韓國數學敎育學會誌 시리즈 E <數學敎育 論文集>
https://doi.org/10.7468/jksmee.2018.32.2.131
제 32집 제 2호, 2018. 5. 131-146

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E:
Communications of Mathematical Education
Vol. 32, No. 2, May. 2018. 131-146

미분의 이해에 대한 연구

오 혜 영 (인천대학교)

미분학은 적분학과 더불어 수학, 자연과학, 공학 등에서 널리 응용되는 중요한 분야이다. 도함수는 미분학의 중요 개념인데, 학생들은 이것의 개념을 제대로 파악하지 않은 채 정형화된 계산 문제를 푸는 기능 습득에만 치중하고 있어 미분에 대한 개념적 이해는 매우 빈약한 상태이다. 이에 본 연구에서는 학부 학생들을 대상으로 미분에 대한 설문조사를 실시하여, 미분학 문제를 풀 때 나타난 오류를 분석하고 도함수에 내재한 극한과정의 수학화 과정과 도함수에 대한 역사적 발달과정을 살펴보고자 한다. 이 과정을 통해 미분의 이해도를 분석하고 이에 대한 결과를 제시하고자 한다.

Ⅰ. 서론

미분학은 적분학과 더불어 수학, 자연과학, 공학 등에서 널리 응용되는 중요한 분야이다. 물리학의 일률, 화학의 반응율, 경제학의 한계비용 등과 같이 자연과학 및 공학, 사회과학의 변화율과 관련된 다양한 문제에 미분학의 개념이 응용되고 있다. 변화율은 미분학의 중요 개념인데, 학생들은 이것의 개념을 제대로 파악하지 않은 채 정형화된 계산 문제를 푸는 기능 습득에만 치중하고 있다. 그리하여 계산은 능숙하나 미분에 대한 개념적 이해는 매우 빈약한 상태이다.

Orton(1983), Tall(1991,1992), Tall&Vinner(1981) Zandieh(2000)의 연구는 학생들이 도함수에 내재한 극한과정을 다루는데 어려움을 가지고 있음을 나타내고 있으며, 조완영(2006, 2012)은 고등학생 대상의 미적분에서의 수학화 교수 학습에 대하여 연구하고, 김정희(2005)는 고등학생 대상의 미적분에서의 오류 분석에 대하여 연구했다. 그러나 미분의 역사를 분석하여 대학 학부생을 대상으로 도함수의 수학화 과정에 대해 연구한 논문은 많지 않은 실정이다.

대학에서는 코시의 정리에 근거해서 미분 이론을 전개하는데, 미분의 개념은 해석학에서 중요한 정리인 평균값 정리와 결과들을 이해하는데 기초가 된다. 미분학에 대한 개념 이해와 미분학의 문제에 대한 오류분석은 해석학뿐만 아니라 고학년의 복소해석학, 미분기하학의 기본 개념 파악을 위해서도 필요한 일이다.

미분학은 역사적 분석이 풍부한 수학 연구 분야이다. 17세기에 극값의 문제보다 접선을 구하는 것이 더 흥미로운 문제였다. 주어진 곡선의 방정식 $y=f(x)$에 대하여 페르마, 데카르트, 월리스, 배로와 다른 많은 17세기의 수학자들은 접선을 구할 수 있었다. 페르마와 배로 및 당시 일부 학자들의 연구에 힘입어 미분 과정이 발전했는데, 미분 개념의 역사 발생적 근원 문제인 접선 문제와 관련된 문제를 제시하여 도함수 개념을 살펴보는 것은 의미 있는 일이다.

도함수 개념의 역사적 발전 단계는 모두 네 단계인데, 현재 고등학교 교과서는 역사적 순서와 완전히 반대로 도함수를 소개하고 있다. 고등학교 교과서는 도함수를 먼저 정의한 후에 응용 단원에서 접선을 구하는 문제를

* 접수일(2017년 10월 21일), 심사(수정)일(1차: 2017년 12월 3일, 2차: 2018년 1월 22일), 게재확정일(2018년 3월 28일)
* 이 논문은 인천대학교 2017년도 자체연구비 지원에 의하여 연구되었음.
* ZDM 분류 : I15
* MSC2000 분류 : 97D70, 97-03
* 주제어 : 변화율, 미분, 차분 몫, 접선, 극한과정

다룬다. 도함수 개념의 수학화 과정은 생략하고 개념에 대해 설명한 후에 예제 문제를 통해 설명된 개념을 응용하도록 했다. 이것은 정의와 계산 과정이 강조된 것이며, 역사 발생적 접선 문제를 도함수의 수학화 과정이 아닌 활용으로 접근하고 있음을 말한다. 학교수학을 책임질 예비 수학교사들은 도함수의 역사적 발전 단계를 아는 것이 필요하다. 이에 본 연구에서 도함수 개념의 발전단계를 서술하여 교사, 수학자, 예비교사에게 도함수의 역사를 돌아보게 할 것이다. 미분의 이해에 대한 오류 분석, 도함수에 내재한 극한과정의 수학화 과정과 도함수에 대한 역사적 발달과정을 탐색하여 미분지도 개선에 대한 유용한 교육적 시사점을 얻고자 한다.

Ⅱ. 이론적 배경

역사적으로 도함수 개념의 발전 단계는 네 단계로 볼 수 있다. 처음에 도함수가 사용되었고, 17세기에 도함수가 발견되었다. 그리고 18세기에 도함수가 발전되었으며 마침내 정의되었다. 즉, 처음에는 도함수로 인지한 예제를 특별한 문제를 풀 때 마련한 기준을 사용하여 풀었다. 일반적인 개념은 미적분학의 발견으로 확인되었으며, 이로써 도함수의 많은 성질들이 발견되고 수학과 물리학의 응용으로 발전되었다. 마침내 도함수의 엄밀한 정의가 주어지고 도함수의 개념은 미적분학의 이론 속에 포함된다(Markus, 2006).

1. 사용의 단계

도함수 역사의 첫 번째 단계 “사용”의 단계는 Fermat의 예에서 찾을 수 있다. 진정한 미분법을 예견할 수 있는 최초의 내용이 포함되어 있는데, 그 예는 주어진 선분을 둘로 나누어서 그 곱이 최대가 되게 하라는 것이다. 주어진 선분을 B라 하고 구하려는 두 부분을 A, B-A로 나타낸다. 곱 (A+E)(B-(A+E))를 만든 뒤에 이것을 A(B-A)와 같다고 놓으면 다음 식을 얻는다.

A(B-A)=(A+E)(B-(A+E))

즉, $2AE+E^2=BE$ 이다. E로 양변을 나누면 다음과 같이 된다.

$2A+E=B.$

E=0 으로 놓으면 $A=B/2$를 얻는다. 따라서 구하려는 분할은 두 부분을 B의 반으로 나누는 것이다.

페르마의 설명에서 나타난 논리는 미비한 점이 많지만, $f(x)$가 x에서 통상적인 최대·최솟값을 가지면 그의 방법은 다음과 같이 놓는 것과 동치임을 알 수 있다(Eves, 1995).

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=0$$

즉, $f(x)$의 미분계수를 0과 같이 놓는 것과 동치이다. 초등 교과서에서 종종 이 방법을 ‘페르마의 방법’이라 인용하고 있다.

1660년까지 최대·최솟값문제와 접선 문제 사이의 계산적이고 기하적인 관계는 명확하게 이해되었으나, 다른 기하적 개념과의 관계는 이해되지 않았다. 접선의 완전히 만족스런 정의는 없었으나 미적분학을 이용해서 문제 푸는 많은 방법이 있었다. 페르마와 배로 및 당시 일부 학자들의 연구에 힘입어 미분 과정이 발전했으며 이것은 많은 최대·최솟값문제와 많은 곡선에 대한 접선을 작도하는데 적용됐다.

2. 발견의 단계

도함수 계산을 위한 형식적이고 해석적 규칙들의 체계와 함께 일반적인 기호의 발견, 즉 적합하고 실행 가능

한 미분법의 발견은 17세기 후반에 뉴턴과 라이프니츠에 의해 독자적으로 이루어졌다. 이것이 두 번째 단계 "발견"의 단계이다. 그들은 이 단계에 다음 세 가지를 했다. 첫째, 접선, 최대·최솟값, 넓이를 구하는 모든 방법들을 두 개의 일반적인 개념-미분과 적분-에 포함시켰다. 둘째, 뉴턴과 라이프니츠는 일반적인 개념을 쉽게 사용하기 위해서 적분과 미분기호를 사용했다. 셋째, 뉴턴과 라이프니츠는 도함수와 적분이 완전히 역관계인 미적분학의 기본정리를 증명하는 토론을 했다. 뉴턴은 도함수를 유율-변화율, 라이프니츠는 무한소 차의 비율-미분 몫 이라 말했다.

이 시대에 뉴턴과 라이프니츠는 도함수의 개념에 대해 완전하지 않았다. 17세기 그리스에서 아르키메데스의 공리는 산술, 대수, 기하의 기초가 되는 비율의 정리에 대한 기초로 여겨졌다. 그러나 무한소는 아르키메데스의 공리를 만족시키지 못했기 때문에 무한소는 오해와 혼란의 원천이 되었다(Grabiner, 1983). 1671년 "Method of fluxions"에서 뉴턴이 한 증명에는 무한히 작은 양 o를 포함했다. o가 무엇인가에 대한 질문은 뉴턴과 라이프니츠 시대에 계속 제기되었다. 1687년 뉴턴은 x^3의 도함수(그가 명명한 바로는 유율) $3x^2$을 사라지는 증분의 비의 극한이라고 말했다. 이 극한 용어는 현재 우리가 사용하는 극한과 다르게 이해되었다. 뉴턴은 자신의 책 "자연 철학의 수학적 원리"(1687)에서 극한을 다음과 같이 설명하고 있다. "양들이 사라질 때의 종국적인 비는 종국적인 양들의 비가 아니라 한없이 감소하는 이런 양들의 비가 접근하는 극한이다."

뉴턴과 라이프니츠가 미분적분학을 발견하고 거의 한 세기가 흐른 뒤에도 급속하게 커지는 상부 구조의 기초를 논리적으로 강화하기 위한 연구가 거의 없었지만 불완전한 기초에 대한 통렬한 비판이 있었다. 비판의 하나는 버클리로부터 나왔는데, 그는 1734년 미적분학의 전개가 가정의 단계에서 전환의 오류를 범하고 있다고 주장했다. 즉, 논증의 한부분에서 o는 없어지지 않는 양으로 가정한 반면에 다른 부분에서는 그 값을 0으로 택했다(Eves, 1995). 버클리의 비판의 핵심은 비의 극한의 존재성이 명확하게 정당화되지 못하였다는 것이다.

3. 발전의 단계

미분 몫의 개념은 라이프니츠의 표기와 기본정리에 의해 효과적이 되었고 어마어마한 힘을 가졌다. 18세기 수학자들에게 미적분학의 개념은 충분히 잘 이해되어서 수학과 물리학의 많은 문제를 푸는데 적용되었다. 이것이 세 번째 단계 "개발과 발전"의 단계이다.

뉴턴의 제2 법칙은 도함수 개념의 막대한 힘으로 물리학자들에게 물리학적 발견의 도구를 제공하게 된다. 이것을 이용해서 1739년 오일러는 미분방정식을 풀었고, 달랑베르는 편미분방정식의 문제에 몰두했다. 18세기 중반에 수학과 물리가 관련되었다는 것이 발견되고, 미분방정식이 물리학에 영향을 주어 물리학 역사상 가장 유용한 수학적 도구가 되었다. 1715년 테일러급수는 함수와 방정식의 해를 접근하는데 중요한 도구가 되었으며, 함수가 테일러급수의 합으로 유일하게 표시된다는 것은 1차, 2차,… n차 도함수 개념의 개발과 발달의 아름다운 예이다.

미적분학의 엄밀화를 구체적으로 시도한 최초의 수학자는 라그랑주였다. 그렇지만 함수를 테일러 급수 전개로 표현하는 방법에 근거한 그의 시도는 성공과는 거리가 멀었다. 왜냐하면 그것은 수렴과 발산의 필수적인 내용을 무시했기 때문이다. 1797년 라그랑주는 어떠한 함수든지 제곱급수 전개를 가졌다는 걸 증명하고 새로운 함수를 정의했는데, 그것을 f(x)의 첫째 유도된 함수라 불렀다. 그것이 도함수의 기원이다.

4. 정의의 단계

이제 연대적으로 마지막 단계인 도함수의 "정의"의 단계에 대해 언급하게 된다. 대단히 큰 진전이 1821년에 이루어졌다. 이 해에 수학자 코시는 받아들일 만한 극한 이론을 전개하고 다음에 극한 개념을 이용해서 연속, 미

분, 정적분을 정의했다. 이런 정의가 오늘날 미적분학에 대해 엄밀하게 저술된 초등 교과서에서 찾아볼 수 있는 것들이다.

1823년 코시는 f(x)의 도함수를 그것이 존재할 때 h가 0으로 갈 때 차의 몫 (f(x+h)-f(x))/h 의 극한이라고 정의했으며, 정의는 뉴턴이나 달랑베르와 달리 대수적이었다. 코시가 다루는 것은 기하학적 대상들과 이들의 비가 아니라 변수와 변수에 귀속되는 수치였다. 따라서 변수가 0이 되는 것이 더 이상 존재가 비존재로 질적인 변화를 일으키는 것이 아니라 변수에 대한 값의 할당으로 설명할 수 있게 되었고, 최종 상태에 대한 도달 가능성에 대한 관심을 배제하고 근접성의 여부만을 따질 수 있게 되었다(정연준, 2010). 코시의 도함수에 대한 중간값 정리의 증명에 극한의 대수적 부등식의 특징화가 나타나는데, 그것은 다음과 같다.

ϵ, δ가 두 개의 아주 작은 수라 하자. δ보다 작은 h의 값(절대값)과 주어진 구간의 x의 모든 값에 대해, 비 $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ 이 항상 $f'(x)-\epsilon$보다 크고 $f'(x)+\epsilon$보다 작다.

코시는 라그랑주로부터 도함수의 부등식의 특징화를 택했다. 이것을 도함수의 정의로 만들었고 도함수의 함수적 성질을 강조하려고 기호를 $f'(x)$로 택했다. 코시는 최초로 철저히 수치적인 극한 개념을 채택하여 미분법의 기본적인 결과를 확립해서 미적분학은 정리의 증명이 강력한 방법 보다는 좋은 정의에 기반을 둔 엄밀한 분야가 되었다.

1850년 바이어슈트라스는 대수적 부등식을 해석학 정리의 말로 바꾸었고, 점별 수렴과 균등 수렴 사이의 명백한 차이를 미적분학의 조직적이고 엄밀한 표현을 위해서 코시의 델타-엡실론 정의를 이용했다. 근대의 도함수의 정의는 바이어슈트라스의 연구이다.

Ⅲ. 연구방법 및 절차

1. 연구 대상

본교 수학교육과 2,3학년 학생들 각각 19명씩 38명을 대상으로 하여 미분의 이해에 대한 1차 설문 조사를 하여 오류를 분석한다. 본 연구는 모집단을 키울 수 없기 때문에 1차 검사 문항 분석이외에 2차 심화 문제를 추가하여 심층 인터뷰를 행하여 질적인 연구를 보완한다. 그러나 조사결과를 일반화 할 수 없는 것은 본 연구의 한계이다.

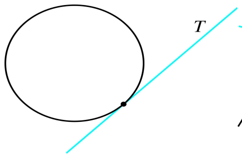
학생들은 모두 미분적분학을 배웠고, 2학년 학생들은 해석학을 배우고 있으며, 3학년 학생들은 해석학은 이미 배웠고 복소해석학을 배우는 중이다. 2차 연구대상자는 2학년 학생 10명인데, 이들 중에서 6명은 지난 학기 해석학 과목에서 A학점을, 4명은 B학점을 받았다.

2. 검사 문항

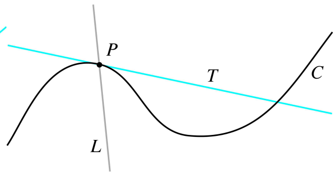
검사 문항은 미분의 이해와 변화율과 관련되었으며, J. Stewart의 미분적분학과 Orton(1983)의 문제에서 발췌했다. 복소해석학 관련 문제인 5(2)번 문제는 3학년 학생들 19명의 답이 수집되었다. 문제는 별도의 종이에 풀도록 했으며, 학생들은 여분의 종이와 계산기를 이용할 수 있었다. 학생들이 작성한 답안으로 이해할 수 없는 부분은 인터뷰로 추가 질문했다. 1차 설문조사의 문제는 다음과 같다.

1. 다음 그림(a)는 원에 그은 접선을 나타내고, 그림(b)는 곡선 C에 있는 점P를 지나는 두 직선 L과 T를 보

여준다.



(a)

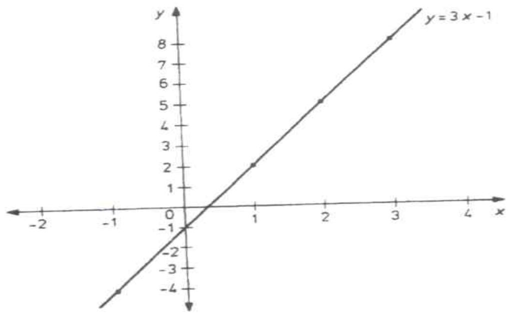


(b)

(1) 그림(b)에서 두 직선 L과 T중 접선은 어느 것인가?

(2) (1)에서 선택한 직선이 접선인 이유를 말하고 원에서의 접선의 정의와 비교하라.

2. 다음 그래프는 $y=3x-1$을 나타낸다.

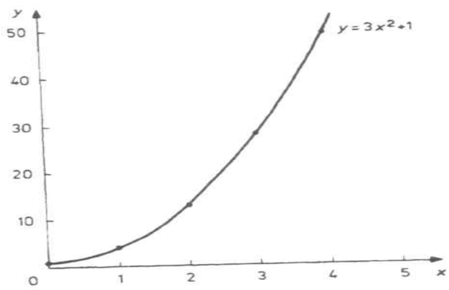


(1) x가 a부터 a+h까지 증가할 때 y의 증가량은 무엇인가?

(2) x가 a부터 a+h까지 증가할 때 y의 증가율은 무엇인가?

(3) $x=2\frac{1}{2}$일 때 y의 증가율은 무엇인가? $x=X$일 때는?

3. 다음 그래프는 $y=3x^2+1,\ 0 \le x \le 4$을 나타낸다.



(1) x가 a부터 a+h까지 증가할 때 y의 변화량은 무엇인가?

(2) x가 a부터 a+h까지 증가할 때 y의 평균변화율은 무엇인가?

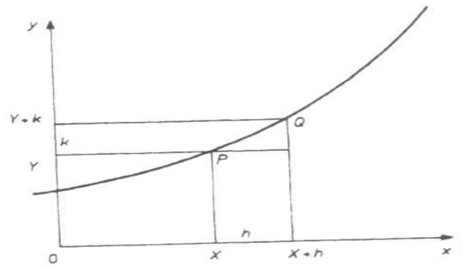
(3) $x=2\dfrac{1}{2}$일때 y의 변화율을 얻기 위해서 (2)의 결과를 이용할 수 있나? $x=X$일때는?

4. 원기둥 모양의 탱크에 100000갤런의 물이 담겨 있는데, 밑에 있는 구멍을 통해 한 시간에 모두 배출할 수 있을 때, 토리첼리의 법칙에 의해 t분 뒤에 탱크에 남아 있는 물의 부피 V는 다음과 같다.

$$V(t)=100000\left(1-\frac{t}{60}\right)^2 (0 \le t \le 60)$$

물이 탱크 밖으로 배출되는 변화율(t에 관한 V의 순간 변화율)을 t의 함수로 찾아라. 단위는 무엇인가? 시각 t=0, 10, 20, 30, 40, 50, 60분일 때, 배출 변화율과 탱크에 남은 물의 양을 찾아라.

5. 아래 그림은 다음과 같이 도함수나 미분의 정의를 도입하는데 사용된 것이다.

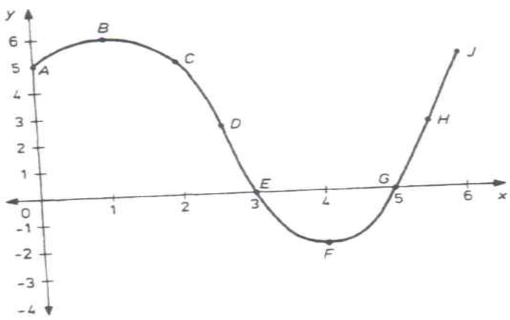


$$\frac{dy}{dx}=\lim_{h\to 0}\frac{k}{h}$$

(1) 위 공식은 그래프의 어떤 점에서 변화율을 측정한 것인지 말하고, 왜 그 공식이 변화율을 정의한 것인지 설명하라.

(2)(3학년만) (1)의 해석이 복소해석학에도 적용되는지 말하라.

6. x=0부터 x=6까지의 어떤 함수의 그래프가 주어졌다.



(1) A부터 B까지 (2) B부터 E까지 (3) A부터 J까지

(1)~(3)번의 경우에 x에 관한 y의 평균변화율을 구하라.

7. 다음 기호의 의미를 설명하라.

(1)δx (2)δy (3)$\dfrac{\delta y}{\delta x}$ (4) dx (5) dy (6) $\dfrac{dy}{dx}$

(7) $\dfrac{\delta y}{\delta x}$와 $\dfrac{dy}{dx}$사이의 관계를 설명하라.

8. 주어진 점에서 변화율을 구하고 답을 정당화하라.

(1) $y = x^2 - 4x + 1 \qquad x = 1$

(2) $y = \dfrac{1}{x} \qquad x = 1$

검사 문항의 1번은 접선의 정의에 관한 문제이고, 2,3,8번 문제는 변화율에 관한 문제이다. 4번 문제는 미분의 응용과 관련되어 있으며, 5,7번은 미분 이해와 관련된 문제이며, 5,6,7번 문제는 변화율의 그래프적 접근과 관련되어 있다. 검사를 위한 문제 풀기는 1학기 중간에 1시간 동안 실시했으며 검사지는 제출하도록 했다.

3. 자료 분석

3.1. 1차 분석

학생들이 작성한 검사지를 수집하여 자료로 이용하며, 검사지 분석은 각 문항에 대한 반응 빈도수를 중심으로 반응을 분석하며 백분율을 제시한다.

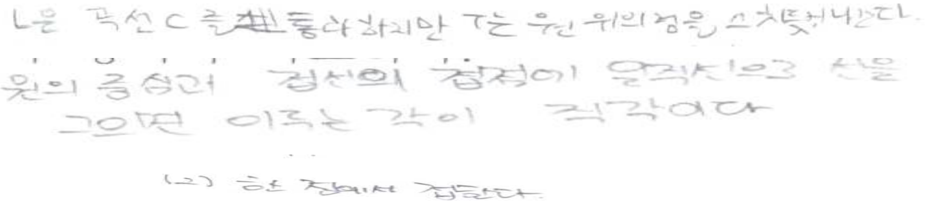
<표 III-1> 2학년 학생에 대한 오답율과 오류의 형태

문제	2			3			6		
	(1)	(2)	(3)	(1)	(2)	(3)	(1)	(2)	(3)
오답율 (%)	5.56	16.67	16.67	27.78	22.22	61.11	0	11.11	11.11
오류의 형태	실행적	구조적 실행적	구조적 실행적	실행적	실행적	구조적		실행적	실행적
문제	4	5(1)	7						
			(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
오답율 (%)	72.22	72.22	5.56	5.56	44.44	66.67	72.22	61.11	72.22
오류의 형태	구조적	구조적	실행적	실행적	구조적	구조적	구조적	임의적	임의적

학생들이 행한 오류를 분류하기 위해서 Donald가 묘사한 오류의 형태를 자료 분석에 이용한다. Donald(1963)가 묘사한 오류의 형태는 구조적, 실행적, 임의적의 세 가지이다. 각 문항에 나타난 여러 형태의 반응을 오답율

과 함께 알아본다. 2~7번 문제에 대한 2학년 학생에 대한 오답자의 비율을 오류의 형태와 함께 <표 III-1>에 나타냈다.

1(1)번 문제는 오답율이 0%였으나 (2)에서 원과 곡선의 접선의 정의를 제대로 비교하지 못한 학생들이 있었다. 이의 대답은 <그림 III-1>에 제시한다. 학생들이 행한 오류의 몇몇은 대수적인 것이다. 이 오류는 구조적, 실행적 오류를 포함하는데, 대수적 오류는 2(2)번 문제에서 증가율을 계산할 때 나타났다. $\dfrac{3(a+h)-1}{3a-1}$로 표현한 학생이 3명이 있었는데, 이는 증가율에 대한 이해 부족과 실행적 오류가 있다는 것을 나타낸다.



[그림 III-1] 1번 문제의 학생들의 반응

3(1)번 문제를 풀 때 학생들은 대수적 오류를 범했다. 계산을 하지 않은 학생을 포함해서 $3(a+h)^2$을 $3ah+3h^2$, $3(2a+h)$로 계산한 학생이 5명이었다. 3(2)번에서는 $6a+h$로 답함으로써 실행적 오류를 보였다. 평균변화율에서 변화율로 확장시킨 문제가 3(3)번이다. 이 문제는 $x=2\frac{1}{2}$에서의 구체적인 값에서의 변화율을 구하는 과정에서 $h \to 0$일 때의 극한을 포함한다. 학생들은 이 질문에 정확하게 대답한다. 그러나 두 번째 부분에서 61.11%의 학생들은 정확히 대답하지 못한다. 이것은 2번 문제의 오답율 16.67%와 비교되는 수치이다. 이때 나타난 오류는 구조적 오류이다. 3(3)번에서 식을 표현하지 않거나 (2)의 평균변화율을 그대로 $3X+6a$로 표현하거나 X=1/2에서의 변화율로 표현한 학생들의 비율이 61.11%로 많은 학생들은 대답을 제대로 하지 못했다. 이것으로 문자로 제시된 점 $x=X$에서 곡선에서의 변화율을 구하는데 어려움을 가짐을 알 수 있다.

2,3번 문제는 직선과 곡선에서의 변화율, 평균변화율과 관련된 문제로 구간에서의 평균변화율과 한 점에서의 변화율이 비선형적 관계에서 유의미하다는 것을 나타낸다. 여기서 학생들이 구조적 오류를 행함을 알 수 있다.

평균변화율은 x값의 차에 대한 y값의 차이다. 이것은 직선의 그래프가 주어진 경우에는 쉽게 얻는다. 6번 문제에서 평균변화율을 구하기 위해서 곡선의 그래프에서 y값의 차/x값의 차를 사용한다. 6(1)번의 오답율은 0%이나 (2)번의 오답율은 11.11%로 오답자들은 B의 x좌표를 읽는데 실행적 오류를 행했다. 그러나 평균변화율에 대한 학생들의 이해도는 좋았다. 변화율의 그래프에 대한 연구는 학생들이 도함수의 정의에서 파악해야하는 중요한 주제이다. 변화율은 직선과 곡선간에 차이가 있다. 곡선에서의 평균변화율은 직선에서와 같이 계산할 수 있으나, 변화율은 직선과 곡선의 경우가 다르다. 직선의 변화율은 한 점에서의 변화율로 얻을 수 있고 그것은 모든 점에서 같아서 실수 전체 구간에서의 평균변화율이 된다. 그러나 곡선의 변화율은 점마다 평균변화율이 달라서 점마다 변화율이 다르게 된다.

4번 문제는 미분의 응용문제로 물이 일정한 비율로 탱크 밖으로 나가는 비율을 인지한 학생들은 제대로 대답했으나 그렇지 못한 학생들 72.22%는 대답하지 못했다.

5(1)(2)번 문제는 변화율의 그래프에 대한 이해도와 관련된 문제이다. 이 문제에서 학생들은 대수적 조작이 아닌 미분의 개념적 이해에 관한 오류를 행한다. 5(1)번은 곡선에서 어떤 점에서의 변화율인지를 묻고 있는데, 어떤 점에서의 변화율인지를 제대로 파악하지 못한 학생들의 총비율의 72.22%나 됐다. 그들은 그 점을 (0,0), P의 x좌표인 x, (0,0)에서 (h,k)로의 변화율, Q와 P사이의 변화율로 답했다. (1)의 두 번째 문제는 공식만 기술하

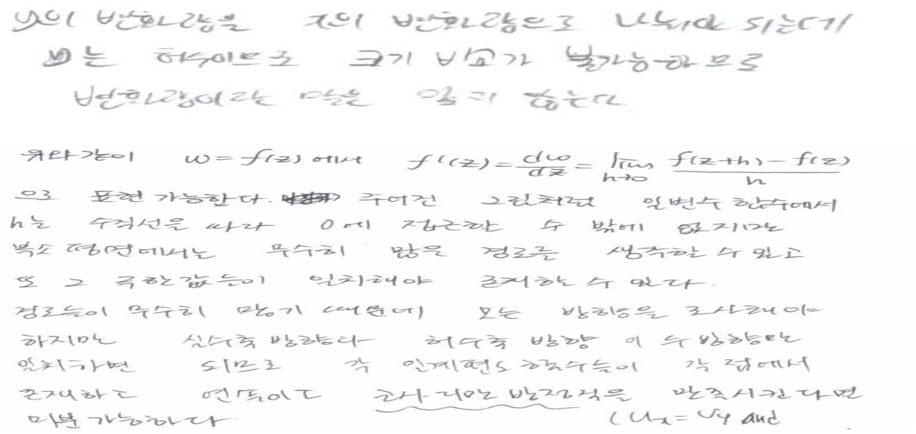
고 변화율에 대한 이유는 설명하지 않았다. 27.78%의 학생만이 다음과 같이 답했다.

-h의 값이 매우 작아지면 x에서의 접선의 기울기가 된다.

-x에서 x+h까지 y의 변화율에서 $h \to 0$이면 순간변화율이 된다.

이 학생들조차도 점의 위치와 x좌표를 구분하지 못한 채 답했다. 이것은 형식적 알고리즘에 집중한 학생들이 개념 문제에는 취약함을 말한다.

5(2)문제는 3학년 학생들을 대상으로 질문했는데, 3명을 제외한 다른 학생들은 도함수의 기하학적 해석이 복소해석학에도 적용가능하다고 답했다. 3명에 대한 대답은 <그림 III-2>에 나타냈다.



[그림 III-2] 5(2)번 문제의 학생들의 반응

실해석학에서 $f'(x)$는 $(x, f(x))$에서 함수 f의 그래프에 대한 접선의 기울기이고, x에서 f의 순간변화율이다. 그런데 이런 해석 중 어느 것도 복소해석학에 적용되지 않는다. 그러나 많은 학생들은 이 사실을 알지 못했다. 학생들의 오류는 구조적이다.

기호와 미분과의 관계를 나타낸 7번 문제에서 대다수 학생들은 δx, δy를 만족스럽게 설명했다. 이것은 평균변화율 구할 때 사용한 기호이므로 이것에 대해 잘 알고 있다. 그러나 많은 학생들이 다른 기호에 대해서 어려움을 느꼈다. (3)번 기호 $\frac{\delta y}{\delta x}$ 조차도 오답율이 44.44%였고, (x,y)변화량이라는 표현과 변화율이라는 표현을 사용한 학생이 있었다. 학생들에게 가장 큰 문제를 야기 시킨 기호는 (4)(5)번의 dx와 dy였다. 이것은 dy/dx로서 사용되었을 때 또는 적분으로 사용되었을 때를 제외하고는 실제로 의미가 없는 기호인데, 66.67%의 학생들은 dx를 x에 대해 미분, x의 변화율, $\delta x \to 0$일 때의 δx의 극한, x의 양, x의 증가분이라 답했다. (6)에서 61.11%의 학생들이 받아들일 만한 대답을 못했는데, dy/dx을 수렴값, $\frac{\delta y}{\delta x} \to 0$이라 답한 학생들이 있었다. (7)에 대하여 학생들은 다음과 같이 답했다.

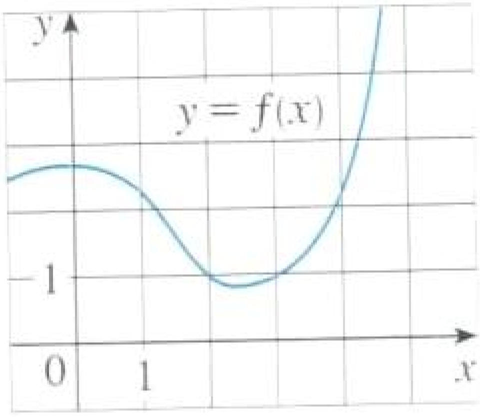
-$\frac{dy}{dx} = \frac{\delta y}{\delta x} \to 0$일때의 수렴값 또는 극한값, -$\frac{dy}{dx} = \lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta y}{\delta x}$, -$\frac{dy}{dx} = \frac{\delta y}{\delta x}$, $\approx \frac{\delta y}{\delta x}$

미분의 기호 문제에 대한 오답율이 높은 것은 학생들이 알고리즘적 방법에 치중한 나머지 기호의 중요성에 대해 소홀했기 때문이다. 따라서 학생들에게 dx, dy, dy/dx의 의미를 상기시킬 필요가 있다.

3.2. 2차 분석

1차 설문조사에서 학생들은 도함수의 이해에 관한 개념적인 문제를 다루는데 어려움이 있었다. 그리하여 2차 설문조사에서 미분 개념의 역사 발생적 근원 문제인 접선 문제를 제시하여 도함수 개념의 이해에 대하여 추가 질문하고, 또 차분 몫의 표현식을 사용하여 도함수의 극한 과정과 어떻게 연결하는지를 살펴본다. 2차 설문조사는 선정된 2학년 학생들을 대상으로 하여 방학 중 시도되었으며 e-mail을 통해 학생들의 답을 수집하였고, 이들 중에서 3명을 선정하여 인터뷰를 시행했다. 설문 조사의 목적은 학생들의 기술을 테스트하는 것이 아니라 수학화 과정을 살펴보기 위함이라는 것을 그들에게 말했다. 2차 설문조사의 문제는 J. Stewart의 미분적분학과 Markus(2006)의 문제에서 발췌된 문제이며, 구체적인 문제는 다음과 같다.

1. $x=1$에서 함수 $f(x)=3^x$의 도함수의 값을 도함수의 정의를 이용해서 가능한 한 정확하게 어림하라.

● 그림을 보고 답하라 

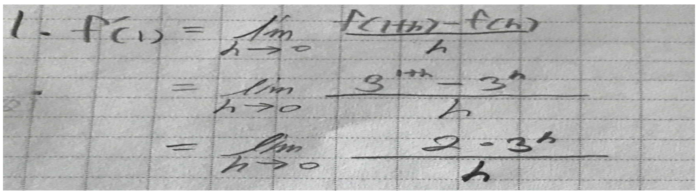
.

2. 그림에서 $(f(1+h)-f(1))/h$이 무엇을 의미하는지 해석하라.
3. 그림에서 $\lim_{h\to 0}(f(1+h)-f(1))/h$이 무엇을 의미하는지 해석하라.
4. $\lim_{h\to 0}(f(1+h)-f(1))/h$의 값을 어림하라.

1번 문제는 공식을 이용하면 쉽게 답을 구할 수 있지만 도함수의 정의를 이용해서는 쉽게 해결할 수 없는 문제이다. 이 문제는 도함수의 정의를 이용하는 문제이므로, 학생들은 분모, 분자의 인수를 약분하고 그 후에 숫자를 대입하는 과정을 떠올렸다. 그러나 그것이 쉽지 않음을 알고 학생들은 미분 공식을 이용하여 답을 구했다. 미분 공식이나 로피탈 정리를 이용하여 답을 구한 학생은 7명으로 나타났다. 차분 몫을 기존 방법으로 구하기 어렵기 때문에 1번을 구하는 다른 방법이 필요하다. <그림 Ⅲ-3>에서 보는 것처럼 x=1에서의 도함수의 값을 줄어드는 구간에서의 평균변화율을 이용하여 구한 학생이 있었다. 이 학생은 $x=1$에 되도록 가까운 점 $x=1.001$을 선택하여 $x=1$과의 차분 몫을 사용했다. 그는 평균변화율의 극한 과정을 이용한 것으로써 이것은 도함수와 평균변화율, 순간변화율의 관계를 잘 알고 있음을 말해 준다. <그림 Ⅲ-4>는 함수의 정의를 잘못 이용하여 실행적, 구조적 오류를 행한 학생의 예이다. 로피탈의 정리를 이용하지 않고 함수를 변환하여 답을 얻은 학생도 1명이 있었으며, 이것은 <그림 Ⅲ-5>에 나타냈다.

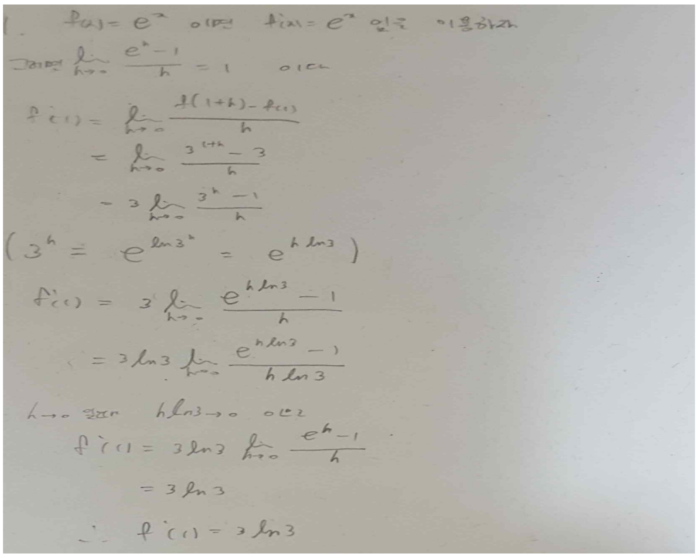
$$\frac{f(1.001)-f(1)}{1.001-1}=\frac{3^{1.001}-3}{\frac{1}{1000}}=0.329764\cdots$$

[그림 III-3] 1번 문제의 학생 답의 예시

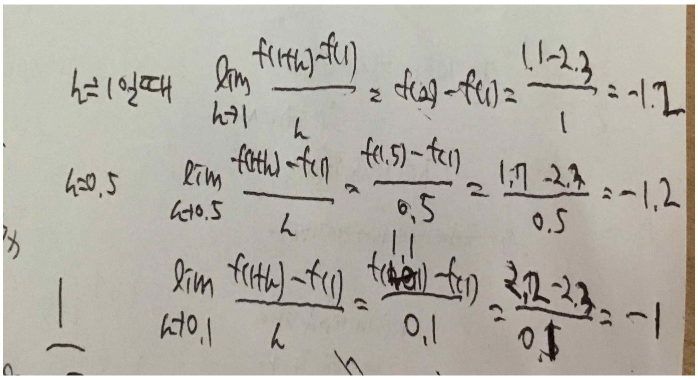


[그림 III-4] 1번 문제의 학생 답의 예시

2,3,4번 문제는 도함수에 내재한 극한 과정의 수학화 과정을 살펴보기 위해서 그래프를 제시한 문제이다. 2번 문제에서 모든 학생들은 주어진 식을 두 점 (1, f(1)), (1+h, f(1+h))를 지나는 직선의 기울기 또는 f(x)의 평균변화율이라 답한 것으로 나타났다. 3번 문제에서 그들은 점 (1, f(1))에서 f(x)에 접선을 그었을 때의 접선의 기울기라고 답함으로써 그들은 대수식으로 표현된 도함수에 대하여 절차적 지식을 가지고 있음을 알 수 있었다. 그러나 4번 문제에서 대부분의 학생들은 함수 f의 그래프에 접선을 그리고 접선의 기울기를 이용해서 답으로 제시했다. 1, -1, -1.2, -1.3, -3/4의 여러 답이 나왔다. 그들은 이 값이 정확하지 않다고 생각했지만 더 정확한 답을 얻기 위해 다른 방법을 제시할 수 없다고 했다. 뉴턴과 라이프니츠가 발전시킨 미분법이 이해되지 않은 추론에 의지함에도 불구하고 여러 응용에서 거대한 성공을 거둔 것처럼 대부분의 학생들은 그것이 작용하는 이유는 알지 못함에도 불구하고 무엇을 해야 하는지는 알고 있었다.



[그림 III-5] 1번 문제의 학생 답의 예시



[그림 Ⅲ-6] A학생의 4번 문제 풀이

인터뷰를 시행한 세 명의 A,B,C학생들의 4번 문제의 풀이 과정은 주목할 만하다. A학생은 x=1의 오른 쪽에 짧은 거리만큼 떨어져있는 점 x=2, x=1.5, x=1.1을 주목했다. 각 점과 x=1의 차분 몫의 식을 이용하여 할선의 기울기를 구했다. 그러나 극한 기호를 정적인 몫에 사용함으로써 극한 과정에 대한 구조적 오류를 행했다. 이 계산 과정은 <그림 Ⅲ-6>에 주어졌다.

B학생은 A학생과 마찬가지로 x=1의 오른 쪽에 짧은 거리만큼 떨어져있는 x=2, x=1.5, 1.25, 1.2를 주목했다. x=1과 위의 점들을 지나는 할선의 구간의 길이가 매우 작다면 할선과 곡선의 차이도 작게 된다는 사실을 이용하여 구간의 길이를 감소시킴으로써 극한값을 어림했다. B학생의 4번을 구하는 과정을 살펴보면 다음과 같다.

-차분 몫의 식 $(f(1+h)-f(1))/h$을 이용해서 h=1, 1/2, 1/4, 1/5 일 때의 할선의 기울기를 구한다.

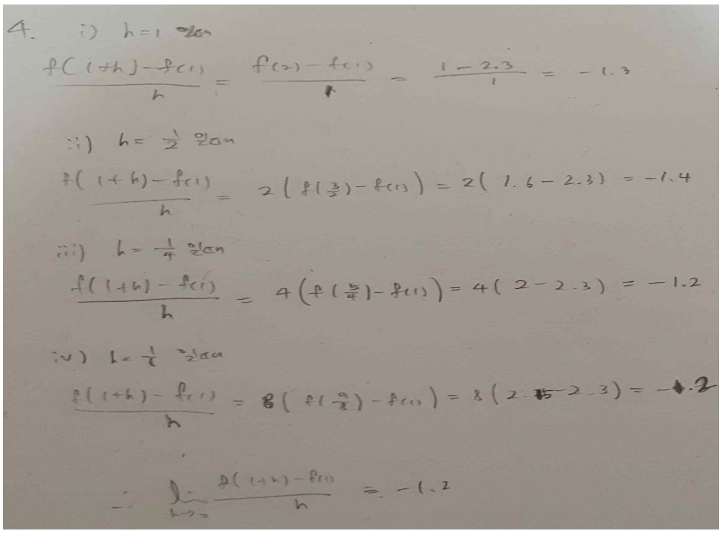
-구한 할선의 기울기가 －1.3,-1.4,-1.2,-1.2⋯ 이므로 할선의 기울기의 극한값 －1.2를 접선의 기울기로 구한다.

-위에서 구한 －1.2를 x=1에서의 도함수의 값으로 정한다.

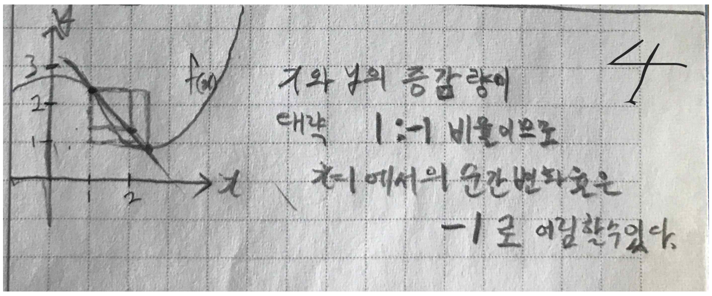
B학생의 4번을 구하는 과정은 <그림 Ⅲ-7>에 주어졌다.

A학생과 B학생의 수학화 과정은 1) 주어진 점 P의 오른 쪽에 짧은 거리만큼 떨어져 있는 제2의 점 Q를 주목하여 P,Q를 연결하는 할선의 기울기를 대수식으로 표현하고, 2) 할선의 기울기에 대한 연속적인 근사값의 계산에서 나타나는 양식에 의해 나온 값을 접선의 기울기로 구하고, 3) 접선의 기울기를 도함수로 정의한 것이다. A학생은 극한 기호를 사용했지만 정적인 몫에 극한을 취함으로써 구조적 오류를 행함을 알 수 있고, B학생은 극한 기호를 사용하지 않았지만, 수학화 과정에 도함수의 극한 과정을 포함했음을 알 수 있다.

C학생은 그래프를 이용해서 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$를 구했다. x의 증가 1: y의 증가 －1로 어림하여 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$를 구하고, 이것을 도함수의 값으로 어림했다. 이 과정은 <그림 Ⅲ-8>에 나타냈다. C학생의 수학화 과정은 1) 함수 f의 그래프에 접선을 그리고, 2) 비례식을 이용하여 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$을 구하고, 3) $\frac{\Delta y}{\Delta x}$의 극한을 도함수로 정의한 것이다.



[그림 Ⅲ-7] B학생의 4번 문제 풀이



[그림 Ⅲ-8] C학생의 4번 문제 풀이

4번 문제는 대수적 접근이 불가능한 함수가 그래프로 주어진 문제이다. 이런 함수의 도함수 값을 구하기 위해서는 대수적 접근법이 아닌 다른 방법이 필요하다. 학생들은 형식적인 알고리즘에만 익숙하기 때문에 이런 문제는 힘들어하는 경향이 있다. 이 문제에서 학생들이 어떤 종류의 차분 몫을 이용해서 도함수의 극한과정과 어떻게 연결시켰는지 살펴본 결과 다음 사실을 알 수 있다.

A,B학생은 접선이 할선의 극한이라는 이해가 문제 해결에 도움이 되었고, C학생은 비례 율이 속도와 직선의 기울기, 도함수를 통합하는 중요한 개념이라는 사실이 문제 해결에 도움이 되었다. 대수적 접근이 불가능한 문제를 풀 때 어떤 학생은 차분 몫의 식을 평균변화율로, 어떤 학생은 차분 몫의 식을 할선의 기울기로, 어떤 학생은 차분 몫의 식을 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$로 사용하여 Δx가 0으로 접근할 때 발생하는 근사과정에 집중하여 도함수에 내재한 극한과정을 이해한 것으로 나타났다. 이와 같이 몇몇 학생들은 문제를 풀 때 차분 몫의 표현식을 이용하여 도함수에 내재한 극한과정과 연결시킴을 볼 수 있었다.

Ⅳ. 결론

본 연구는 학부 학생들을 대상으로 한 설문조사에 기반을 두었는데, 조사 결과 학생들은 대수적 접근이 가능한 문제는 알고리즘을 이용하여 문제 접근에 어려움이 없었으나 변화율과 그래프와의 관계, 대수적 접근이 불가능한 문제에 대한 이해도는 좋지 않은 것으로 나타났다.

그래프 연구는 변화율의 개념을 발전시키는데 아주 중요하다. 학생들은 도함수의 그래프 상의 의미와 대수적 식 사이의 관계를 조직화 할 수 있어야 한다. 그러나 학생들의 그래프의 이해는 Hart(1981)에 나타난 것처럼 제한적이다. 학생들은 문제를 풀 때 대수적으로 접근하기 전에 그래프에 대한 데이터를 사용하는 것이 바람직하나, 조사 결과 그래프에 의한 접근을 생략함을 볼 수 있었다.

곡선의 한 점에서 접선과 변화율 사이의 관계를 고찰할 때 곡선에서 점들의 상황을 소개하여 그것을 곡선의 접선의 기울기의 수치적 어림의 성질과 연결시키는 것은 중요하다. 그러면 접선의 기울기, 변화율이 무엇을 의미하는지의 기초적인 파악할 수 있다. 그러나 대부분의 학생들은 형식적 알고리즘에만 집중하고 도함수의 그래프 상의 의미와 대수적 식 사이의 관계에 대한 이해에는 취약하여 그래프를 통한 개념 이미지가 형성되지 않음을 볼 수 있었다. 이것은 수치적인 근사 접근법이나 그래프 접근법을 통해 다양한 개념 이미지를 형성하도록(우정호, 1998) 미분학에 대한 다양한 개념적 사고의 개발이 필요함을 말해준다.

2차 설문조사를 통해 각 학생으로부터 차분 몫이 어떻게 사용됐고 그것들이 다른 것과 어떻게 관련되었는지 살펴보았으며, 학생들의 도함수 학습의 가능한 수학화 과정을 보여주었다. 또한, 학생들은 문제 푸는 과정을 통하여 절차를 성공적으로 수행하는 것보다 절차를 이해하는 것과 추론하는 것이 필요함을 알게 되었다.

본 연구에서 페르마에서 바이어슈트라스에 이르는 기간 동안 도함수의 개념이 어떻게 발전했는지를 보았다. 학생들의 도함수의 개념에 대한 이해도를 역사 발생적 문제인 접선 문제와 관련하여 살펴본 결과, 30%의 낮은 정답률을 보였다. 이것은 학교수학에서 도함수의 정의를 기하학적 의미와 분리해서 다루었기 때문에, 대수적이고 절차적인 면이 강조되어 미분의 개념을 이해하고 활용하는 어려움이 학문적 수학까지 연결되기 때문이다.

뉴턴과 라이프니츠의 사고방식이 비록 수학적으로 결함이 있지만, 이것은 초보자의 자연스런 접근 방법으로 간주되고 있다. 그리하여 학교수학에서 도함수를 처음 배우는 학생들에게 페르마 이전, 도함수의 개념을 알기 이전으로 돌아가게 하여 도함수의 기하적 측면에 해당하는 미분 개념의 역사 발생적 근원 문제를 다루고 이를 수학화하는 과정으로 도함수의 개념을 이해하게 할 필요가 있다. 이것은 학교수학에서 미분개념의 명확한 이해와 활용에 도움을 줄 뿐만 아니라 개념적 사고를 확장시키는데 도움을 줄 것이다.

학문적 수학에서 역사적 순서를 아는 것은 도함수의 사용을 정당화시키고 도함수의 존재를 정확하게 보이기 위해서 우리가 원하는 엄밀한 정의를 동기화시키는데도 도움을 준다. 교수나 교사들이 엄밀한 정의가 종종 주제의 처음이 아니라 끝에 있다는 것을 기억하여, 수학의 발생과정에 따라 현실 상황의 문제들을 풀어 나가면서 심상을 구성하고 이를 바탕으로 개념 형성으로 나아가게 가르치기를 기대한다. 또한 본 연구에서의 조사 사례가 역사 발생적 문제의 필요성을 인식하여 학교수학, 학문적 수학에 접목시키는 계기가 되기를 바라고, 아울러 미분에 대한 역사 발생적 문제가 수업에 적용되는 현장 연구가 많이 수행되기를 바란다.

참 고 문 헌

김정희 (2005). 고등학생들의 미분개념의 이해 및 오류유형 분석. 충북대학교 교육대학원 석사학위논문.

Kim, J. (2005), An investigation on high school students' understanding and error type about differentiation concept, Master's thesis, Chungbuk University.

우정호 (1998). 학교 수학의 교육적 기초. 서울대학교 출판부.

Woo, J. (1998), Educational Basis of School Mathematics, Seoul National University Publishing Co.

정연준 (2010). 미분계수의 역사적 발달 과정에 대한 고찰. 대한수학교육학회지 <학교수학>, 12(2).

Joung, Youn Joon, An Investigation on the Historical Development of the Derivative Concept. *Journal of Korea Society of Educational Studies in Mathematics, School Mathematics,* 12(2), 239-257. Jun. 2010

조완영 (2006). 고등학교 미적분에서의 수학화 교수·학습에 관한 연구. 대한수학교육학회지 <학교수학>, 8(4).

Cho, Wan Young. A Study on Mathematizing Teaching and Learning in Highschool Calculus. *Journal of Korea Society of Educational Studies in Mathematics, School Mathematics,* 8(4), 417-439. Dec. 2006

조완영 (2012). 예비교사의 미분영역에 관한 내용지식의 분석. 대학수학교육학회지 <학교수학>, 14(2).

Cho. Wan-Young. Analysis of Prospective Teachers' Mathematical Content Knowledge about Differential area. *Journal of Korea Society of Educational Studies in Mathematics, School Mathematics,* 14(2), 233-253. June. 2012

허민・오혜영역. Howard Eves(1995). 수학의 위대한 순간들, 경문사.

Howard Eves/ Her, M., Oh, H. Y.(1995). *Great Moments in Mathematics.* Kyungmoon Co.

Donaldson, M.(1963). *A Study of Children's Thinking.* Tavistock Publications, London, pp. 183-185

Hart, K.M.(1981). *Children's Understanding of Mathematics.* 11-16, John Murray, London.

Judith V. Grabiner. *The Changing Concept of Change: The Derivative from Fermat to Weierstrass* VOL.56, NO.4, SEPTEMBER 1983, mathematics magazine.

Markus Hähkiöniemi. Associative and reflective connections between the limit of the difference quotient and limiting process. *Journal of Mathematics Behavior* 25 (2006) 170-184.

Orton, A.(1983). Students' understanding of differentiation, *Educational Studies in Mathematics,* 14(3), 235-250

Stewart, J.(2008). *Calculus.* (6thed.).Belmont: Brooks Cole.

Tall, D. & Vinner, S.(1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12(2), 151-169

Tall, D.(1991). The psychology of advanced mathematical thinking. In D. Tall(Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp.3-21). Dordrecht: Kluwer.

Tall, D.(1992). The transition to advanced mathematical thinking: Functions, limits. infinity, and proof. In D. Grouws(Ed.). *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 495-511). New York: Macmillan

Zandieh, M.(2000). A theoretical framework for analyzing student understanding of the concept of derivative. *Research in Collegiate Mathematics Education* IV. 8, 103-126.

A study on understanding of differentiation

Oh Hye-Young
Department of Mathematics Education, Incheon National University,
Yeonsu-ku Gaetval-ro 12 Meetyou Hall Campus Byeol Guan A-dong 102-ho
College of Education, Incheon, Korea
E-mail : hyoh@inu.ac.kr

Differentiation with integration is an important subject which is widely applied in mathematics, natural science, and engineering. Derivative is an important concept of differentiation. But students don't understand its concept well and concentrate on acquiring only the skill to solve the standardized calculus problem. So they are poor at understanding of the concept of differentiation.

In this study, after making a survey of differentiation on college students, we try to analyze errors which appeared in solving differentiation problem and investigate mathematics process of limiting process inherent in the derivative and historical development about derivative. Thus, we try to analyze the understanding of differentiation and present the results about this.

* ZDM Classification : I15
* 2000 Mathematics Subject Classification : 97D70, 97-03
* Key Words : rate of change, differentiation, tangent line, difference quotient, limiting process
* This work was supported by the Incheon University Research Grant in 2017.