수준틀에서 변화율의 개념을 없앴다. 변화율을 알기위해서는 공변추론이 필요하지만, 비(ratio), 몫, 적분, 비례와 같이 공변추론을 뛰어넘는 개념이 필요하기 때문이다.

Thompson과 Carlson(2017)은 Thompson(2016)에 몇 가지를 수정하였다. 첫째, 곱셈적 대상(multiplicative object)이 공변추론 수준에 추가되었다. Saldanha와 Thompson(1998)의 연구에서 곱셈적 대상은 누군가가 정신적으로 제 각각 동시에 있는 새로운 개념적 대상을 만들기 위해 두 양의 속성을 머릿속에서 결합시킬 때 형성하게 됨을 언급하였고, 곱셈적 대상을 개념화하는 것은 꼭 공변추론에 필요하다고 보았기 때문이다(Thompson & Carlson, 2017).

둘째, '전체적인 값의 조정(Gross coordination of values)' 수준이 추가 되었다. 때문에 두 변수 값을 조정하여 이산적인 순서쌍을 만드는 '값의 조정' 수준과 두 변수의 공변을 생각하지 못하는 '값의 조정 전' 수준 사이에서 변화하는 두 변수 값들의 전반적인 변화 이미지를 가진 학생들의 수준을 파악할 수 있게 되었다.

3. 선행 연구

국내에서는 Carlson, Jacobs, Coe, Larsen과 Hsu(2002)의 이론적 틀을 활용하거나 보완하고자 하는 시도가 이루어져왔다(모성준, 2013; 문혜선, 2015; 송윤오, 2016; 서창범, 2016; 신재홍, 이중권, 2009; 윤호연, 2017; 조한혁 외 2012). 그 중 중·고등학생을 대상으로 한 연구를 살펴보면 모성준(2013)은 중학교 1학년 학생들을 대상으로 교수실험을 하여 함수적 상황에서 공변 수준의 유의미한 변화를 이끌어냈다. 문혜선(2015)은 고등학교 1학년 학생들을 대상으로 함수적 상황에서 나타나는 공변추론 수준 측정과 그래프의 해석과 번역활동 사이에서 나타나는 학생들을 특징을 분석하여 구분하였다. 서창범(2016)은 고등학교 2학년 학생들의 공변추론 수준을 알아보고, 공변추론 수준의 차이

별로 나타나는 학생들의 공변추론 과정에서 나타나는 사고의 특징이 무엇인지 알아보았다. 윤호연(2017)은 중학교 3학년 학생들의 일차함수적상황의 문제해결과 이차함수적상황의 문제해결의 차이에 대한 원인을 찾기 위해 학생들의 공변추론 수준을 알아보고, 공변추론 수준 차에 따라 이차함수적상황의 문제해결과정의 특징을 알아보았다.

초등학생을 대상으로 한 연구는 송윤오(2016)가 6학년 학생들을 대상으로 Algebra Applet를 활용한 교수실험에서 학생들의 공변 관계의 인식 및 추론 능력의 변화에 유의미한 변화를 이끌어 내었다.

한편 조한혁 등(2012)은 영재학생들을 대상으로 컴퓨터 LOGO프로그램을 사용한 영재프로그램의 적용으로 학생들의 공변수준 변화에 대한 연구를 실시하였다. 그리고 예비교사들의 공변추론에 대한 개념의 이해를 위해 GSP를 활용한 신재홍, 이중권(2009)의 연구는 예비교사들의 공변추론 수준이 방향의 수준에서 순간비율의 수준까지 발달한 결과를 얻었다.

Thompson과 Carlson(2017)의 공변추론 수준틀을 이용한 국내연구는 김채연, 신재홍(2016)이 중학교 3학년 영재학생을 대상으로 연속적으로 공변하는 두 양에 대한 공변추론 수준을 알아보고 공변추론 방식의 차이가 문제해결에 미치는 영향을 연구하였다. 박종희 등(2017)에서는 중학교 3학년 영재학생 2명에게 그래프 유형(양적 그래프, 질적 그래프)에 따른 학생들의 공변추론 수준을 Carlson 등(2002)과 Thompson과 Carlson(2017)의 공변추론 수준틀을 적용하여 비교하였다.

국내의 선행 연구들을 살펴보면 공변추론에 대한 연구는 주로 중ㆍ고등학생들을 대상으로 함수적 상황이 그래프로 제시된 상황에서 학생들의 과제에 대한 해결과정을 Carlson 등(2002)의 공변추론 수준틀을 이용하여, 공변 수준 신장 및 수준 분석에 대한 사례연구가 이루어졌음을 알 수 있다.

그러나 초등학교에는 함수개념의 기초가 되는 규칙성과 대응영역이 나오긴 하지만 함수적 상황을 그래프로 표현하거나, 그래프 상황을 언어적 상황으로 해석하는 교육내용이 없기에 Carlson 등(2002)의 공변추론 틀로는 초등학생에 대한 공변추론 연구가 제한될 수밖에 없다. 따라서 Thompson과 Carlson(2017)의 공변추론 수준틀을 이용한 초등학생 대상의 연구가 필요하다.

Ⅲ. 연구방법

1. 연구 참여자

4학년 학생들의 공변추론 수준을 알아보고, 공변추론 수준차이에 따라 양적 문제 상황에서 공변추론과정의 특성을 분석하기 위해, 먼저 서울특별시 은평구에 위치한 S초등학교 4학년 한 학급 21명을 대상으로 2개의 문항으로 이루어진 검사지Ⅰ을 배포하였다. 그 결과 나타나는 공변추론 수준을 일차적으로 분석한 후 평상시 수업시간에 자신의 생각을 언어로 표현하는 능력과 학원에서 수학과 선행학습을 하였는지 여부, 학업성취수준을 고려하여 공변추론 수준별로 면담 참여 학생 7명을 선정하였다. 연구참여 학생의 특징은 [표 3]과 같다.

[표 3] 연구참여 학생의 특징
[Table 3] The characteristics of the participants

구분	연구참여 학생의 학습 성향	학업 성취 수준	선행 학습 여부
A학생	사칙연산이 느리고 수학에 자신감이 부족함. 도형과 측정단원에는 자신감을 갖고 있으며 교사의 질문에는 자신의 의견을 표현할 수 있음.	하	선행 안함
B학생	수업시간에 조용한 편이며, 사칙연산은 능숙하게 해결함. 하지만 서술형 문제의 풀이에 있어 이해가 늦고 해결하는데 시간이 오래 걸림.	중	선행 안함
C학생	문제를 이해하는데 비교적 시간이 많이 걸리지만 수업시간에 교사에게 자주 질문을 하며, 자신의 생각을 표현하는데 자신감을 갖고 있음.	중	선행 안함
D학생	학습에 적극적으로 참여하며 문제해결과정에서 발견한 내용이나 궁금증은 적극적으로 표현함.	중	선행 안함
E학생	문제에 대한 이해력이 빠르고, 문제풀이에 대한 검토를 자주하며 완벽주의성향이 있음. 수업내용에 대한 집중력이 좋음.	상	선행 안함
F학생	수업시간에 교사에게 질문을 하지는 않지만 교사의 질문에는 자신의 생각을 잘 표현함. 연산능력이 빠르고 문제를 다양하게 해결하려는 시도를 많이함.	상	선행 안함
G학생	수업시간에 적극적으로 참여하며, 문제에 대한 이해가 빠르고, 자신의 생각을 논리적으로 표현하는 능력이 뛰어남.	상	선행 안함

2. 연구 절차

본 연구를 수행하기 위한 연구 절차 및 과정은 [표 4]와 같다.

[표 4] 연구의 절차
[Table 4] The process of research

문헌연구	-초기 대수와 함수적 사고에 관한 연구 분석 -공변추론 수준틀 및 연구결과 분석 -수학과 교육과정 및 교과서 분석
⇩	
검사지Ⅰ, Ⅱ 개발	-선행연구에서 사용된 과제 검토 -타당도 검증을 위해 수학교육전문가와 검토
⇩	
검사지Ⅰ 배부, 학생 선별	-서울특별시 S초 4학년 한 학급대상으로 검사 실시 및 학생선별
⇩	
검사지Ⅱ를 통한 면담	-선별된 학생을 대상으로 검사 실시 -학습지 분석 및 개인별 면담 실시
⇩	
자료 분석 및 결론도출	-학습지 및 면담 분석 -결론도출

본 연구에서 사용한 과제는 Thompson과 Carlson(2017)의 연구와 초기 대수 및 공변추론 선행연구에서 사용된 과제를 변형하여 초등학교 4학년 학생의 수준에 맞게 재구성한 것이다.

3. 자료 수집 및 분석

본 연구에서 사용된 자료로는 참여학생 선정을 위한 검사지Ⅰ, 선정된 학생들의 공변추론 과정을 확인하기위한 검사지Ⅱ([표 6] 참고), 면담내용을 녹음하고 전사한 자료, 연구자의 현장 기록물이 있다. 본 연구에서 사용된 과제들은 함수과제가 연속적으로 변하는 상황에서 그래프가 아닌 언어적 표현, 대응표, 패턴 등으로 구성하였다. 학생들은 검사지Ⅰ, Ⅱ를 개별적으로 수행한 후 연구자와 개별면담을 실시하였다. 이 과정에서 학생들의 활동지, 전사자료, 연구자의 관찰 기록을 바탕으로 분석에 활용하였고 초등학교 4학년 학생들의 공변추론 수준파악을 위해 Thompson과 Carlson(2017)의 공변추론 수준틀을 사용하였다([표 5] 참고). 학생들의 응답지와 면담의 검증을 위해서 연구자 및 동료 교사들의 의견 일치에 대한 삼각검증법을 적용하였다.

[표 5] 공변추론수준
(Thompson & Carlson, 2017, p. 441)
[Table 5] The levels of covariational reasoning(Thompson & Carlson, 2017, p. 441)

공변추론 수준	설명
부드러운 연속공변	두 변수의 변화가 동시에 발생하는 것으로 생각하며 모든 변수가 부드럽고 연속적으로 변한다고 상상한다.
덩어리 연속공변	두 변수의 변화가 동시에 발생하는 것으로 생각하며 모든 변수가 덩어리로 연속 변화한다고 상상한다.
값의 조정	한 변수 (x)의 값과 다른 변수 (y)의 값을 조정하여, 이산적 순서쌍(x, y)에 대한 집합을 만든다.
전체적인 값의 조정	“이 양이 증가함에 따라 다른 양이 줄어든다.”와 같이 변하는 양에 대한 전체적인 심상을 형성한다. 하지만 양들 각각의 값이 함께 변한다고 상상하지는 못한다. 대신에 두 양의 값의 전체적인 변화상에 곱셈적이지 않은 연결을 상상한다.
값의 조정 전	두 변수는 함께 변하지만 동시에 변하지는 않는다(처음 변수가 변하고, 다른 변수가 변하고, 또 처음 변수가 변하고..). 곱셈적 대상으로서 값들의 순서쌍을 만들지 못한다.
조정 없음	함께 변하는 두 변수에 대한 심상을 가지지 않고, 다른 변수의 값에 대한 조정 없이 한 변수의 변화에만 초점을 둔다.

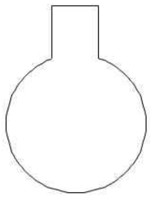
Ⅳ. 연구 결과

1. 연속적으로 공변하는 두 양에 대한 학생들의 공변추론 수준분석

연속적으로 공변하는 두 양에 대한 학생들의 공변추론 수준분석을 위하여 2가지 과제로 구성하였다. 각각의 과제는 변수가 연속적으로 변하는 상황이며, 각각의 변수의 값이 수로 제시되어 있지 않기 때문에 학생들은 연속적으로 변화하는 두 양의 변화를 상상해야 한다. 각각의 과제에 대한 학생들의 반응을 Thompson과 Carlson(2017)에서 제시한 공변추론 수준틀을 근거로 공변추론 수준을 확인하였다.

가. 과제1

유나가 아래와 같은 모양의 병에 **물을 붇는다면, 병 속 물의 양과 물의 높이는** 어떻게 될지 자세히 글로 나타내어보세요. (예를 들어 설명해도 됩니다.)



[그림 1] 과제 1: 물의 양과 높이 과제
[Fig 1] Task 1: Quantity and height of water

학생A와 학생B는 위 과제에 대하여 각각 '물을 병에 부으면 올라온다. 물병에 물이 넘친다.'와 '물이 조금씩 차질 것이다.'라고 응답하였다. 학생A와 학생B는 물이 차오르고 있는 것에 초점을 맞추었다. 두 학생 모두 물이 병 속에 채워지고 있는 심상을 가지고 있지만 연속적으로 변하고 있는 두 변수를 동시에 생각하지는 못하는 것으로 보이며, 한 변수의 변화에만 초점을 맞추고 있다. 학생A와 학생B는 물의 윗부분이 올라가고 있음을 상상하고 있었지만, 한 변수의 변화만을 표현하였다. 즉 두 학생 모두 물의 양과 물의 높이를 조정하지는 못하였기에 '조정 없음' 수준이다.

학생C는 과제1에 대하여 [그림 2]처럼 기록하였다.

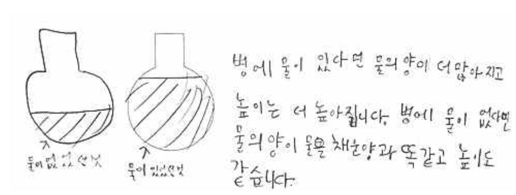
[그림 2] 과제1에 대한 학생C의 응답
[Fig 2] The response of student C on the task 1

연속적으로 변하고 있는 높이를 측정 가능한 수치로 물병의 높이를 잘라 '2cm'라고 표시하였다. 학생C는 연속적으로 변하고 있는 양을 상상하고 양의 속성이었던 물의 높이변화를 구체적인 값으로 표현하였다. 그러나 학생C의 그림만으로는 공변추론 수준을 측정하기 어려웠고, 그림에 표시한 선이 물의 양과 물의 높이를 동시에 나타내는지 여부를 알아보기 위한 학생C와 연구자의 대화내용은 아래와 같다.

연구자: 물이? 물이 2cm 정도 찰 것 같아?
학생 C: 네. 높이가.
연구자: 높이가 2cm 정도 될 것 같아?
학생 C: 네.
연구자: (물병의 선 아랫부분을 가리키며) 여기엔 물이 들어있어?
학생 C: ①네 거기에 물이 차 있어요.
연구자: 물을 이렇게 계속 더 부으면?
학생 C: 어…더 많이 붇는다면…(한 참 생각 후) (병의 윗부분을 가리키며)요정도 까지 될 것 같아요.
연구자: 요정도 까지 물이 올라갈 것 같아?
학생 C: ②네. 물을 더 부으면 요만큼 더 올라가요.

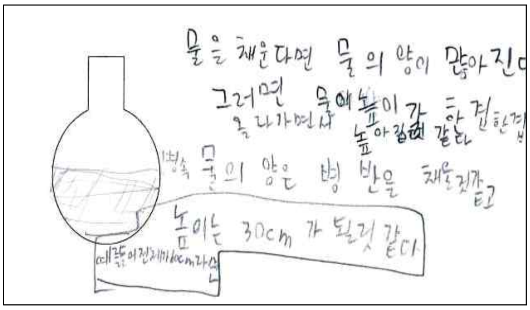
학생C는 ①, ②에서 두 변수가 변하는 있다는 것을 상상하고는 있지만 물의 높이와 물의 양이 동시에 변하는 것이 아니라 물을 더 부으면(물의 양이 변하면) 물의 높이가 순차적으로 변화하는 것으로 상상하였다. 이는 학생C가 물의 양의 변화와 물의 높이 변화를 조정하지 못하는 것 '값의 조정 전' 수준이라고 판단하였다.

[그림 3]에는 학생D 응답에서는 물의 양과 물의 높이라는 변수가 동시에 등장을 하며, 물을 넣을 경우 '물의 양이 더 많아지고, 물의 높이도 더 높아진다.'라고 기술하였다. 학생D는 물의 양과 물의 높이가 동시에 변하는 동적 심상을 가지고 있는 것으로 보이며, 전체적인 물의 양과 높이 변화를 기술하고 있기에 '값의 전체적인 조정' 수준이라 할 수 있다.



[그림 3] 과제1에 대한 학생D의 응답
[Fig 3] The response of student D on the task 1

학생E의 응답은 [그림 4]와 같다. 응답내용을 보면 학생E는 물의 양의 변화와 물의 높이변화를 상상하고 있으며 물의 양이 많아지면 물의 높이가 한 겹 한 겹 채워지는 것으로 설명을 하였다.



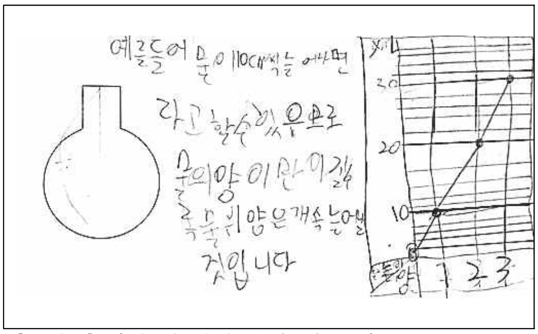
[그림 4] 과제1에 대한 학생E의 응답
[Fig 4] The response of student E on the task 1

하지만 학생E의 기록만으로 물의 양의 변화와 물의 높이변화를 학생이 동시에 일어나는 것으로 생각하는지 순차적으로 일어나는 것으로 생각하는지를 알 수가 없다. 그래서 연구자는 학생E와 대화를 통해 알아보고자 했으며 대화내용은 아래와 같다.

연구자: 물의 양과 높이에 대해 적었는데 설명을 해줄래?
학생 E: ① 물의 양이 많아지면서 물의 높이도 높아져요.
연구자: 아. 물의 양이 많아지면서 물의 높이도 높아진다는 말이지?
학생 E: ② 네. 물이 많아지면 한 겹 한 겹씩 채워지면서 그러면서 높이가 올라갈 것 같아요.
연구자: 그러니까. 물의 양이 많아지고 그러면서 물의 높이가 올라간다는 거지?
학생 E: 네.

병 속 물의 양과 물의 높이의 변화를 묻는 연구자의 질문에 학생E는 ①과 같이 응답을 하였다. 학생의 응답내용을 보면 학생E는 물의 양의 변화와 물이 높이의 변화가 동시에 일어나는 것으로 생각하였다. 이는 학생E가 두 변수 즉 물의 양과 물의 높이를 곱셈적 대상으로 만들었고 두 변수의 변화가 모두 동시에 발생한 것으로 생각한다는 것으로 볼 수 있다. 그리고 학생E는 ②에서 '한 겹, 한 겹씩 높아진다.'는 표현을 사용하여 연속적인 물의 높이변화를 수량화하기 위해 일정한 단위로 자르는 말과 그림을 표현하였다. 이는 학생E가 물의 높이에 대한 연속적인 변화의 심상을 가지고 있지만 변수 값을 일정한 단위로 잘라서 물의 양의 변화와 높이 변화를 조정하는 '덩어리 연속공변' 수준의 특징을 보인다고 할 수 있다.

학생F는 [그림 5]에서 과제1을 설명하기 위해 그래프를 그려 물의 양과 물의 높이 변화를 표현하였다. 가로축에는 물의 양을 그리고 세로축에는 물의 높이를 표시하였고, 물의 양과 높이를 수량화하며 표시하였다. 그리고 그래프에는 4개의 점이 찍혀있고 그 점들을 직선으로 연결하였다.



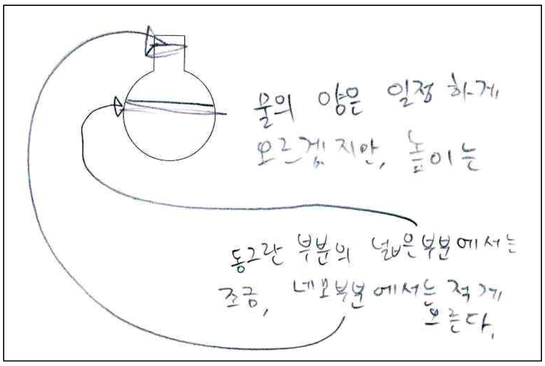
[그림 5] 과제1에 대한 학생F의 응답
[Fig 5] The response of student F on the task 1

학생F는 자신이 배운 꺾은선 그래프를 이용하여 이를 표시하였으며, 높이와 물의 양을 표시하기 위해 네 개의 점을 찍고 가로축에는 물의 양, 세로축에는 물의 높이를 표시하였다. 그리고 연구자와 대화에서 ①, ②의 내용을 보면, 학생E가 두 변수의 공변을 상상하고 있으며 물의 높이와 물의 양이라는 곱셈점 대상을 형성한 것으로 볼 수 있다.

연구자: OO이가 쓴 응답내용을 설명해줄래?
학생 F : 이게…그냥 물이 계속 많아질 거라고
-중략-
학생 F : 꺾은선으로.
연구자: 아 꺾은선으로 늘어나?
연구자: 어떻게?
학생 F : ① 같이 늘어나요.
연구자: (꺾은선 그래프위의 네 점을 가리키며)그러면 여기는 네 개만 해본거야?
학생 F : 네 개. 네.
연구자: 다섯 번째는 없어?
학생 F : 있어요.
연구자: 왜 안 그렸어?
학생 F : ② 쭉 늘어나니까.
연구자: 그럼 공간이 없어서 안 그린거야?
학생 F : 네.

학생F도 학생E와 같이 두 변수의 공변을 상상하고 있었지만 두 변수가 부드럽고 연속적으로 변화한다고 생각하기는 어려웠다. 학생F는 물의 양을 '1, 2, 3' 그리고 물의 높이를 '10, 20, 30'으로 표시하였다. 즉 변하는 두 양을 일정한 크기의 덩어리로 생각하고 있으며, 변수의 간격 또한 일정하였다. 이는 학생F가 변하는 양을 일정한 간격으로 잘라 그 대푯값을 이용한다고 할 수 있다. 때문에 학생F의 공변수준은 '덩어리 연속 공변'이라고 볼 수 있다.

[그림 6]에는 학생G가 과제1을 해결하기 위해 물병의 아랫부분과 윗부분을 구분하는 화살표 표시가 있고, 구분된 병의 부분에 대한 설명을 덧붙였다. 학생G는 그림에서 '물의 양은 일정하게 오르겠지만, 높이가 동그란 부분의 넓은 부분에서는 조금, 네모부분에서는 적게 오른다.'라고 적었다. 물병의 부분에 따라서 차오르는 높이가 '조금'과 '적게'로 다르게 표현되어있었다. 또한 응답지의 내용을 보면 학생은 물의 높이와 물의 양을 연속변수로 인식하고 있으며, 두 변수가 동시에 변하고 있다는 것을 알고 있는 것으로 보인다.



[그림 6] 과제1에 대한 학생G의 응답
[Fig 6] The response of student G on the task 1

학생G의 응답①을 보면 학생G는 물이 병에 들어가서 차오르는 모습이 아니라 그 전에 병속으로 물이 들어가는 모습부터 상상하고 있었다. 응답①에서 사용한 '빨리', '오래'라는 표현은 학생G가 물의 높이와 물의 양을 곱셈적 대상으로 만들지 못하고, 시간과 다른 변수를 고려하고 있다는 것을 의미한다. 이어진 연구자와 대화를 통해 학생G는 그 다음 병에 물이 차오르는 모습을 설명하였다. 설명 속에서는 학생G가 여전히 시간과 변수를 관련시키고 있었다. 연구자는 학생G가 응답지에서 물의 높이와 물의 양을 동시에 표현하고 있었기 때문에, 학생G에게 물의 양과 물의 높이의 공변에 대해 ②와 같이 물었고 학생G는 ③과 같이 대답하였다. 학생G는 자신의 생각을 설명함에 있어 잠시 혼란을 느낀 것으로 보였다. 하지만 [그림 6]과 ③의 대답으로 보아 두 가지 변수의 공변을 알고 있는 것으로 여겨졌다. 학생G는 물의 양의 변화와 높이의 변화가 동시에 머릿속에서 그려지고 있으며 그 시작이 물을 붓는 순간부터 계속되고 있다는 점을 알게 되었다. 다른 학생들과 다르게 연속적인 양의 변화를 일정한 단위로 잘라서 세거나 설명하지 않고, 물이 병의 입구를 통과하는 순간부터 물이 병의 바닥부터 차오르기까지를 연속적인 변화상황으로 인식하고 있다. 학생G의 공변추론 수준은 각 급간에서 물의 양과 물의 높이가 연속적이며 매끄럽게 변하는 것을 생각하면서, 동시에 여러 급간을 부드럽게 통과하는 물의 부피와 높이 모두를 상상하고 있으므로 '부드러운 연속공변' 수준이라 판단하였다.

연구자: 물을 붇는다면 어떻게 될지 설명해볼까?
학생 G: ①(물병의 입구부분과 목 부분을 가리키며) 이거 여기서는 여기부분에서는 이게 좁으니까 물이 들어올 때, 일정하게 들어온다고 할 때, 여기서 이렇게 그냥 좀 빨리 찰 것 같은데. (병의 아랫부분을 가리키며) 여기 넓은 부분은 이만큼이 다 차야 하니까 오래 걸릴 것 같아요.
연구자: 그러니까 물을 계속 부으면 차는데 시간이 걸린다는 의미니?
학생 G: (병의 아랫부분)여기서는 차는데 조금 시간이 걸리고 (병의 목 부분)여기서는 빨리빨리 올라갈 것 같아요. 높이가.
연구자: 아 그러면 밑에 부분에서는 물이 차는데 시간이 오래 걸린다는 말은 높이가 천천히 올라간다는 말이니?
학생 G: (병의 아랫부분을 가리키며)여기서는 높이가 천천히 오르고 (병의 목 부분을 가리키며)여기서는 높이가 빨리 올라요.
연구자: ②물의 양과 높이의 변화는?
학생 G: ③네. 그건 동시에요.

나. 과제2

미정이는 아래와 같은 모양의 양초에 불을 붙였습니다. **양초의 길이**와 **녹은 양초의 양**은 어떤 관계가 있을지 자세히 글로 나타내어보세요.

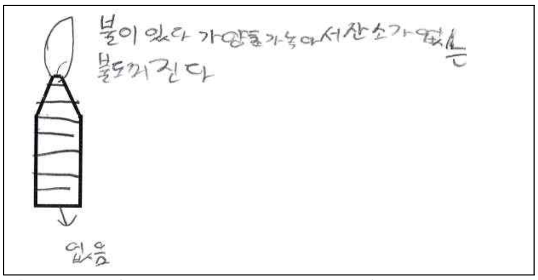
[그림 7] 과제2: 양초의 길이와 녹은 양
[Fig 7] Task 2: The length and melting amount of the candle

과제2에 대한 학생A와 학생B의 응답은 각각 '양초에 불을 붙이면 양초가 없어진다. 양초가 몇 분 있으면 녹는다.'와 '양초가 줄어든다.'였다. 학생A와 학생B는 공변하는 양초의 길이와 녹은 양초의 양에 대한 곱셈적 대상을 만들지 못하였으며 두 변수 중 하나의 변수에만 초점을 두고 있기에 '조정 없음' 수준이라고 볼 수 있다.

학생C는 과제2에 대하여 '3cm 줄어들 것 같다.'라고 적었다. 학생C와 연구자의 대화에서 학생C는 "양초가 녹는다면…한 3cm 정도 되겠는데…"라고 대답하였으며, 연구자가 3cm가 무엇에 대한 것인지를 묻자 "길이"라고 대답하였다. 학생C는 양초의 길이가 줄어드는 것에 대한 동적인 심상을 가지고 있고 양초의 길이를 수량화 하며 일정한 단위로 잘라서 생각하고 있었다. 또한 '양초가 녹는다면 3cm 정도의 길이가 되겠다.'는 응답에서 양초의 양이 변하면 그 다음 길이가 변하는 것으로 생각하고 있어 공변수준은 '값의 조정 전'이라고 할 수 있다.

학생D는 '양초의 양이 줄어든다. 그러면 같이 양초의 길이도 같이 짧아진다.'라고 기록하였다. 양초의 양과 양초의 길이가 같이 변하고 있음을 학생D는 생각하고 있었지만 과제에서 물어본 녹은 양초의 양이 아닌 지금 줄어들고 있는 양초의 양과 양초의 길이 변화를 생각하였다. 학생D는 연속적으로 변하는 두 양에 대한 전체적인 변화 심상을 갖고 있지만 양초의 길이나 녹은 양초의 양을 수량화하거나 변수의 값을 조정하고 있다는 점을 응답지나 대화에서 알 수 없었기에 '전체적인 값의 조정'수준이라고 할 수 있다.

학생E의 응답과 대화내용은 아래와 같다.



[그림 8] 과제2에 대한 학생E의 응답
[Fig 8] The response of student E on the task 2

연구자: 그러면 길이와 양초의 양은 어떤 관계가 있을 것 같아? 어떻게 될 것 같아?
학생 E: ① 양초의 길이는 줄어들고 녹은 양초의 양은 많아진다.
연구자: 근데 여기 선은 왜 그렸어?
학생 E: ② 점점 줄어드는 거.
연구자: 뭐가 줄어드는데?
학생 E: 길이가…
연구자: 길이가 점점 줄어든다는 것을 표현하려고?
학생 E: 네.

연구자와의 대화에서 학생E는 처음에 양초의 녹는 양과 양초의 길이 변화에 대해 동시에 이야기하지는 않았지만 양초의 길이가 점차 줄어들고 있다는 점과 녹은 양초의 양이 늘어나고 있다는 점을 대화를 통해 알 수 있었다. 학생E는 시간의 변화에 따른 양초의 녹은 양과 시간에 따른 양초의 길이변화를 대화를 통해 말하였다. 연구자가 양초의 길이와 양초의 녹은 양의 관계를 묻는 질문에 ①과 같이 대답한 것으로 보아, 두 변수를 곱셈적 대상으로 생각하고 있었고, 두 변수가 공변하는 것으로 생각하였다. 또한 양초의 그림에서 선에 대해 묻는 연구자의 질문에 ②와 같이 대답하였다. 즉 양초의 길이가 점점 줄어드는 것을 표현하기 위해 그렸다고 하였다.

학생E는 양초가 결국에는 없어지는 것을 생각하고 있었고, 그것을 양초그림의 제일 아랫부분에 '없음'이라고 적었으며, 양초가 녹아서 불도 꺼지는 상황까지 생각하고 있었으므로 연속적으로 변화하는 것을 알고 있었다. 하지만 양초의 길이를 덩어리 단위로 나누는 것을 보아 학생E가 두 변수의 공변을 매끄럽게 추론하는

것은 아니기 때문에 '덩어리 연속공변' 수준이라 할 수 있다.

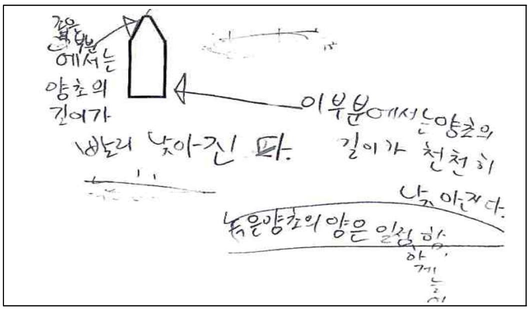
학생F와 연구자의 대화는 아래와 같다.

연구자: 어떻게 풀었는지 설명해줄래?
학생 F: ①양초의 길이가 10cm라고 할 때 약 1분에 1cm 녹아가지고 5분이면 될 때는 양초의 길이가 반이 사라지고…질수록… 아니 녹는 양초의 양초가 많아질수록 양초의 길이가 줄어들어요.
연구자: 음 녹은 양초가 많으면 길이가 줄어든다는 의미니?
학생 F: 네.
연구자: 그러니까 1분에 1cm씩 없어진다고 했을 때, 녹은 양초가 많아지면 길이는 줄어든다.
학생 F: 네.
연구자: 녹은 다음에 길이가 줄어드는 거야? 아니면 녹으면서 줄어드는 거야?
학생 F: ②녹으면서 줄어들어요.
연구자: 같이 줄어드는 거야?
학생 F: 네.

학생F는 처음에 연속하는 양 중 시간과 양초의 길이를 구체적인 수치로 양의 값을 가정을 한 후 ①과 같이 설명하였다. 하지만 설명과정 중에 학생F는 앞에서는 시간과 양초의 길이 변화에 말하였지만 말하는 도중 양초의 길이와 녹은 양초의 양의 변화를 이야기하였다. 다시 말해 학생F는 처음에는 시간과 양초의 녹은 양초의 길이를 곱셈적 대상으로 형성하였다. 하지만 자신의 응답을 설명하는 과정에서 시간이라는 변수를 대신 녹은 양초와 양초의 길이로 곱셈적 대상을 바꿔 설명하였다. 그리고 ②를 보면 녹은 양초와 양초의 길이는 동시에 변하고 있는 생각을 하고 있었다.

학생F는 자신이 경험으로 부터 시간과 양초의 길이를 '1분', '1cm'로 연속적인 양을 덩어리로 나누었다. 녹은 양초의 양을 수량화하지는 않았지만 녹은 양초의 양과 양초의 길이가 동시에 연속적으로 변하고 있다는 것을 상상하였고, 연속적인 양을 덩어리 지어 생각하고 있다는 점에서 '덩어리 연속공변' 수준이라고 할 수 있다.

학생G는 응답지 [그림 9]를 보면 양초의 윗부분과 아랫부분에 화살표로 표시한 후 양초의 윗부분에는 '좁은 부분에서는 양초의 길이가 빨리 낮아진다.'라고 적고, 양초의 아랫부분에는 '양초의 길이가 천천히 낮아진다.'와 '녹은 양초의 양은 일정하게 늘어남.'이라고 기록하였다. 응답 내용 중 '빨리', '천천히'라는 용어를 사용한 것으로 보아 학생G는 양초의 길이와 시간을 곱셈적 대상으로 연결하여 변화를 상상하는 것으로 보였다.



[그림 9] 과제2에 대한 학생G의 응답
[Fig 9] The response of student G on the task 2

학생G와 연구자의 대화에서 속도라는 용어를 사용하지는 않았지만 ①과 같이 윗부분에서는 '빨리 녹고', 아랫부분에서는 '조금 늦게 녹고'라는 표현을 사용하였다. 위 표현을 사용한 것은 학생G가 시간과 양초의 양을 대응시키고 있으며 시간과 양초의 양을 곱셈적 대상으로 생각하고 있는 것으로 보인다. 하지만 과제에서 묻는 것을 다시 상기시켜주고자 연구자가 양초의 길이와 양초의 녹은 양의 관계를 물었고 학생G는 ②와 같이 대답하였다. 처음에는 관계가 없는 것으로 대답했는데 다시 생각을 해 본 후 양초의 부분별로 시간과 양초의 길이 그리고 녹은 양초의 양의 변화를 한꺼번에 설명하고자 하였다.

이에 연구자는 다시 한 번 양초의 길이와 양초의 녹은 양의 관계에 대해서 질문을 하였고 학생은 ③과 같이 응답하였다. 이는 학생G가 양초의 길이와 양초의 녹은 양이라는 두 변수를 곱셈적 대상으로 만들었고, 두 변수가 동시에 변하고 있다는 것을 상상하고 있는 것으로 보인다. 그리고 학생G의 ③에 대한 응답을 연구자가 되묻자 학생G는 ④와 같은 대답을 하였다. ④의 응답을 보면 학생은 양초의 부분별로 양초의 양에 대해 생각하고 있으며 양의 값을 '조금', '조금 많이'와 같이 표현하고 있다. 그리고 양초의 윗부분과 아랫부분의 길이변화에 대한 녹은 양초의 양의 변화를 조정하며 표현하였다. 학생G는 두 변수가 연속적으로 공변

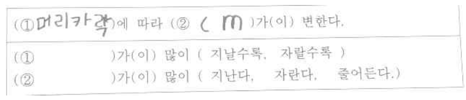
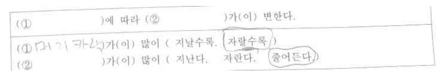
하고 있다는 사실을 생각하고 있으며, 양초의 길이변화나 양초의 녹은 양의 값을 일정 단위로 덩어리 짓는 표현을 하지 않고 양초의 윗부분부터 아랫부분까지 매끄럽게 변화하는 것을 상상한다고 볼 수 있다. 이에 학생G의 공변수준은 ‘부드러운 연속 공변’이라고 할 수 있겠다.

학생 G: (초의 윗부분을 가리키며)여기서는 이게 좁으니까 음 여기 이만큼의 양초길이는…어 양초가 여기는 좁게 있으니까 빨리 녹을 것 같고 (초의 아랫부분을 가리키며)여기는 조금 넓으니까 이만큼이 다 녹아야하고. ①(초의 윗부분을 가리키며)여기는 빨리 녹고, (초의 아랫부분을 가리키며)여기는 조금 늦게 녹고.
연구자: 아 그러니까 위쪽은 빨리 녹고 밑에는 늦게 녹는 다는 거지?
-중략-
연구자: 길이와 녹은 양초의 양은 어떤 관계가 있을까?
학생 G: 관계가 없지 않을까요.
연구자: 양초의 길이와 녹는 양초의 양이?
학생 G: 음… (초의 윗부분을 가리키며)여기서는 양초가 ②다시생각해보니 빨리 녹는데 양은 적게 나오겠네요. 조금 적게 나오겠네요. (초의 아랫부분을 가리키며)여기서는 조금 많이 나오고.
연구자: (초의 윗부분을 가리키며)여기는 적게 나온다는 거지? (초의 아랫부분을 가리키며)여기는 양초의 양이 녹는 게 많이 나오고?
학생 G: 네.
학생 G: (초의 아랫부분을 가리키며)여기는 이게 천천히 가는데 양은 많이 나오고. (초의 윗부분을 가리키며)여기는 녹는 게 빨리 녹는데 양초의 양은 조금. 조금 나오고…
연구자: 그럼 이 두 개를 관계시켜 얘기해보면? 길이와 녹는 양초의 양은 관계가 있을까?
학생 G: ③ (한참 생각을 한 후)어… 이게 길이가 낮아질수록 양초의 양이 많아져요. 녹은 양초의 양이.
연구자: 길이가 점점 줄어들수록 양초의 양이 많아진다는 거지?
학생 G: 녹은 양초의 양이.
연구자: 두 부분 다 똑같은가?
학생 G: ④(초의 윗부분을 가리키며)여기서는 그럼 조금 양초가 있는 부분이 좁으니까 여기서는 조금. (초의 아랫부분을 가리키며)여기서는 조금 많이.

2. 양적 문제 상황에서 학생들의 공변추론수준에 따라 나타나는 추론 과정분석

가. ‘조정 없음’ 수준 학생들의 추론과정(학생A, 학생B)

‘조정 없음’ 수준의 학생들은 함수적과제에서 변수를 찾는 과제3에서 두 가지 변수 중 한 가지변수의 변화에만 초점을 맞추었고, 두 변수를 찾지 못하였다([그림 10] 참고).

학생A	
학생B	

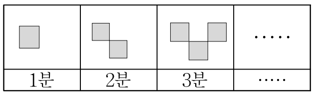
[그림 10] 3-(2)문항에 대한 학생A와 학생B의 응답
[Fig 10] The response of student A and B on the task 3-(2)

또한 일상에서 연속적으로 변하고 있는 ‘시간의 변화’를 변수로 인식하는 못하는 것으로 보였다. 과제를 해결하는 과정을 보면 시간과 머리카락의 길이 변화를 관련시키기 보다는 과제 속 ‘일주일에 1cm씩 자랍니다.’라는 문구를 하나의 기준으로 사용하여 과제를 해결한 것으로 보였다.

학생A와 학생B는 과제4를 해결하는 과정이 비슷하였다. 학생A는 과제4를 받자마자 대응표를 확인한 후 시간부분의 칸을 채운 후 아래 케이크의 수부분의 칸을 채웠다. 학생A에게 8시간 다음부분의 해당하는 시간을 물었을 때 학생A는 “2씩 늘어난다.”라고 말하였다. 학생A는 대응표의 시간부분에서 2, 4, 6, 8을 통해 2씩 늘어나는 패턴을 알아냈고, 그 다음 칸에 10, 12를 기록하였다. 이는 학생A가 앞선 수의 배열에서 원하는 값을 재귀적 패턴으로 구했다는 것을 말해준다.

또한 학생A는 대응표의 시간부분을 다 기록한 후 똑같은 방식으로 케이크의 수에 해당하는 부분 채웠다. 이 부분에서 학생A는 시간이 순차적으로 2씩 늘어나고 있다는 것과 케이크 수가 4개씩 늘어나고 있다는 것을 찾아냈다고 할 수 있겠다. 함수적 상황에 대응표가 그려져 있는 경우 학생들은 언어적 상황과 그림보다는 대응표를 보고 변수의 증가에 대한 일정한 패턴을 찾으려고 하였고, 앞서 발견한 일정한 규칙을 이용하여 그 다음 값을 찾아냈다. 이는 두 가지 변수의 공변을 생각하며 과제를 해결한 것이 아니라 변수 각 각

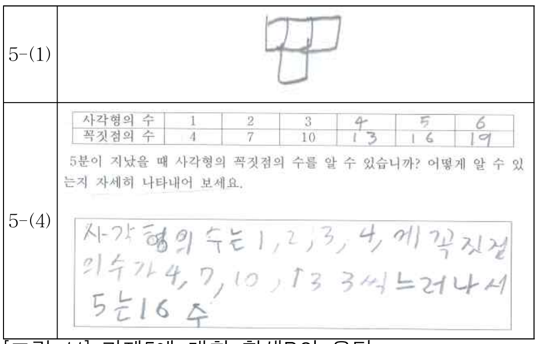
[표 6] 검사지II의 과제
[Table 6] Tasks in the test II

<table>
<tr>
<td>오늘 아침에 재어보니 민수의 머리카락의 길이가 4cm였습니다. 민수의 머리카락은 1주일에 1cm씩 자랍니다.
(1) 민수의 머리카락 길이는 앞으로 어떻게 되는가?
(2) 변수 찾기
(①)에 따라 (②)가(이) 변한다.
(①)가(이) 많이 (지날수록, 자랄수록)
(②)가(이) 많이 (지난다, 자란다, 줄어든다.)
(3) 5주 후 머리카락 길이는?
(4) 지난주 머리카락 길이는?</td>
<td>유나아버지의 빵집에서는 기계를 이용하여 <u>매 시간마다 쉬지 않고</u> 케이크를 만들고 있습니다. 유나는 케이크가 얼마나 만들어지는지를 표로 나타내어보았습니다.
<table><tr><td>시간</td><td>2</td><td>4</td><td>6</td><td>8</td><td></td><td></td></tr><tr><td>케이크의 수</td><td>5</td><td>9</td><td>13</td><td>17</td><td></td><td></td></tr></table>(1) 10시간이 되면 만들어지는 케이크의 수는?
(2) 11시간이 되면 만들어지는 케이크의 수는?</td>
<td>그림을 쉬지 않고 그리는 로봇이 있습니다. 아래는 로봇이 시간별로 그린 그림입니다.


(1) 4분에 나타날 모양은?
(2) 그림 속 변화 나타내보기
(3) 대응표 채우기
<table><tr><td>시간(분)</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>사각형의 수</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr></table>(4) 5분 후 사각형의 꼭짓점 수?
<table><tr><td>사각형의 수</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td></td><td></td></tr><tr><td>꼭짓점의 수</td><td>4</td><td>7</td><td>10</td><td></td><td></td></tr></table></td>
</tr>
<tr><td>과제3</td><td>과제4</td><td>과제5</td></tr>
</table>

의 변화에 대해 알아낸 후 대응표를 이용하여 문항에서 물어보는 값을 찾은 것으로 볼 수 있다.

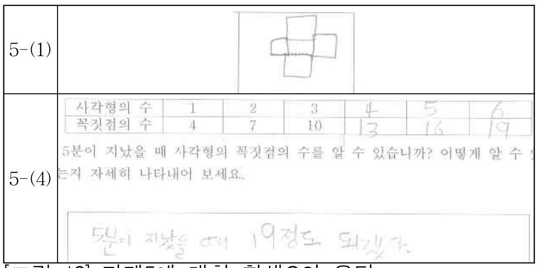
과제5에서 학생A와 학생B는 증가하고 있는 기하학적 패턴에 초점을 두기보다는 대응표에 적힌 숫자에 관심을 두고 과제를 해결하였다. 학생B가 그린 4분 후의 사각형에서는 꼭짓점의 수가 10개이지만 5-(4)문항의 대응표에서는 '13'으로 적었다([그림 11]). 학생B는 5-(4)문항의 대응표를 채우는 과정에서 5-(1)문항의 모양을 이용하여 해결한 것이 아니라 대응표에 적힌 각각의 숫자자료에서 패턴을 찾은 후 문제를 해결한 것으로 보인다. 또한 학생A와 학생B의 과제해결과정을 연구자가 지켜본 결과 과제2와 동일하게 두 학생은 시간을 먼저 다 채운 후 사각형의 수를 채운 후 과제에서 요구하는 답을 대응표에서 찾아 기록하였다.



[그림 11] 과제5에 대한 학생B의 응답
[Fig 11] The response of student B on the task 5

나. '값의 조정 전' 수준 학생의 추론과정(학생C)

학생C는 과제3의 해결과정에서 두 가지 변수가 모두 변하고 있다는 것을 알고는 있지만 그 변수들이 순차적으로 변하는 것으로 생각하고 있었고, 함수적상황이 대응표로 제시된 경우 언어적 상황보다 쉽게 해결하였다. 하지만 과제5에서 대응표와 그림이 동시에 제시되었을 경우 학생C는 시간의 변화에 따른 사각형 패턴을 예상하기는 했지만 그것을 이용하지 않고 대응표에 적힌 숫자들을 이용하여 규칙을 찾았다([그림 12] 참고).



[그림 12] 과제5에 대한 학생C의 응답
[Fig 12] The response of student C on the task 5

또한 대응표를 기록하는 과제4와 과제5의 문항들에서 각각의 변수를 동시에 변하는 것으로 생각하지 않고 재귀적 패턴을 이용하여 변수의 증가패턴을 각각 순차적으로 기록하였다. 그리고 문항에서 묻는 한 변수의 값에 대응하는 값을 대응표를 보며 해결하였다.

다. '값의 전체적인 조정' 수준 학생의 추론과정(학생D)

'값의 전체적인 조정' 수준의 학생D는 과제3에서 머리카락의 길이와 시간이라는 두 변수를 언어적으로 표현된 함수상황에서 찾았고, 두 변수의 공변을 이용하여 과제를 해결하였다.

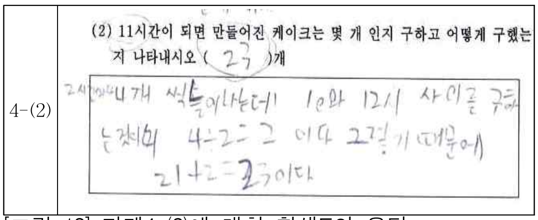
과제4에서 학생D의 앞의 학생들과는 다르게 대응표에서 시간변수의 변화와 케이크의 수에 대한 변화를 살펴본 후 자신이 찾은 규칙에 맞게 해당하는 숫자들을 10, 21, 12, 25와 같이 시간과 케이크의 수를 하나의 쌍으로 하여 기록하였다. 그리고 10시간이 되었을 때 케이크의 수를 해결하는 과정에서도 '2시간 마다 4개가 만들어진다.'라고 적으며 시간과 케이크수의 대응을 이용하였다. 이는 학생D가 연속적으로 변하는 두 양을 하나의 곱셈적 대상으로 형성하였으며 두 양의 변화관계를 파악하고 있는 것으로 보였다. 학생D가 기록한 대응표에는 나와 있지 않은 11시간에 대응하는 케이크의 수를 묻는 4-(2)문항에서 11시간이 10시와 12시의 사이에 있는 수이기 때문에 그에 대응하는 케이크 수의 변화도 4개의 반인 2개라고 응답하였고, 23개라고 적었다. 학생D는 두 변수가 모두 공변하고 있다는 것을 알고 있는 것으로 보였으며, 이는 한 변수 (x)의 값과 다른 변수 (y)의 값을 대응시켜 이산적 순서쌍(x, y)에 대한 집합을 만드는 '값의 조정' 수준 이상으로 여겨졌다.

과제5에서 학생D도 사각형의 수의 변화에 대한 꼭짓점의 수의 변화의 관계를 알아보는데 그림패턴을 확인하지 않고 대응표에 기록된 숫자를 통해 규칙을 찾는 모습이 보였다. 또한 학생D는 '사각형의 수가 1개씩 늘어날 때 마다 꼭짓점의 수가 3개씩 늘어난다.'와 같이 두 양의 변화를 관계 지어 표현할 수 있었고, 특정 변수의 값에 대응하는 다른 변수의 값을 찾을 수 있었다.

라. '덩어리 연속공변' 수준 학생들의 추론과정(학생E, 학생F)

'덩어리 연속공변' 수준의 학생들(학생E, 학생F)은 언어적으로 표현된 함수상황 속에서 두 가지 변수(시간과 머리카락의 길이)를 모두 찾았고. 두 변수의 공변을 응답지에 표현하였다.

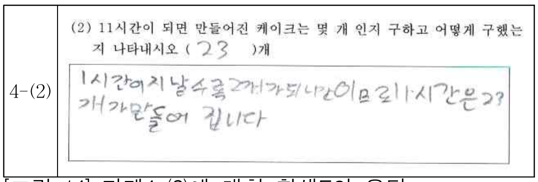
또한 어느 수준의 연속공변을 추론하고 있는지 알아보기 위해 시간변수를 작게 나눈 연구자의 질문에 학생E는 1주일과 1일에 대응하는 머리카락의 길이 값은 조정을 하였으나 더 작은 단위인 1분에에 대응하는 길이 값은 조정을 하지 못하였고 학생F는 1주일, 하루, 1분의 변화에 대응하는 머리카락 길이변화를 조정하였지만 구체적인 길이의 단위로 표현하지는 않았다.



[그림 13] 과제4-(2)에 대한 학생E의 응답
[Fig 13] The response of student E on the task 4-(2)

11시간에 해당하는 케이크의 수를 구하는 4-(2)문항에서 학생E는 10시간과 12시간에 해당하는 케이크 수의 값을 사용하여 중간 값인 11시간의 케이크 수를 구하였다(그림 13] 참고). 이는 Castillo-Garsow, Johnsom과 Moore(2013)에서 덩어리 짓는 사고를 하는 학생들은 특징을 보였다고 할 수 있다.

반면 학생F는 11시간의 케이크 수를 구하기 위해 10시간에서 1시간이 흐른 것으로 보고 1시간에 대응하는 값을 구하여 11시간의 값을 구하였다([그림 14] 참고).



[그림 14] 과제4-(2)에 대한 학생F의 응답
[Fig 14] The response of student F on the task 4-(2)

학생E는 시간의 흐름을 10시간→12시간→11시간으로 생각하여 문제를 해결했다면 학생F는 10시간→11시간으로 시간을 순차적으로 흐르는 것으로 생각한 후 문제를 해결하였다. 과제5에서 학생E와 학생F는 세 가지 변수(시간, 사각형의 수, 꼭짓점의 수)를 이용하여 조건에 맞추어 곱셈적 대상으로 시간과 사각형의 수, 사각형의 수와 꼭짓점의 수, 그리고 시간과 꼭짓점의 수로 바꿀 수 있다는 점을 알 수 있다.

마. '부드러운 연속공변' 수준 학생의 추론과정(학생 G)'부드러운 연속공변' 수준의 학생G는 과제3에서 함수상황 속에서 두 가지 변수(시간과 머리카락의 길이)를 모두 찾았고. 변수의 공변도 알고 있었다. 연구자가 변화하는 시간의 구간을 하루에서 3초, 천분의 1초로 시간의 단위를 점점 작은 단위로 변화시켜 머리카락의 변화를 물었을 때 학생G는 머리카락의 길이도 '$\frac{1}{7}$cm', '아주아주 조금', '더 조금' 등과 같이 변화 값을 조정시켰다.

연구자:	오늘 쟀을 때 머리카락 길이가 4cm 였잖아. 그럼 내일은?
학생 G:	①그거는 1을 7로 나눠서…
연구자:	그러면 오늘 시작을 했는데 3초만큼이 지났다면?
학생 G:	②아주아주 조금 자랐을 거예요.
연구자:	그럼 천분의 1초만큼 지났다면?
학생 G:	③그러면 더 조금 자라겠죠.

또한 11시간에 대응하는 케이크 수의 값을 알아보기 위해 10시간에서 11시간으로 시간의 흐름을 순차적으로 생각하였고, 부드러운 연속공변을 하고 있는지 알아보기 위해 시간단위를 1시간에서 5분으로 더 작게 나누어 물어봤을 때에도 학생G는 공변하는 케이크 수의 변화 값을 생각하고 있었다.

패턴그림과 대응표로 구성된 과제5에서 학생G는 사각형의 수와 꼭짓점의 수를 곱셈적 대상으로 형성하였으며, 시간의 덩어리 단위를 작은 단위로 쪼개도 학생G는 공변하는 변수 값을 조정하여 그 변화를 응답하였다.

V. 결론

이 연구에서는 Thompson과 Carlson(2017)의 공변추론 수준틀을 이용하여 연속적으로 공변하는 함수 상황에서 학생들의 공변추론 수준을 살펴보았다. 그리고 공변추론 수준차이가 다른 학생들이 변수 값이 구체적인 숫자로 주어진 양적 문제 상황 하에서 어떤 추론과정을 보이는지를 분석한 결과 다음과 같은 결론을 얻을 수 있었다.

첫째, 연속적으로 공변하는 두 양에 대한 학생들의 공변추론 수준은 5가지로 파악되었다. 과제상황에서 한 변수의 변화만을 생각한 '조정 없음' 수준 2명, 두 변수의 변화를 알고 있지만 공변이 아닌 순차적으로 파악한 '값의 조정 전' 수준 1명, 두 변수의 공변에 대한 심상이 있고 변수들의 전체적인 변화만을 생각한 '전체적인 값의 조정' 수준 1명, 두 변수의 공변을 생각하며 변수 값들의 변화를 덩어리변화(일정한 간격)로 생각한 '덩어리 연속공변' 수준 2명, 그리고 두 변수의 공변을 생각하며 변수 값들의 변화를 연속적인 부드러운 형태로 생각한 '부드러운 연속공변' 수준 1명으로 나타났다.

둘째, '조정 없음' 수준의 학생들은 과제3에서 한 가지 변수변화에만 초점을 두었고, 함수적 상황이 언어적 표현, 패턴, 대응표로 같이 제시된 과제5에서는 과제해결을 위해 주로 대응표를 보고 변수 증가 패턴을 찾으려고 하였다. '값의 조정 전' 수준의 학생은 과제들에서 두 변수의 변화를 파악하였지만 두 변수 변화를 동시에 생각하지 않고 순차적으로 파악하였으며, 주로 대응표를 보고 변수의 증가패턴을 찾아 과제를 해결하였다. '값의 전체적인 조정' 수준의 학생은 과제들에서 두 변수를 찾아냈고, 이전 수준 학생들과 같이 대응표에 기록된 숫자를 통해 변수의 증가패턴을 찾는 모습을 보였다. 하지만 두 변수의 관계를 표현하였고 특정 변수 값에 대응하는 다른 변수의 값을 찾아냈다. '덩어리 연속공변' 수준과 '부드러운 연속공변' 수준의 학생들은 양적 문제 상황에서 변수들을 파악하고 두 변수의 공변을 알고 있었으며 과제5에서는 언어표현, 패턴, 대응표 모두를 이용하여 과제를 해결하였다. 하지만 중간 값을 구하는 과제4에서 '덩어리 연속공변' 수준의 학생들은 시간 변수의 순차적 흐름(10시간→11시간)과 역순(10시간→12시간→11시간)흐름을 이용하여 과제를 해결하는 모습을 보였고 작은 단위의 시간 변수의 흐름은 생각하지 못한 반면 '부드러운 연속공변' 수준의 학생은 시간변수의 순차적인 흐름(10시간→11시간)을 이용하였고 시간이 연속적으로 변화함을 알고 과제를 해결하였다.

연구 결과로부터 다음과 같은 시사점을 얻을 수 있다.

첫째, 공변추론 수준을 파악하고 신장을 위해서는 초등학교 함수학습 시 두 양 사이의 변화의 의미에 초

점을 주는 지도 방식도 필요하다. Thompson과 Carlson(2017)은 현대 함수의 의미는 '한 변수에 다른 변수가 하나씩 대응하는 것'으로 본 Dirichlet와 집합의 개념으로 설명한 Cantor의 이론에 바탕을 두었기에 과거 Euler나 Leibniz가 연속적인 변화상황에서 함수란 용어를 사용한 것과 달리 현대 함수에서는 대응관계가 강조되었다고 본다. 때문에 현대 함수이론에 따라 우리나라 교육과정도 함수의 연속적인 변화보다는 대응관계에 초점을 두고 있다. 하지만 두 양이 어떻게 관련되어 변하는지를 분석하고 설명하는 것은 함수적 사고의 중요한 측면이라고 할 수 있기에(Blanton et al., 2011), 두 양의 변화를 분석하는 지도가 필요하다.

둘째, 학생들에게 제시되는 과제유형에 따라 공변추론 수준이 다르게 파악될 수 있다. 학생들이 함수과제를 해결하였다고 하여 그 학생들이 동일한 공변추론 수준임을 의미하는 것이 아니며, 변수 값이 구체적인 수치로 제시되었는지 여부, 함수상황이 제시된 형태 등에 따라 학생들의 나타나는 공변추론 수준이 다르게 파악될 수 있었다. 때문에 교사는 과제해결 여부뿐 만 아니라 추론과정을 확인하여 학생들의 공변추론 수준을 파악할 필요가 있다.

셋째, 공변추론 수준이 낮은 학생들에게는 다양한 형태의 함수과제가 제공되어야 한다. 공변추론 수준이 낮은 학생의 경우 함수과제의 형태가 과제해결에 영향을 주었다. 초등학교 4학년 수학과 교과서의 규칙과 대응단원의 문제들은 함수상황이 대응표와 함께 제시되어있다. 대응표의 이용은 학생들이 문제를 해결하고 함수의 대응관계를 파악하는데 도움을 줄 수 있다. 하지만 함수에 대한 이해가 낮은 학생들은 대응표를 함수상황에 대한 이해보다 대응표에 적인 숫자들의 규칙을 이용하여 문제를 해결하는 도구로 이용할 수도 있다. 따라서 함수과제의 형태를 다양하게 제시하여 학생들에게 함수에 대한 여러 접근방법을 경험하게 도와준다면 함수적 사고 신장에 도움이 될 것으로 생각된다.

참 고 문 헌

교육부(2015). 고시 제2015-74호 [별책 8호] 수학과 교육과정.

The Ministry of Education (2015). *2015 Revised mathematics curriculum*. The Ministry of Education Notice 2015-74.

김정원, 방정숙(2008). 초등학교 3학년 학생들의 함수적 사고 분석. 한국수학교육학회지 시리즈 C <초등수학교육>, 11(2), 105-119.

Kim, J. W. & Pang, J. S. (2008). An analysis of third graders' functional thinking. *Journal of the Korean Society of Mathematical Education Series C : Education of Primary School Mathematics, 11*(2), 105-119.

김채연, 신재홍(2016). 연속적으로 공변하는 두 양에 대한 추론의 차이가 문제 해결에 미치는 영향. 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육>, 55(3), 251-279.

Kim, C. Y. & Shin, J. H. (2016). How does the middle school students' covariational reasoning affect their problem solving. *Journal of the Korean Society of Mathematical Education Series A: The Mathematical Education, 55*(3), 251-279.

박종희, 신재홍, 이수진, 마민영(2017). 그래프 유형에 따른 두 공변 추론 수준이론의 적용 및 비교. 수학교육학연구, 27(1), 23-49.

Park, J. H., Shin, J. H., Lee, S. J., & Ma, M. Y. (2017). Analyzing students' works with quantitative and qualitative graphs using two frameworks of covariational reasoning. *Journal of Educational Research in Mathematics, 27*(1), 23-49.

방정숙, 최인영. (2016). 초등학교 3학년 학생들의 대수적 사고에 대한 실태 분석. 한국수학교육학회지 시리즈 C <초등수학교육>, 19(3), 223-247.

Pang, J. S. & Choi, I. Y. (2016). An analysis of algebraic thinking by third graders. *Journal of the Korean Society of Mathematical Education Series C: Education of Primary School Mathematics, 19*(3), 223-247.

송윤오(2016). Algebra Applet을 활용한 교수실험에서 초등학생들의 공변 추론 수준 분석, 석사학위논문, 한국교원대학교.

Song, Y. O. (2016). An analysis of elementary students' covariational reasoning level in teaching experiment using algebra applet.

Master's thesis at KNUE.

우정호, 김성준. (2007). 대수의 사고 요소 분석 및 학습-지도 방안의 탐색. 수학교육학연구, 17(4), 453-475.

Woo, J. H. & Kim, S. J. (2007). Analysis of the algebraic thinking factors and search for the direction of its learning and teaching. *Journal of Educational Research in Mathematics, 17*(4), 453-475.

우정호(2007). 학교수학의 교육적 기초. 서울: 서울대 출판부.

Wu, J. H. (2007). An educational foundation of school mathematics. Seoul: SNU.

전형옥, 이경화, 방정숙. (2009). 초등학교 6학년 학생의 양적 추론 사례 연구. 수학교육학연구, 19(1), 81-98.

Jeon, H. O., Lee, K. H., & Pang, J. S. (2009). Case study of the sixth grade students' quantitative reasoning. *Journal of Educational Research in Mathematics, 19*(1), 81-98.

최지영, 방정숙. (2012). 초등학교 2, 4, 6학년 학생들의 함수적 관계 이해 실태 조사. 학교 수학, 14(3), 275-296.

Choi, J, Y. & Pang, J. S. (2012). An analysis of elementary school students' understanding of functional relationships. *Journal of Educational Research in Mathematics, 14*(3), 275-296.

Blanton, M. & Kaput, J. J. (2011). Functional thinking as a route into algebra in the elementary grade. In J. Cai & E. Knuth (Eds.), *Early algebraization* (pp. 5-23). Berlin. Heidelberg: Springer.

Blanton, M., Levi, L., Crites, T., Dougherty, B., & Zbiek, R. M. (2011). *Developing essential understanding of algebraic thinking for teaching mathematics in grades 3-5*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Blanton, M., Stephens, A., Knuth, E., Gardiner, A. M., Isler, I., & Kim, J. S. (2015). The development of children's algebraic thinking: The impact of a comprehensive early algebra intervention in third grade. *Journal for Research in Mathematics Education, 46*(1), 39-87.

Brizuela, B. M., Blanton, M., Sawrey, K., Newman-Owens, A., & Gardiner, M. A. (2015). Children's use of variables and variable notation to represent their algebraic ideas. *Mathematical Thinking and Learning, 17*(1), 34-63. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Carlson, M. P. (1998). A cross-sectional investigation of the development of the function concept. In J. J. Kaput, A. H. Schoenfeld, & E. Dubinsky (Eds.), *Research in collegiate mathematics education*, 3, CBMS issues in mathematics education (Vol. 7, pp. 114-162). Washington DC: Mathematical Association of America.

Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S., & Hsu, E. (2002). Applying covariational reasoning while modeling dynamic events: A framework and a study. *Journal for Research in Mathematics Education, 33*(5), 352-379.

Carraher, D. W. & Schliemann, A. D. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. In F. K. Lester Jr (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 669-705). Charlotte, N.C.: Information Age.

Castillo-Garsow, C. C. (2012). Continuous quantitative reasoning. In R. Mwyes, R. Bonillia, L. L. Hatfield, & S. Belbase (Eds.), *Quantitative reasoning: Current state of understanding*, WISDOMe Monographs (Vol. 2, pp. 55-73). Laramie: University of Wyoming.

Chazan, D. (2000). *Beyond formulas in mathematics and teaching: Dynamics of the high school algebra classroom*. NY: Teachers College Press.

Cooney, T, P., Beckmann, S., Gwendolyn, M., & Lloyd, G. M. (2010). *Developing essential understanding of functions for teaching mathematics in grades 9-12*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Confrey, J. & Smith, E. (1994). Exponential functions, rate of change, and the multiplicative unit. *Educational Studies in Mathematics, 26*, 135-164.

Kaput, J. J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? In J. J. Kaput, D. W. Carraher & M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 235-272). New York: Lawrence Erlbaum Associates.

Saldanha, L. & Thompson, P. W. (1998). Re-thinking co-variation from a quantitative perspective: Simultaneous continuous variation. In S. B. Berenson & W. N. Coulombe (Eds.), *Proceedings of the annual meeting of the psychology of mathematics education-north america* (Vol. 1, pp.298-304). Raleigh, NC: North Carolina State University. Retrieved on November 1, 2017 from http://bit.1y/1b4sjQE

Smith, J. & Thompson, P. W. (2008). Quantitative reasoning and the development of algebraic reasoning. In J. Kaput, D. W. Carraher, & M. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 95-132). New York: Lawrence Erlbaum Associates.

Thompson, P. W. (2011). Quantitative reasoning and mathematical modeling. In L. L. Hatfield, S. Cahmberlain, & S. Belbase (Eds.), *New perspectives and directions for collaborative research in mathematics education,* WISDOMe Monographs (Vol. 1, pp. 33-57). Laramie, WY: University of Wyoming.

Thompson, P. W. (2016). Researching mathematical meanings for teaching. In L. English & D. Kirshner (Eds.), *Third handbook of international research in mathematics education* (pp. 435-461). New York, NY: Taylor & Francis.

Thompson, P. W. & Carlson, M. P. (2017). Variation, covariation, and functions: Foundational ways of thinking mathematically. In J. Cai (Ed.), *Compendium for research in mathematics education* (pp. 421-456). *Nation*al Council of Teachers of Mathematics.

A Case Study on the Students' Covariational Reasoning in the Continuous Functional Situations

Hur, Joonho
Department of Mathematics Education, Graduate School of Education,
Seoul National University of Education
Sechojungang-ro 96, Seocho-Gu, Seoul, Korea
E-mail : juno.hur@gmail.com

Park, Mangoo†
Department of Mathematics Education, Seoul National University of Education,
Sechojungang-ro 96, Seocho-Gu, Seoul, Korea
E-mail : mpark29@snue.ac.kr

The purpose of this study is to investigate the effects of cognitive activity on cognitive activities that students imagine and cope with continuously changing quantitative changes in functional tasks represented by linguistic expressions, table of value, and geometric patterns, We identified covariational reasoning levels and investigated the characteristics of students' reasoning process according to the levels of covariational reasoning in the elementary quantitative problem situations. Participants were seven 4th grade elementary students using the questionnaires. The selected students were given study materials. We observed the students' activity sheets and conducted in-depth interviews. As a result of the study, the students' covariational reasoning level for two quantities that are continuously covaried was found to be five, and different reasoning process was shown in quantitative problem situations according to students' covariational reasoning levels. In particular, students with low covariational level had difficulty in grasping the two variables and solved the problem mainly by using the table of value, while the students with the level of chunky and smooth continuous covariation were different from those who considered the flow of time variables. Based on the results of the study, we suggested that various problems related with continuous covariation should be provided and the meanings of the tasks should be analyzed by the teachers.

* ZDM Classification : B55
* 2000 Mathematics Subject Classification : 97C70
* Key Words : covariational reasoning, early algebra, functional thinking
† Corresponding author