

학교수학에서 ‘피타고라스 정리’ 관련 내용의 재구조화 연구

서보역(충남대학교)

I. 서론

1. 연구의 필요성 및 목적

제1차 수학과 교육과정 이래 최근까지 모두 열 번의 교육과정 개정이 있었다. 각 교육과정은 나름의 개정 배경과 방향이 있었으며, 문화·사회적 요구와 급변하는 사회현상에 발맞추기 위한 노력의 산실이었다(서보역 외, 2018).

수학교과는 내용교과이므로 교육과정의 변화는 곧 가르치는 내용요소 및 성취기준의 변화와 더불어 내용요소들의 학습 순서의 변화를 의미한다. 수학과 교육과정 문서에서는 학습의 순서를 재구성하여 가르칠 수 있다고 하지만, 현실적으로는 교육과정의 제시 순서가 곧 학습의 순서와 일치하는 것이 보편적이다.

최근의 수학과 교육과정의 변화를 살펴보면, 이러한 경향은 쉽게 확인할 수 있다. 2009 개정 수학과 교육과정에서 집합이 그 대표적 예가 될 수 있다. 2009 개정 교육과정은 중학교에서 학습하던 ‘집합’ 관련 내용을 고등학교 1학년으로 이동하여 다루도록 하였는데, 이 영향으로 중학교에서 함수 개념을 다룰 때, 정의역, 공역과 같은 용어를 사용할 수 없게 되었다. 또 다른 예로, 2007 개정 수학과 교육과정에서는 그전까지 중학교 3학년에서 학습하던 ‘곱셈공식’ 관련 내용을 중학교 2학년으로 이동하였고, 이에 따라 곱셈공식과 인수분해를 통합하여 학습할 수 없게 되었다.

이처럼 수학과 교육과정의 변화는 수학 내용 요소의

전개 방법과 순서에 결정적인 영향을 끼치고 있다. 그런데 변화 내용이 매우 복잡적이고 핵심적인 개념이라면 그 변화의 영향은 학교 수학 전체에 지대한 영향을 미치게 될 것이다. 따라서 최근 고시한 2015 개정 수학과 교육과정에서 복잡적이고 핵심 개념 중 변화가 생긴 내용 요소에 대한 분석은 반드시 이루어져야 할 것이다.

2015 개정 수학과 교육과정의 개정 중점 방향을 보면, 첫째는 수학 교과 역량의 구현, 둘째는 학습 부담의 경감 추구, 셋째는 학습자의 정의적 측면 강조, 넷째는 실생활 중심의 통계 내용 재구성, 다섯째는 공학적 도구의 활용 강조로 정리할 수 있다. 이 중에서 학교수학의 내용 전개에 가장 민감한 부분을 하나 선택하라고 한다면, 학습 부담의 경감일 것이다. 이러한 학습 내용 경감 중에서 중학교 기하영역의 가장 큰 변화는 피타고라스 정리를 중학교 3학년에서 2학년으로 이동한 것이다. 피타고라스 정리는 단순한 수학적 내용이 아니며, 게다가 일회성에 그치는 내용은 더더욱 아니다. 피타고라스 정리 학습 전후에 발생하는 다양한 수학교육적 맥락이 존재하고, 다양한 내용 영역에 영향을 미치는 내용이므로 학년 간의 이동으로 인해 매우 큰 변화가 예상된다. 이러한 변화는 중학교에만 한정되는 것이 아니라, 고등학교까지 그 범위가 확대될 수 있다.

개정된 교육과정에 따르면 제곱근을 학습하기 이전인 중학교 2학년에서 피타고라스 정리를 학습하도록 하는데, 이로 인해 피타고라스 정리 단원에서 다룰 수 있는 수의 범위가 굉장히 제한될 수밖에 없고, 피타고라스 정리를 정당화하는 방법으로 많이 활용하는 곱셈공식도 이용할 수 없게 되었다. 또한 두 점 사이의 거리, 입체도형에의 응용에도 어려움이 우려된다. 게다가 박경미 외(2015) ‘2015 개정 수학과 교육과정 시안 개발 연구’ 보고서 부록4를 보면, ‘수학과 교육과정 성취기준 변화 신·구 대조표’에서는 ‘피타고라스 정리를 활용하여 여러 가지 문제를 해결할 수 있다’라는 성취기준을 삭제하였다

* 접수일(2018년 2월 28일), 수정일(1차: 2018년 4월 10일, 2차: 2018년 4월 23일), 게재확정일(2018년 4월 26일)

* ZDM분류 : D33

* MSC2000분류 : 97U20

* 주제어 : 피타고라스 정리, 2015 개정 수학과 교육과정, 수학교과서, 기하 영역, 수업 내용

* 이 연구는 충남대학교 학술연구비에 의해 지원되었음.

고 제시하였지만, 같은 보고서의 ‘교과서 개발 지침’에서는 ‘평면도형과 입체도형에서 피타고라스 정리의 활용은 무리수를 학습한 이후 다룰 수 있다’라고 명시하고 있다. 같은 보고서 내에서의 불일치와 더불어, 구체적으로 어떤 내용을 어떻게 다루어야 논리적으로 타당한지에 대한 부분은 언급되지 못했다.

따라서 피타고라스 정리를 2학년으로 이동함으로써 인해 발생하는 문제점을 찾고, 각각의 내용요소들과의 상호관련성에 비추어 재해석의 작업이 요구되며, 피타고라스 정리의 내용이 미칠 수 있는 부분을 고려하여 가장 바람직한 내용 요소의 재구조화 방향을 탐색할 필요가 있다. 이를 통해 수업을 위한 내용의 재구성 및 새로운 수학과 교육과정에 대비해야 할 것이다.

지금까지 논의에서처럼 피타고라스 정리의 학년간 이동은 간단한 사안이 아니며, 학술적인 검토와 전체 내용에 대한 재구조화 작업이 요구되는 부분이다. 따라서 본 연구에서 피타고라스 정리가 2학년으로 이동됨으로써 인해 예상되는 상황을 진단하고, 이에 대한 바람직한 해결방안을 찾는 것을 연구의 목적으로 한다. 이를 통해 중학교의 내용 영역의 재구성에 유의미한 대안 및 새로운 교육과정 개발에 시사점을 제시할 것으로 기대된다.

2. 연구 문제

본 연구의 내용은 다음과 같다.

첫째, 세계 여러 나라에서 피타고라스 정리와 관련된 내용 요소를 교과서에서 어떻게 다루는지 분석한다. 이를 통해 국제적으로 피타고라스 정리를 다루는 방식을 비교하고 바람직한 재구조화 방향을 탐색한다.

둘째, 피타고라스 정리와 관련이 있는 수학 학습 내용을 분석하고, 피타고라스 정리가 2학년으로 이동함으로써 인해 예상되는 문제점을 진단하며, 피타고라스 정리에 대한 재구조화 방안을 도출한다.

II. 이론적 배경

1. 2015 개정 수학과 교육과정과 피타고라스 정리

문·이과 통합형 수학과 교육과정 재구조화 연구(박경미 외, 2014)에서는 피타고라스 정리와 관련하여 다음과 같이 제시하고 있다.

중학교 3학년에 다루는 내용 중 기하 영역의 ‘피타고라스의 정리’와 ‘삼각비의 뜻과 값’은 강화시키자는 의견이 우세하였다. (... 중략...) 만약 중학교 3학년에 다루는 내용을 다른 학년으로 이동시킨다면, (... 중략...) 기하 영역의 경우, ‘피타고라스의 정리의 활용’은 2학년이 적당할 것이라는 의견이 우세하였다(박경미 외, 2014, p.46)

또한 박경미 외(2015) ‘2015 개정 수학과 교육과정 시안 개발 연구’에서는 피타고라스 정리를 중학교 3학년에 중학교 2학년으로 이동하였는데, 이에 대해 ‘중학교 3학년 학년별 학습량 적정화를 위해 ‘피타고라스 정리’를 중학교 2학년으로 이동하였다.’라고 설명하고 있다. 실제로 이 보고서에서는 다음과 같이 상세히 설명하고 있다.

중학교 3학년의 경우 곱셈공식과 인수분해가 통합되고 상관관계는 추가되었고, ‘원주각의 활용’, ‘근호를 포함한 사칙계산’이 약화되고, ‘이차함수의 최대·최소’가 삭제되었다. 이러한 변화에도 3학년은 다른 학년에 비해 시수가 적어 학습 부담이 많다는 지적에 따라 ‘피타고라스 정리’의 중학교 2학년으로 이동을 고려하였다. 그러나 이 경우 제공근을 배우기 이전에 피타고라스 정리를 다루는 것으로 다룰 수 있는 수의 범위가 굉장히 제한되며, 현재 교과서에서 피타고라스 정리의 정당화 방법으로 많이 등장하는 곱셈공식을 이용한 방법도 이용할 수 없게 된다. 또한 두 점 사이의 거리, 입체도형에의 응용에도 어려움이 있다는 우려가 제시되었다. 하지만 피타고라스 정리의 정당화 방법은 다른 방법이 존재하고, 오히려 중학교 2학년에서 피타고라스 정리의 도입한 후, 제곱근, 이차방정식, 삼각비 등의 중학교 3학년 내용을 피타고라스 정리의 맥락에서 일관되게 다룰 수 있어 장점이 많다는 의견이 다수였다. 또한 TIMSS 8학년 시험 범위에 피타고라스 정리가 포함되어 있는 것도 고려하였다. 이에 ‘피타고라스 정리’를 중학교 2학년으로 이동하였다(박경미 외, 2015, p.95).

또한 박경미 외(2015) 보고서의 부록4의 ‘수학과 교육과정 성취기준 변화 신·구 대조표’에는 피타고라스 정리와 관련하여 다음 표를 제시하였는데, 이 표를 통해 볼 때 피타고라스 정리의 활용은 삭제된 것으로 볼 수 있다. 실제로 교육부(2015)가 고시한 수학과 교육과정에서 중학교 기하 영역의 성취기준은 [9수04-16] 단 한 개만 제시하였다.

[표 1] 피타고라스 정리 관련 내용 비교표
[Table 1] Comparing achievement criteria

영역	성취기준	2015 개정 교육과정					성취기준
		유 지	변 형	이 동	사 제	신 설	
기하	피타고라스 정리를 이해하고 설명할 수 있다.	●					피타고라스 정리를 이해하고 설명할 수 있다.
	피타고라스 정리를 활용하여 여러 가지 문제를 해결할 수 있다.				●		

2015 개정 중학교 수학과 교육과정(교육부, 2015)은 학년군 제도를 채택하여 중학교 내용 영역 전체를 1~3학년군으로 묶어 놓았으므로, 학년의 구분이 없다고 주장할 수 있다. 하지만, 교육과정 내용 체계표에 세로 줄을 그음으로 인해 명확하게 학년을 구분하고 있다([표 2]참조). 이 표에 따르면 2009 개정 수학과 교육과정과 달리, 피타고라스 정리는 중학교 2학년에서 다루도록 하였다. 또한 중학교 수와 연산 영역의 교수·학습 방법 및 유의사항에서 ‘제공근과 무리수는 피타고라스 정리를 이용하여 도입할 수 있다.’를 제시하여 피타고라스 정리가 제공근에 선행하여 학습한다는 것을 명시적으로 제시하였는데, 제공근이 중학교 3학년의 첫 번째 학습내용이므로 피타고라스 정리는 중학교 2학년에서 학습해야 한다.

[표 2] 중학교 기하 내용 체계표
[Table 2] Geometry contents table in middle school

영역	핵심 개념	내용 요소		
기하	평면도형	○ 기본 도형 ○ 작도와 합동 ○ 평면도형의 성질	○ 삼각형과 사각형의 성질 ○ 도형의 닮음 ○ 피타고라스 정리	○ 삼각비 ○ 원의 성질
	입체도형	○ 입체도형의 성질		

2. 외국의 수학과 교육과정에서 피타고라스 정리 피타고라스 정리를 어떤 학년에서 다루고 있는지 세계 여러 나라의 사례를 살펴본다.

1) 미국

CCSSM¹⁾(Common Core State Standards for Mathematics)은 미국의 50개 주 중에서 45개의 주에서 채택하고 있어 미국의 국가교육과정이라 판단할 수 있다. CCSSM 중학교의 수학 영역별 내용 요소를 보면 8학년(중학교 2학년)에서 ‘피타고라스 정리의 이해와 적용’을 학습하도록 한다. 중학교 8학년의 피타고라스 정리와 관련된 내용을 좀 더 상세히 진술하면 아래와 같다.

학생들은 피타고라스 정리와 피타고라스 정리의 역에 대한 명제를 이해하고, 피타고라스 정리가 정사각형을 분할할 수 있는지를 설명할 수 있다.

학생들은 피타고라스 정리를 적용하여 다각형을 분석하고, 변의 길이를 찾기 위해 좌표 평면상의 두 점 사이의 거리를 구할 수 있다(Common Core State Standards Initiative, 2017, p. 52).

2) 영국

영국의 국가수준 교육과정은 Key stage 1~4로 구분된다. Key stage 1은 1~2학년, Key stage 2는 3~6학년, Key stage 3은 7~9학년, Key stage 4는 10~11학년에 해당한다. Key stage 1~3은 2013년 9월에 개정 고시되어 2014년 9월부터 1학년과 3~5학년에 적용되고 있고, 2학년과 6학년은 2015년부터 적용되었다. 한편 Key stage 4는 2014년 7월에 개정 고시되어, 10학년은 2015년 9월부터, 11학년은 2016년 9월부터 적용되고 있다(Department of Education UK, 2013). 피타고라스 정리는 Key stage 3에서 ‘피타고라스 정리와 삼각비를 사용하여 직각삼각형을 포함하는 문제 해결하기’라는 수학 내용 요소로 다루고 있는데, 중학교 2학년에서 다루는 것으로 알려져 있다.

3) 싱가포르

싱가포르 교육과정은 교육과정 개정 배경, 목표, 교수요목 설계로 구성되어 있고, 피타고라스 정리는 ‘도형의 합동, 도형의 닮음, 닮은 도형의 성질, 삼각형의 닮음조건, 예각의 삼각비, 뿔과 구의 부피와 겹넓이, 실생활 맥락 문제’ 등과 함께 중학교 2학년에서 다루도록 명시하고 있다(Ministry of Education Singapore, 2013a, 2013b).

1) 미국은 국가 교육과정이 없지만 2010년 발표된 CCSSM이 국가교육과정의 역할을 하고 있음.

그런데 싱가포르의 경우, 중학교 2학년에서 피타고라스 정리를 학습한 다음, 중학교 3학년에서 두 점사이의 거리라는 제목에서 피타고라스 정리를 다시 학습할 수 있도록 하였다. 이는 싱가포르 교육과정이 나선형 교육 과정을 표방하고 있다(Ministry of Education Singapore, 2013a, 2013b)는 것과 일맥상통하는 부분이다.

[표 3] 싱가포르 중학교 기하 내용 체계표
[Table 3] Geometry contents table in Singapore

영역 학년	기하와 측정
2학년	<ul style="list-style-type: none"> ○도형의 합동 ○도형의 닮음 ○닮은 도형의 성질 ○삼각형의 닮음조건 ○피타고라스 정리 ○예각의 삼각비 ○뿔, 구의 부피와 겹넓이 ○실생활 맥락 문제
	<ul style="list-style-type: none"> ○삼각형의 합동조건, 닮음조건 ○원의 성질 ○삼각형의 넓이 ○라디안 ○두 점 사이의 거리 ○평면벡터 ○단각에서 삼각비 ○부채꼴의 호의 길이, 넓이 ○두 직선을 지나는 직선의 기울기 ○직선의 방정식

4) 일본

일본의 경우는 2009 개정 수학과 교육과정처럼 중학교 3학년에서 피타고라스 정리를 통합하여 다루고 있다. 교육과정에 제시된 학습요소로 '(3)관찰, 조작이나 실험 등의 활동을 통해 피타고라스 정리를 찾아내 이해하고, 그것을 이용해 고찰할 수 있도록 한다.'를 제시하고 있다(교육과학기술부·부산광역시교육청, 2009b).

5) 중국

중국은 제3학단(초급중학교, 7~9학년) 중 중학교 2학년에서 삼각형의 주제 안의 한 주제로 다루고 있다. 삼각형의 주제는 '삼각형의 내각, 외각, 중선, 고선, 각평분선 등의 개념 이해, 삼각형의 안정성 이해, 삼각형의 내각의 정리, 삼각형의 합동, 이등변 삼각형의 성질, 직각삼각형의 성질, 피타고라스의 정리와 그 역 정리, 삼각형의 무게 중심의 개념'으로 이루어져 있다(教育部, 2011).

3. 국제학업성취도 평가에서 피타고라스 정리

앞에서 5개국의 교육과정을 통해 대부분의 국가에서 피타고라스 정리를 중학교 2학년에서 학습하는 것으로 나타났다. 전세계 모든 사례를 조사하는 것의 한계를 극

복하기 위해 세계 여러 나라에서 공통으로 치루는 국제 학업성취도 평가의 시험 범위를 통해 피타고라스 정리를 학습하는 시기를 간접적으로 살펴보고자 한다. 여기에서는 중학교 2학년을 대상으로 하는 TIMSS(Trends in International Mathematics and Science Study)와 PISA(Program for International Student Assessment) 시험을 고찰한다.

1) TIMSS

중학교 2학년을 대상으로 설계된 TIMSS 2015 평가들(Mullis & Martin, 2013)에서 우리나라 교육과정에 반영되지 않은 내용을 제시하면 [표 4]와 같다. 이 표에서 중학교 2학년을 대상으로 하는 시험에서 피타고라스 정리가 시험 범위로 명시되어 있음을 확인할 수 있다.

[표 4] TIMSS 평가들과 상이한 교육과정 내용
[Table 4] Math content not matched with TIMSS

	TIMSS 2015 평가들	우리나라 교육과정에서 가르치는 시기
중2	피타고라스 정리를 이용 및 기하 성질을 적용한 문제 해결	중학교 3학년
	유리수가 아닌 수 및 그러한 수의 분수 및 소수로 근사	중학교 3학년
	평균, 중앙값, 최빈값, 범위, 분포 형태를 포함하는 자료의 특성 구별	중학교 3학년
	상자그림	없음

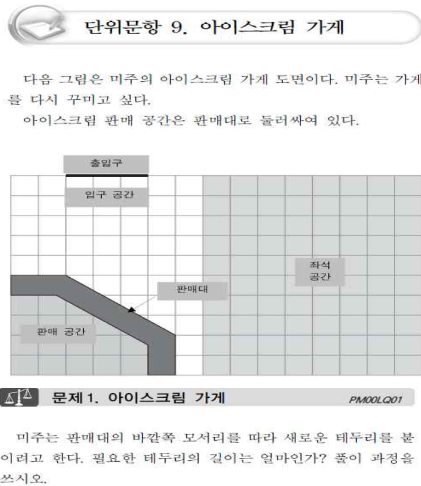
2) PISA

중학교 2학년을 대상으로 하는 PISA의 평가 문항은 [표 5]와 같이 '맥락', '수학적 내용', '수학적 과정'의 세 가지 차원의 평가들을 토대로 개발된다(송미영 외, 2013).

[표 5] PISA 2012 수학 평가들
[Table 5] PISA 2012 Math evaluation framework

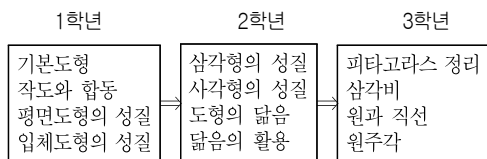
PISA 2012	
맥락	○ 개인적 ○ 사회적 ○ 직업적 ○ 과학적
수학적 내용	○ 양 ○ 공간과 모양
	○ 변화와 관계 ○ 불확실성과 자료
수학적 과정	○ 형식화하기 ○ 이용하기 ○ 해석하기
	기본 수학 능력
	○ 의사소통 ○ 수학적 표현 ○ 추론과 논증
	○ 문제해결을 위한 전략 고안
	○ 상징적·형식적·기법적인 언어와 조작의 활용
	○ 수학적 도구의 사용

평가틀 세 구성요소 중에서 수학내용에 해당하는 하위요소는 우리나라 교육과정과 달리, 양, 공간과 모양, 변화와 관계, 불확실과 자료로 다소 포괄적으로 진술되어 있어 피타고라스 정리의 포함 여부를 직접적으로 확인할 수는 없지만, PISA에서 출제된 아래 수학 문항을 통해 피타고라스 정리가 시험 범위에 포함된 것을 확인할 수 있다.



[그림 1] 피타고라스 정리 관련 문항
[Fig 1] Item related to PT (PT: Pythagorean Theorem)

4. 2009 개정 수학과 교육과정의 내용 구성 개정 이전인 2009 개정 수학과 교육과정에 따른 중학교 기하 영역의 내용 구성을 살펴보자.



[그림 2] 기하 내용의 학습 순서
[Fig 2] Order of learning of geometric content

중학교 1학년에서는 기본도형과 평면도형 및 입체도형의 성질을 학습하고, 중학교 2학년에서 삼각형과 사각형의 성질, 닮음을 학습한다. 이를 기반으로 중학교 3학년에서는 피타고라스 정리, 삼각비, 원의 성질을 학습하게 된다. 피타고라스 정리가 중학교 3학년에서 학습함으

로 인해, 중학교 1, 2, 3학년에서 학습한 다양한 영역(수와 연산 영역, 문자와 식 영역, 함수 영역) 등과 관련시켜 포괄하여 학습할 수 있도록 구성하고 있다.

첫째, 수와 연산 영역과 관련해서는 중학교 2, 3학년에서 학습한 무리수 및 실수의 개념, 제곱근을 포함한 수 등을 모두 포함하여 피타고라스 정리를 활용할 수 있도록 하였다. 제곱근을 먼저 학습한 다음 피타고라스 정리를 학습함으로써, 자연스럽게 피타고라스 정리에 포함된 제곱에 해당하는 수를 손쉽게 받아들일 수 있다.

둘째, 문자와 식 영역과 관련해서는 중학교 2학년 및 3학년에서 학습하는 곱셈공식 및 인수분해 공식을 활용하여 피타고라스 정리에 대한 정당화 과정을 간단히 설명할 수 있다. 또한 피타고라스 정리를 만족하는 미지의 수를 구하는 과정에서 자연스럽게 이차방정식의 해를 떠올릴 수 있어 미지의 수를 방정식의 해로 자연스럽게 받아들일 수 있다.

셋째, 함수 영역과 관련해서는 중학교 1학년의 좌표 평면, 중학교 2학년 및 3학년의 다양한 함수그래프를 통해 평면 위의 임의의 두 점 사이의 거리를 구할 수 있도록 하였다.

III. 연구방법

본 연구는 중학교 교육과정에서 피타고라스 정리와 관련된 내용이 어떻게 구성되어 있는지 고찰하는 문헌 연구이다. 이를 위해 2015 개정 중학교 수학과 교육과정에서 피타고라스 정리와 관련된 문헌을 고찰하였고, 외국의 교육과정과 교과서 문헌을 고찰하였다.

본 연구의 대상과 방법은 다음과 같다.

1. 연구 대상

본 연구의 대상은 국내 문헌과 국외 문헌으로 구분할 수 있다. 먼저 국내 문헌은 2015 개정 중학교 수학과 교육과정 문서이다. 이 문서에서 피타고라스 정리와 관련된 내용 영역인 수와 연산, 문자와 식, 기하 영역에 대해 분석하였다.

둘째, 외국 문헌으로는 미국, 중국, 일본 등의 최신 중학교 수학과 교육과정과 이를 반영한 중학교 수학교과서를 분석하였다.

2. 연구 방법 및 절차

본 연구는 2015 개정 중학교 수학과 교육과정에 제시된 피타고라스 정리와 관련된 내용 구성상의 문제점을 도출하고, 이러한 문제점을 해결하기 위한 대안적 방법을 제시하여 교육과정 내용의 재구조화 방향을 설정하는 문헌 연구이다. 본 연구의 목적을 달성하기 위해 수행한 연구의 절차는 다음과 같다.

첫째, 먼저 2015 개정 중학교 수학과 교육과정에서 피타고라스 관련 내용 영역에 대해 분석하고, 2009 개정 중학교 수학과 교육과정과의 차이점을 도출한다. 둘째, 세계 여러 나라의 중학교 수학과 교육과정 및 교과서를 분석하여 피타고라스 정리와 관련된 내용의 구성 방식을 분류한다. 셋째, 국외 사례를 기초로 하여 2015 개정 수학과 교육과정에 나타난 피타고라스 정리와 관련된 내용들의 구성 체제상의 문제점을 도출한다. 넷째, 2015 개정 중학교 수학과 교육과정에 나타난 문제점을 해결하기 위해 피타고라스 정리와 관련된 내용들의 재구조화 방향을 문헌 분석에 근거하여 제시한다.

IV. 결과 분석 및 논의

피타고라스 정리와 관련된 내용은 제1차 수학과 교육과정 이래 2009 개정 수학과 교육과정까지 중학교 3학년에서 다루어져 왔다. 하지만, 2015 개정 수학과 교육과정에서는 처음으로 중학교 2학년으로 이동하여 다룬다(서보역 외, 2018). 이로 인해 중학교 학교수학에서 지금까지 한 번도 경험하지 않은 새로운 시도를 하게 된 것으로, 이러한 새로운 시도에 효과적으로 대처하기 위한 방안을 고찰하고자 한다.

앞에서도 언급하였지만 피타고라스 정리에 영향을 주고받는 내용 영역은 기하 영역에 국한되지 않고, 수와 연산, 문자와 식 등과도 관련이 있다. 또한 2009 개정 수학과 교육과정까지는 피타고라스 정리가 중학교 3학년에서 학습하였고, 2015 개정 수학과 교육과정에서는 중학교 2학년에서 학습을 한다는 점이다. 이 두 가지를 고려하여 중학교 2학년과 3학년에서 학습하는 수학 학습 내용의 순서를 피타고라스 정리를 기준으로 살펴보면 [표 6]과 같다.

[표 6] 피타고라스 정리 관련 내용의 제시 순서
[Table 6] Content order related to PT

	2009 개정	2015 개정
수와 연산	○ 유리수와 순환소수	○ 유리수와 순환소수
문자와 식	○ 단항식/다항식의 계산 ○ 연립방정식, 부등식	○ 식의 계산(단항식) ○ 일차부등식, 연립일차방정식
기하	○ 삼각형의 성질 ○ 사각형의 성질 ○ 도형의 닮음과 활용	○ 삼각형과 사각형의 성질 ○ 도형의 닮음 ○ 피타고라스 정리
수와 연산	○ 제곱근의 뜻과 성질 ○ 무리수와 실수 ○ 실수의 대소 관계 ○ 근호를 포함한 식의 계산	○ 제곱근의 뜻과 성질 ○ 무리수의 뜻 ○ 실수의 대소 관계 ○ 근호를 포함한 식의 계산
문자와 식	○ 인수분해 ○ 이차방정식	○ 다항식의 곱셈, 인수분해 ○ 이차방정식
기하	○ 피타고라스 정리 ○ 피타고라스 정리의 활용 ○ 삼각비, 원의 성질	○ 삼각비 ○ 원의 성질

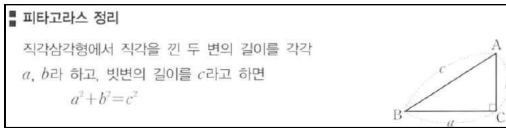
위의 표에서 가장 큰 변화는 두 가지로 요약할 수 있다. 하나는 피타고라스 정리의 이동으로 중학교 3학년에서 중학교 2학년으로 이동한 것이고, 다른 하나는 다항식의 계산(곱셈공식)이 중학교 2학년에서 3학년으로 이동한 것이다. 피타고라스 정리는 곱셈공식을 활용하고 있고, 피타고라스 정리는 다양한 내용 영역에서 활용되고 있다는 점에서 이에 대한 체계적인 분석이 이루어질 필요가 있다.

1. 피타고라스 정리와 관련된 교과서 내용 분석

제1차 교육과정 이래 우리나라 중학교 수학과 교육과정에서 피타고라스 정리는 중학교 3학년에서만 학습하였다. 지난 50여년간 약간의 변화는 있었지만 피타고라스 정리와 관련된 내용 전개의 기본적 골격은 그대로 유지하였다. 하지만 2015 개정 수학과 교육과정에서는 중학교 2학년에서 피타고라스 정리를 다루게 되어 지금까지와는 다른 모습으로의 변화가 예상된다. 이러한 변화에 능동적으로 대처하기 위해 2009 개정 수학과 교육과정까지의 피타고라스 정리 관련 학습에 포함된 수학 지식을 정리하면 다음 7가지로 분석할 수 있다.

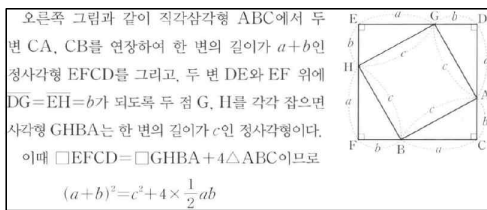
◆ 학습내용 1. 피타고라스 정리의 제시

피타고라스 정리의 제시가 가장 먼저 이루어진다. 여기에서 필요한 수학지식은 직각삼각형, 실숫값을 변의 길이로 가지는 세 변, 지수가 2인 문자의 거듭제곱 등이다.



[그림 3] 교과서 예시 1
[Fig 3] Textbook example 1

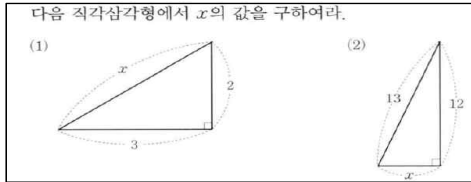
◆학습내용2. 피타고라스 정리에 대한 정당화 과정 정당화 과정은 다양하지만 가장 많은 교과서에서 접근하는 방법은 곱셈공식의 활용이다. 정당화 과정의 제시에서 필요한 수학지식은 정사각형, 곱셈공식 등이다.



[그림 4] 교과서 예시 2
[Fig 4] Textbook example 2

◆학습내용3. 피타고라스 정리를 이용하여 직각삼각형에서 미지의 한 변의 길이 구하기

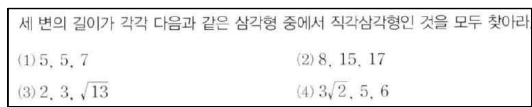
이 학습내용은 주로 예제나 문제로 제시되는데, 이 문제를 해결하기 위해 필요한 수학지식은 문자식의 연산, 이차방정식, 제곱근이 포함된 식의 계산 등이다.



[그림 5] 교과서 예시 3
[Fig 5] Textbook example 3

◆학습내용4. 세 변의 길이를 알 때, 직각삼각형인지 아닌지 판정하기

이 학습내용에서는 세 변의 길이가 양의 정수, 세 변의 길이가 양의 유리수, 세 변의 길이가 양의 실수 등 임의의 양수가 될 수 있다. 따라서 필요한 수학지식은 유리수, 무리수(제곱근) 등이다.



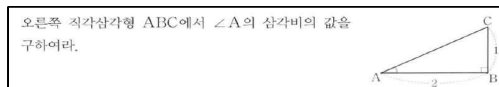
[그림 6] 교과서 예시 4
[Fig 6] Textbook example 4

◆학습내용5. 피타고라스 정리를 평면도형 및 입체도형에 활용하기

이 학습내용에서 다루어지는 주된 내용은 실숫값을 변의 길이로 가지는 직사각형의 대각선의 길이, 실숫값을 변의 길이를 가지는 정사각형의 대각선의 길이, 실숫값을 변의 길이를 가지는 정삼각형의 높이와 넓이, 실숫값을 세 변의 길이로 주어진 삼각형의 넓이, 좌표평면에서 두 점 사이의 거리, 직육면체의 대각선, 입체도형의 높이 구하기 등이다. 이러한 내용을 이해하기 위해 필요한 수학지식은 실수 및 제곱근의 연산이다.

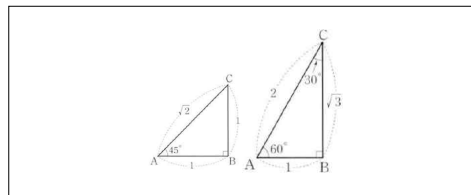
◆학습내용6. 피타고라스 정리를 활용하여 삼각비의 값 구하기

이 학습내용에서는 미지의 한 변의 길이가 실수(제곱근을 포함한 수)라는 경험을 전제로 하여, 이 변의 길이를 구한 다음 삼각비의 값을 계산하라고 요구한다. 따라서 삼각비 단원의 학습 이전에 피타고라스 정리 단원에서 제곱근을 처리하는 경험이 필요하다.



[그림 7] 교과서 예시 5
[Fig 7] Textbook example 5

◆학습내용7. 피타고라스 정리를 적용하여 특수각(30°, 45°, 60°)의 삼각비 구하기



[그림 8] 교과서 예시 6
[Fig 8] Textbook example 6

이 학습내용에서는 특수한 직각삼각형에서 세 변의 길이의 비가 $1:1:\sqrt{2}$ 혹은 $2:1:\sqrt{3}$ 이라는 사실을 인지하여야 하는데, 이때 피타고라스 정리를 통해 제곱근을 포함하는 변의 길이에 대한 경험이 필요하다.

2. 피타고라스 정리의 이동에 따른 장점 및 문제점

1) 장점

박경미 외(2014)는 피타고라스 정리를 3학년에서 2학년으로 이동을 제시하며 다음과 같이 언급하고 있다.

중학교 3학년의 제곱근과 무리수에서 무리수를 도입하는 방법의 다양성을 열어주기 위해서 피타고라스 정리를 이용한 기하적 방법이 선행될 필요가 있다는 문제의식에 따른 것이다. 현재 상태로는 무리수가 순환하지 않는 무한소수로 도입될 수밖에 없는데, 피타고라스 정리를 먼저 배우면 유리수가 아닌 수로서 통약불가능 원리의 아이디어를 담아낼 수 있다는 장점이 있기도 하다(박경미 외, 2014, p.221).

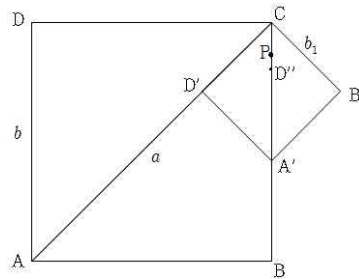
현재 교과서에서 무리수의 도입은 한 변의 길이가 2인 정사각형 내부에 만들어진 넓이가 2인 작은 정사각형을 이용하는 것이 보편적이다. 넓이가 2인 작은 정사각형의 한 변의 길이가 $\sqrt{2}$ 인데 이 수는 유한소수나 순환소수로 나타낼 수 없는 수라고 제시하고 이러한 수를 유리수가 아닌 수 즉, 무리수라고 정의하고 있다. 2009 개정 수학과 교육과정에서 이와 같은 방식만으로 도입하는 이유는 피타고라스 정리를 학습하지 않았기 때문이다. 그런데 피타고라스 정리를 학습한 다음에는 박경미 외(2014)에서도 언급하였듯이 통약불가능 원리의 아이디어를 통해 무리수를 정의할 수 있다.

Eves(1990)는 피타고라스 학파에 의한 통약불가능한 수(무리수)의 발견은 그 당시 수학자들에게 큰 충격을 주었다고 평가하고 있다. 그 당시, 두 삼각형의 닮은꼴에 대한 증명은 원래 어떤 두 변의 길이도 통약가능하다는 즉, 같은 단위로 잴 수 있다는 전제조건하에 이루어진 것이었다. 일반적으로 자연수는 신이 내린 선물이라고 하고, 정수는 어떤 유한개의 대상을 세는 과정에서 일어난 추상적 개념이며, 유리수는 일상생활을 영위하기 위해서 개개의 대상을 세는 것 뿐 아니라 길이, 무게, 시간과 같은 다양한 양을 측정할 상황에서 인식될 수 있다. 사실 유리수 체계는 모든 정수와 분수를 포함하므로 실

제적인 측정의 목적을 위해서라면 통약가능한 수(공약수 [분수공약수 포함]의 존재성)만으로 충분하다.

하지만, 피타고라스 학파는 직선 위에 어떤 유리수에도 대응되지 않는 점을 찾았고, 거리 AC가 단위길이를 한 변으로 갖는 정사각형의 대각선일 때, 직선 위의 점에 대응하는 어떤 유리수도 없음을 보였다. 따라서 그러한 점에 대응하는 새로운 수가 발견되어야 했고, 이러한 수가 유리수가 아니었으므로 그들은 무리수라고 부르게 되었다. 이것이 바로 수학사에서 하나의 거대한 이정표 중의 하나인 무리수의 발견이다. 즉, 수학사의 관점에서 보면 무리수의 발견은 통약불가능한(혹은 같은 표준으로 잴 수 없는) 수에서 출발한 것이다. 그런데 통약불가능한 수의 발견은 피타고라스 정리의 인식을 기본 전제로 하고 있다는 점이다.

다음은 피타고라스 학파가 제시한 통약불가능한 수 $\sqrt{2}$ 의 발견에 대한 내용이다. 피타고라스 정리를 학습한 학생은 아래 방법으로 무리수를 도입할 수 있다.



[그림 9] $\sqrt{2}$ 그림
[Fig 9] $\sqrt{2}$ figure

이제 통약불가능을 이용하여 $\sqrt{2}$ 가 왜 무리수인지 살펴보자. 이를 위해서 AC와 BC를 같은 단위로 잴 수 있다고 가정하고, 그 선분의 길이를 CP(최소의 값)라고 가정하자. 정사각형 ABCD에서 대각선의 길이를 $a = \sqrt{2}$ (피타고라스 정리가 필수임), 한 변의 길이를 $b = 1$ 라고 하자. $\overline{AD} = b$ 와 같은 선분 $\overline{AD'}$ 을 작도하고, 선분 $\overline{D'C} = b_1$ 에 정사각형 $A'B'C'D'$ 을 작도하자. 정사각형 $A'B'C'D'$ 의 대각선에 $\overline{A'D''} = \overline{A'D'} = b_1$ 을 포개어 놓자. 이 때, $\triangle ABD'$ 이 이등변삼각형이고, $\angle ABA'$ 과 $\angle A'D'A$ 가 각각 직각이므로 $\angle A'BD' = \angle A'D'B$ 이 성

립한다. 따라서, $\triangle A'BD'$ 은 이등변삼각형이고, $\overline{BA'} = \overline{A'D'} = b_1$ 이 된다. 그러므로 AC와 BC가 CP의 배수이기 때문에, $AC - BC = CD'$ 도 $BC - A'B = CA'$ 도 CP의 배수가 된다. 즉, 새로운 작은 정사각형에서의 한 변의 길이와 대각선의 길이도 같은 단위(CP)로 쪼갤 수 있다. 이와 같은 과정을 무한히 계속 반복할 수 있으므로, 같은 단위로 쪼갤 수 없는 두 선분이 존재하게 된다. 이러한 수가 무리수가 된다.

이외에도 피타고라스 정리를 중학교 2학년에서 학습하게 됨으로 인해, 중학교 3학년의 수와 연산, 방정식 단원의 학습에서 다양한 소재로 활용할 수 있다는 장점을 지니고 있다.

2) 예상되는 문제점

여기에서는 앞서 '1. 피타고라스 정리와 관련된 교과서 내용 분석'에 제시한 7가지 학습내용을 중심으로 고찰하고자 한다.

첫째, 피타고라스 정리의 제시에서 생기는 문제점이다. 피타고라스 정리는 삼각형의 세 변의 길이에 대한 제곱으로 이루어진다. 예를 들어 직각을 만드는 두 변의 길이가 2, 3이라고 하면, 다른 한 변은 $\sqrt{13}$ 이다. 그런데, 제곱근을 배우지 않았기 때문에 이러한 직각삼각형에 대해서는 피타고라스 정리를 적용할 수 없게 된다. 제곱근이 생기는 피타고라스 정리의 적용이 불가능하다는 것은 매우 심각한 문제가 아닐 수 없다.

둘째, 피타고라스 정리에 대한 정당화 과정에서 생기는 문제점이다. 정당화 과정에서 곱셈공식을 다루는 것이 가장 간단하고 쉬운데 곱셈공식이 중학교 3학년으로 이동함으로 인해, 새로운 방법으로 정당화 과정을 설명해야 하는 상황에 직면하게 된다. 다행을 이용한 증명 방법 등을 활용할 수 있으며 이에 대한 새로운 교수학적 고찰을 필요로 한다.

셋째, 피타고라스 정리를 이용하여 직각삼각형에서 미지의 한 변의 길이 구하기에서 생기는 문제점이다. 이 경우는 첫째 경우와 같이 제곱근을 다룰 수 없기 때문에 생기는 현상이다. 또한 미지의 한 변의 길이를 구하는 과정은 곧 이차방정식의 근을 구하는 과정이므로 이에 대한 내용도 생소할 수 있다.

넷째, 세 변의 길이를 알 때, 직각삼각형인지 아닌지를 판정하기에서 생기는 문제점이다. 일반적으로 세 변

의 길이를 2, 3, $\sqrt{13}$ 과 같이 실수 범위에서 다루어지는데, 앞으로는 유리수 범위에서만 다루어야만 한다.

다섯째, 피타고라스 정리를 평면도형 및 입체도형에 활용하기에서 생기는 문제점이다. 평면도형과 입체도형에의 활용은 주로 정사각형과 정삼각형, 정사면체, 원뿔 등인데 이 경우 선분의 길이와 도형의 넓이를 구하게 되는데 거의 대부분 유리수가 아닌 무리수(제곱근 표현)가 나오게 된다. 따라서 중학교 2학년에서는 이러한 내용 자체를 다룰 수 없게 된다. 또한 좌표평면에서 두 점 사이의 길이를 구하는 문제도 제곱근을 학습하지 않은 상황에서는 다룰 수 없다.

여섯째, 피타고라스 정리를 활용하여 삼각비의 값 구하기에서 생기는 문제점이다. 삼각비의 값을 구하기 위해서는 이차방정식 형태의 피타고라스 정리의 활용을 경험하여야 하는데, 중학교 2학년에서 이러한 경험을 할 수 없으므로 인해 중학교 3학년에서 삼각비를 학습하는 과정에서 어려움이 발생할 수 있다.

일곱째, 피타고라스 정리를 적용하여 특수각(30° , 45° , 60°)의 삼각비 구하기에서 생기는 문제점이다. 피타고라스 정리 단원에서 제곱근으로 표현되는 변의 길이에 대한 경험이 없는 상태에서 특수각의 삼각비를 학습하여야 하거나, 삼각비 단원의 학습에 앞서 이에 대한 추가적인 학습경험을 제공해야 하는 문제점이 발생한다.

3. 문제점 해결 방안 에 대한 논의

2015 개정 수학과 교육과정에 따른 교과서 개발 방향의 중학교 '교과서 개발 지침'에서 '평면도형과 입체도형에서 피타고라스 정리의 활용은 무리수를 학습한 이후 다룰 수 있다.'라고 제시하고 있다. 그러나 구체적으로 어떤 내용 영역의 단원에서 어떤 수준에서 다루어야 하는지에 대한 지침은 존재하지 않는다. 제곱근은 중학교 3학년에서 학습하는 것이 이미 정해져 있는 상태에서 평면도형과 입체도형에서 피타고라스 정리의 활용을 다룰 수 있는 구체적인 방법에 대한 모색이 필요하다. 이에 본 연구에서는 외국 교과서에서의 구체적인 사례를 기초로 하여 몇 가지 시사점을 도출하고자 한다.

1) 외국 교과서의 피타고라스 정리 내용 구성

다양한 국가들에 대한 비교결과 피타고라스 정리를 다루는 방식은 크게 네 가지로 구분된다. 첫째, 우리나라

의 2009 개정 교육과정에서처럼 중학교 3학년 중간부분에서 다루는 경우, 둘째, 중학교 3학년에서 다루되 가장 마지막 단원에서 다루는 경우, 셋째, 중학교 2학년에서 다루는 경우, 넷째, 중학교 특정 학년에서 다루는 것이 아니라 여러 학년에 걸쳐 다루는 경우이다. 이 네 가지 중 첫째는 우리나라에서 오랫동안 적용한 것이므로 제외하고 나머지 세 가지 경우의 대표 사례에 대해 고찰한다.

① 중학교 3학년 맨 마지막에서 다루는 경우: 일본

현재 일본에서 사용하는 중학교 수학 교과서는 2009년 3월에 고시된 학습지도요령을 근거로 2012년부터 적용된 것(교육과학기술부·부산광역시교육청, 2009)으로, 본 연구에서는 2015년에 출판된 교과서(日本文教出版, 2015a; 2015b; 2015c)를 기준으로 한다.

먼저, 중학교에서 피타고라스 정리와 관련되어 있는 내용 영역인 수와 연산, 문자와 식, 기하 내용 영역의 학습 순서를 표로 나타내면 [표 7]과 같다. 표를 보면 중학교 3학년 맨 마지막 내용이 피타고라스 정리임을 알 수 있다. 피타고라스 정리를 학습하기에 앞서 제곱근, 이차방정식, 닮음, 원의 성질 등을 모두 학습하는 것으로 나타났다. 일본의 피타고라스 정리의 전개 방식은 피타고라스 정리의 학습에 앞서 관련된 모든 내용을 학습하고, 피타고라스 정리 단원에서는 이 내용들을 모두 포괄하여 다룰 수 있도록 하였다.

[표 7] 일본 수학교과서의 단원 구성

[Table 7] Contents of Japanese textbooks

1학년	2학년	3학년
1.정수와 음수 ○ 정수, 음수 ○ 정수의 연산 ○ 정수의 활용	1.식과 계산 ○ 문자식의 계산 ○ 식의 활용	1.전개와 인수분해 ○ 식의 전개 ○ 인수분해 및 활용 ○ 소인수분해
2.문자식 ○ 문자식 ○ 일차식과 계산 ○ 방정식과 활용	2.연립방정식 ○ 연립방정식 ○ 방정식의 활용	2.제곱근 ○ 제곱근 ○ 제곱근의 연산
5.평면도형 ○ 기본도형 ○ 도형의 이동 ○ 기본 각도 6.공간도형 ○ 공간도형 관찰 ○ 도형의 계량	4.도형의 성질 ○ 각과 평행선 ○ 삼각형과 합동 ○ 삼각형과 증명 5.삼각형, 사각형 ○ 삼각형 ○ 평행사변형	3.이차방정식 ○ 이차방정식
총7장	총6장	총7장

구체적으로 일본 수학교과서의 피타고라스 정리 단원의 구성을 살펴보자. 피타고라스 정리는 일본에서는 삼평방 정리(三平方定理)라고 불리고, 각 절의 내용 구성을 요약하면 [표 8]과 같다.

[표 8] 일본 수학교과서의 단원 구성

[Table 8] Contents of Japanese textbooks

절제목	주요 내용
1절: 피타고라스 정리	○ 피타고라스 정리에 대한 소개 ○ 문자와 식 영역의 곱셈공식을 이용하여 피타고라스 정리에 대한 정당화 내용 제시
2절: 직각삼각형의 변의 길이	○ 직각삼각형의 세 변의 길이를 a, b, c (단, c 는 빗변)라 할 때, 세 공식 $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, $a = \sqrt{c^2 - b^2}$, $b = \sqrt{c^2 - a^2}$ 을 제시 ○ 제시된 공식을 이용한 문제 풀이 ○ 삼각형의 변의 길이가 유리수가 아닌 경우에 대한 피타고라스 정리 적용
3절: 피타고라스 정리의 역	○ 피타고라스 정리의 역에 대한 제시 ○ 피타고라스 정리의 역에 대한 간단한 정당화 설명 제시 ○ 피타고라스 정리의 역의 활용에 대한 문제 풀이
4절: 특별한 직각삼각형	○ 정삼각형을 이등변한 직각삼각형에서 세 변의 길이의 비에 대한 내용 제시 ○ 직각이등변삼각형에서 세 변의 길이의 비에 대한 내용 제시 ○ 특별한 직각삼각형에서 변의 길이에 대한 활용 문제 제시 ○ 직각삼각자를 활용한 문제 ○ 평면도형에서 피타고라스 정리의 활용(원의 성질에 적용, 접선의 길이, 평면에서 두 점 사이 거리) ○ 공간도형에서 피타고라스 정리의 활용(직육면체 대각선, 정사각뿔에 적용, 원뿔에 적용)

일본의 경우, 피타고라스 정리가 중학교 맨 마지막 단원에 있기 때문에 제곱근을 사용하여 피타고라스 정리를 다루고 있고, 정사각형, 정삼각형, 원 등 다양한 평면도형 뿐 아니라, 입체도형에서도 자연스럽게 피타고라스 정리를 활용할 수 있도록 구성하고 있다.

② 중학교 2학년에서 다루는 경우: 중국

현재 중국의 중학교 수학 교과서는 중국교육부(2011) '의무교육 수학과정표준(2011년판)'에 근거로 2012년부터

사용하고 있는 것으로, 2012년, 2013년, 2014년에 발행된 교과서(人民教育出版社 課程材料研究所, 2012, 2013, 2014)를 기준으로 하였다. 다음 [표 9]는 피타고라스 정리와 관련이 있는 수와 연산, 문자와 식, 기하 내용 영역의 학습 순서를 제시한 것이다.

[표 9] 중국 수학교과서의 단원 구성
[Table 9] Contents of Chinese textbook

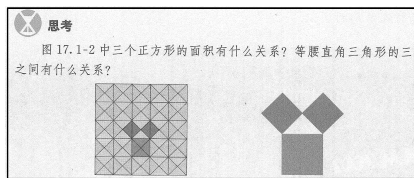
1학년	2학년	3학년
1. 유리수 ○ 정수와 음수 ○ 유리수 ○ 유리수의 연산	11. 삼각형 ○ 삼각형과 변 ○ 삼각형과 각 ○ 다각형의 내각	21. 일원일차방정식 ○ 일원일차방정식 ○ 방정식 해법 ○ 방정식 활용
2. 정식의 계산 ○ 정식 ○ 정식의 덧셈, 뺄셈	12. 삼각형 합동 ○ 합동삼각형 ○ 합동조건 ○ 각의 이등분선	23. 회전 ○ 도형의 회전 ○ 중심대칭 ○ 활용문제
3. 일원일차방정식 ○ 방정식 ○ 방정식의 해 ○ 방정식의 활용	13. 축대칭 ○ 축대칭 ○ 축대칭도형 ○ 이등변삼각형 ○ 최단거리문제	24. 원 ○ 원의 성질 ○ 원과 원 위치관계 ○ 원과 직선 위치관계 ○ 원과 호
4. 초보기하 ○ 기하도형 ○ 직선, 사선, 각	14. 곱셈공식과 인수분해 ○ 다항식의 곱셈 ○ 곱셈공식, 인수분해	27. 닮음 ○ 도형의 닮음 ○ 닮음과 삼각형 ○ 닮음의 위치
5. 교선, 평행선 ○ 교선 ○ 평행선 기초 ○ 평행선 성질 ○ 평행이동	15. 분수식 ○ 분수식 ○ 분수식 연산 ○ 분수식 방정식	29. 삼각함수 ○ 삼각함수와 활용
6. 실수 ○ 제곱근, 세제곱근 ○ 실수	16. 제곱근식 ○ 제곱근식 ○ 제곱근식 계산	30. 사영 ○ 도형의 사영 ○ 겨냥도(삼시도) ○ 입체도형 제작
8. 이원일차방정식 ○ 이원일차방정식 ○ 방정식의 해법 ○ 방정식의 활용 ○ 삼원일차방정식	17. 피타고라스 정리 ○ 피타고라스 정리 ○ 역 정리	
9. 부등식 ○ 부등식 ○ 일원일차부등식 ○ 연립일차부등식	18. 평행사변형 ○ 평행사변형 ○ 평행사변형 성질	
총10장	총10장	총10장

중국에서 피타고라스 정리는 중학교 2학년 2학기에서 학습하는데, 피타고라스 정리에 대한 학습 이전에 중학

교 1학년에서는 실수, 제곱근을 학습하고, 중학교 2학년에서는 곱셈공식, 인수분해, 분수식과 제곱근식을 모두 학습하고 있음을 알 수 있다. 비록 2학년에서 학습하지만, 우리나라와 같은 문제는 발생하지 않는다는 점에서 차이가 있다. 중국 교과서의 피타고라스 정리 단원의 구성을 살펴보면, 다음과 같다. 참고로 중국에서 피타고라스 정리는 구고²⁾정리(勾股 定理)라고 불린다.

◆17.1절. 피타고라스 정리

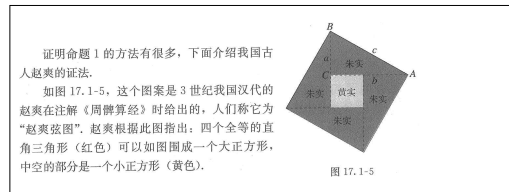
- 피타고라스 정리를 발견할 수 있는 직관적 관찰



[그림 10] 교과서 예시 7
[Fig 10] Textbook example 7

- 피타고라스 정리에 대한 소개

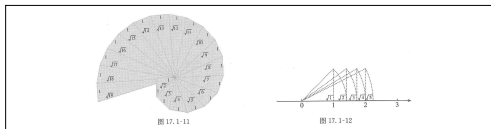
○ 문자와 식 영역의 곱셈공식을 이용하여 피타고라스 정리에 대한 정당화 내용 제시



[그림 11] 교과서 예시 8
[Fig 11] Textbook example 8

- 여러 가지 도형에서 활용 문제 제시

○ 수직선 위에 \sqrt{n} 을 피타고라스 정리를 이용하여 나타내기

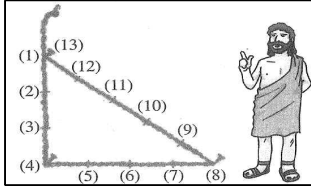


[그림 12] 교과서 예시 9
[Fig 12] Textbook example 9

2) 직각삼각형의 옛 이름

◆17.2절. 피타고라스 정리의 역

○고대 이집트의 매듭을 이용한 직각삼각형 만들기들
 통해 관찰하기



[그림 13] 교과서 예시 10
 [Fig 13] Textbook example 10

- 피타고라스 정리의 역 및 역의 정당화 설명 제시
- 피타고라스 정리의 역의 활용에 대한 문제 풀이

③ 중학교 1, 2, 3학년에서 다루는 경우: 미국

미국의 경우 표준적인 교과서는 없지만, 많은 학교에서 사용하고 있는 Prentice Hall(2012a, 2012b, 2012c) 수학교과서를 기준으로 분석하였다. 다음 [표 10]은 학년별 기하 내용 영역의 학습 순서를 제시한 것이다.

[표 10] 미국 수학교과서의 기하 단위 구성
 [Table 10] Geometry contents of USA textbook

1학년	2학년	3학년
8.기하의 도구 ○점, 선, 선분 ○각, 보각과 여각 ○삼각형의 분류 ○다각형의 분류 ○합동과 닮음 ○선대칭, 평행이동 ○길이, 무게, 부피	7.기하 ○직선과 평면 ○각의 성질과 분류 ○삼각형 ○사각형과 다각형 ○합동 ○원, 원그래프 ○작도	3.실수와 좌표평면 ○제곱근, 무리수 탐구 ○피타고라스 정리 ○정리의 활용 ○좌표평면의 그래프 ○방정식, 표, 그래프 ○평행이동 ○반사, 대칭, 회전
9.기하와 측정 ○단위, 단위 변환 ○사각형의 넓이/둘레 ○평행사변형의 넓이 ○삼각형의 넓이 ○원과 원의 둘레 ○원의 넓이 ○공간도형과 추론 ○각기둥의 겹넓이 ○사각기둥의 부피 ○원기둥의 부피 ○원기둥의 겹넓이	8.측정 ○둘레와 넓이 ○평행사변형 넓이 ○삼각형의 넓이 ○삼각형의 둘레 ○다른 도형의 넓이 ○원의 넓이/둘레 ○제곱근과 무리수 ○피타고라스 정리 ○공간도형 ○기둥의 겹넓이 ○기둥의 부피	7.기하 ○각의 쌍 ○각과 평행선 ○합동인 다각형 ○삼각형의 분류 ○사각형의 분류 ○각과 다각형 ○다각형의 넓이 ○원의 넓이 ○원의 넓이 ○작도
12.등식과 부등식 ○2단계 방정식 ○부등식 ○1단계 부등식 ○제곱근과 유리수 ○피타고라스 정리 입문	-	8.측정 ○입체도형 ○입체도형 겨냥도 ○각기둥의 겹넓이 ○뿔의 겹넓이 ○구, 닮은 입체도형
총12장	총12장	총12장

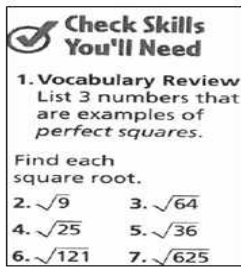
미국 교과서에서는 피타고라스 정리라는 대단원 제목은 존재하지 않지만, 중학교 1학년, 2학년, 3학년 모두에서 피타고라스 정리를 학습 주제로 다루고 있다. 각 학년에서 다루는 피타고라스 정리의 성격은 다소 차이가 있지만, 소단원 제목으로 피타고라스 정리가 있다. 또 하나 더 공통적인 것은 피타고라스 정리 소제목 바로 직전의 소제목은 모두 ‘제곱근’과 관련이 있다는 점이다.

중학교 1학년에서는 문자와 식 영역에 해당하는 ‘방정식과 부등식’ 대단원 밑에 피타고라스 정리 입문(Introducing the Pythagorean Theorem)이라는 소단원에서 학습을 하고, 중학교 2학년에서는 ‘측정’ 대단원 밑에 피타고라스 정리(The Pythagorean Theorem)라는 소단원에서 학습을 하며, 중학교 3학년에서는 ‘실수와 좌표평면’ 대단원 밑에 피타고라스 정리(The Pythagorean Theorem)라는 소단원에서 학습하고 있다. 중학교 1학년에서 등식과 부등식 단원에서 등식의 한 유형으로 간단히 직관적 수준에서 다루고 있다면, 중학교 2학년에서는 기하 단원에서 피타고라스 정리의 성질에 대해 구체적으로 학습을 하고, 중학교 3학년에서는 실수와 좌표평면 단원에서 다양한 활용의 관점에서 다루어지고 있다. 피타고라스 정리를 점차 확장하고 심화하는 나선형 교육과정의 이념을 구현한 것으로 보인다. 구체적으로 미국 교과서에서 다루어지고 있는 각 학년별 피타고라스 정리 소단원의 내용 구성은 [표 11]~[표13]과 같다.

[표 11] 미국 중학교 1학년 피타고라스 정리
 [Table 11] Contents in Grade 7

구분	주요 내용
선수학습	등식과 방정식, 제곱근과 유리수
피타고라스 정리 학습	○목표: 피타고라스 정리를 사용한 문제 해결 ○용어: 밑변, 빗변, 피타고라스 정리 ○피타고라스 정리 내용 ○빗변 혹은 밑변의 길이 구하기 ○피타고라스 정리와 실세계 문제
후행학습	없음(마지막 단위)

미국의 중학교 1학년 피타고라스 정리를 학습하기 이전에 필요한 학습내용으로 제곱근과 관련된 내용이 필수적이다. 피타고라스 정리를 학습하는 소단원 맨 앞쪽에 ‘학습자가 필요한 지식’에서 제곱근에 대한 질문이 유일하게 제시되어져 있음을 통해 확인할 수 있다.

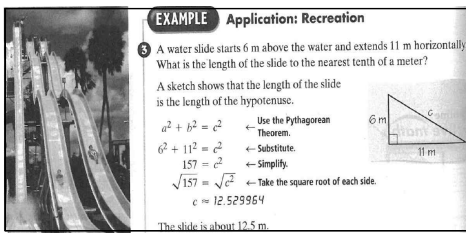


[그림 14] 사전 학습
[Fig 14] Required knowledge

[표 12] 미국 중학교 2학년 피타고라스 정리
[Table 12] Contents in Grade 8

구분	주요 내용
선수학습	다각형의 넓이/둘레, 제곱근과 무리수
피타고라스 정리 학습	<ul style="list-style-type: none"> ○ 목표: 실세계 문제를 해결하기 위해 피타고라스 정리 사용하기 ○ 용어: 밑변, 빗변, 피타고라스 정리 ○ 직각삼각형에서 세 변 사이의 관계 ○ 피타고라스 정리 내용 ○ 빗변 혹은 밑변의 길이 구하기 ○ 피타고라스 정리와 실세계 문제
후행학습	공간도형

미국의 중학교 2학년 피타고라스 정리를 학습하기 이전에 필요한 학습내용으로 다각형의 넓이와 둘레, 제곱근과 무리수가 있다. 2학년에서는 1학년에서 학습한 것보다 심화하여 실세계 문제를 해결하는 것에 초점을 맞추고 있다. [그림 15]에서 보는 것처럼 실생활 문제를 통해 피타고라스 정리의 활용이 다양하게 다루어지고 있음을 확인할 수 있다.

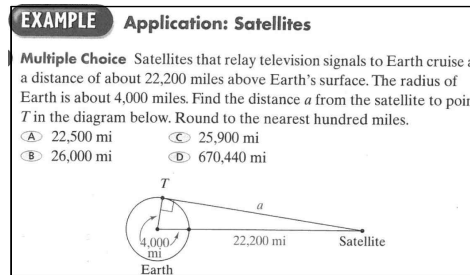


[그림 15] 피타고라스 정리 활용 문제1
[Fig 15] Application problem 1

[표 13] 미국 중학교 3학년 피타고라스 정리
[Table 13] Contents in Grade 9

구분	주요 내용
선수학습	제곱근과 무리수의 탐구
피타고라스 정리 학습	<ul style="list-style-type: none"> ○ 목표: 직각삼각형의 밑변을 구하기 위해 피타고라스 정리 사용하기, 직각삼각형의 미지의 변의 길이를 구하기 위해 피타고라스 정리 사용하기 ○ 용어: 밑변, 빗변, 피타고라스 정리 ○ 피타고라스 정리 탐구 ○ 피타고라스 정리 내용 ○ 빗변 혹은 밑변의 길이 구하기 ○ 피타고라스 정리와 실세계 문제
후행학습	좌표평면에서 그래프 그리기 식, 표, 그래프 평행이동, 대칭, 회전

미국의 중학교 3학년 피타고라스 정리를 학습하기 이전에 필요한 학습내용으로 제곱근과 무리수에 대한 심층 탐구 내용을 제시하고 있다. 여기에서는 유리수와 무리수에 대한 구분, 제곱근을 포함하는 수의 근삿값 등을 다루고 있다. 3학년에서 다루는 피타고라스 정리는 중학교 2학년에서 학습한 것보다 어려운 내용으로 구성된 것은 아니지만 실세계 및 수학의 다른 주제에 피타고라스 정리를 적용할 수 있는데 초점을 맞추고 있다. [그림 16]에서 보는 것처럼 수학의 다른 영역과 연결된 주제의 내용을 다루고 있음을 확인할 수 있다.



[그림 16] 피타고라스 정리 활용 문제2
[Fig 16] Application problem 2

2) 외국의 사례를 통한 시사점
피타고라스 정리를 학습하는 세 가지 유형을 중국, 일본, 미국의 사례를 통해 살펴보았다. 이 세 가지 유형

의 고찰을 통해 다음 두 가지 관점에서의 시사점을 도출할 수 있다.

첫째, 제곱근에 대한 학습을 피타고라스 정리의 학습에 앞서 학습하여야 한다. 필요시에는 무리수에 대한 학습 내용도 피타고라스 정리에 앞서 학습할 필요가 있다.

중학교 1, 2, 3학년 모두에서 피타고라스 정리를 학습하는 미국의 경우, 1학년 교과서에 제곱근과 무리수에 대한 학습내용이 제시되어 있다. 학습내용은 총 5쪽의 분량으로 구성된다. 1쪽에는 활동 자료로 정사각형의 넓이가 1, 4, 9, 16이 되는 정사각형의 한 변의 길이를 탐구하도록 하였고, 2쪽에서는 제곱해서 9가 되는 수를 $\sqrt{9}$ 라고 표현한다는 기호를 도입하고 있고, 3쪽에서는 제곱수(perfect square)를 소개하고 계산기를 이용하여 제곱근의 값을 구하도록 하고 있으며, 4쪽과 5쪽에서는 정말 단순한 연습문제들을 다루고 있다. 중학교 1학년에서 제곱근의 학습내용은 수학에서 사용하는 여러 가지 기호 중의 하나로 매우 간단하고 단순하게 $\sqrt{\quad}$ 기호를 도입하고 있다. 2학년 교과서에서는 $\sqrt{a^2}=a$ 가 되는 사실을 학습내용으로 다루고 있고, $\sqrt{2}$ 가 순환하지 않는 무한소수가 된다는 것을 경험적으로 다루는 수준에서 마무리를 하고 있다. 3학년 교과서에서는 제곱근을 포함한 수를 수직선 위에 표현하는 내용을 다루고 있고 이를 통해 실수를 분류할 수 있는 수준에서 다루고 있었다.

미국의 교과서는 피타고라스 정리를 학습하기 이전에 제곱근과 무리수를 다루고 있지만 학생의 수준을 고려하여 직관적으로 명확한 수준에서 학습이 이루어지고 있었고, 대수적인 조작은 전혀 다루고 있지 않아 학생들이 쉽게 이해할 수 있는 수준에서 교과서가 진술되어 있었다.

중학교 2학년 2학기에서 피타고라스 정리를 처음 학습하는 중국의 경우, 피타고라스 정리를 학습하지 않는 중학교 1학년에서부터 제곱근과 세제곱근에 대한 학습내용이 제시되어 있다. 1학년의 제6단원 ‘실수’ 단원 전체에서 이와 관련된 내용을 다루는 것으로 나타났고, 주요 내용은 식을 이용한 제곱근의 정의, 제곱근의 근삿값, 세제곱근의 정의, 세제곱근의 근삿값, 실수의 분류, 수직선 위에 무리수 나타내기, 실수의 대소관계 등이다. 중학교 1학년에서는 제곱근의 성질 및 제곱근의 연산을 다루는 것을 제외하고는 우리나라 중학교 3학년에서 다루는 대

부분의 내용을 다루고 있었다. 2학년 교과서에서는 16단원 ‘제곱근식’ 단원 전체에서 제곱근의 성질, 제곱근의 사칙계산, 분모의 유리화 등을 다루고 있었다.

중국의 교과서는 피타고라스 정리를 학습하기 이전에 우리나라 중학교 3학년 1학기에서 다루는 실수, 제곱근, 제곱근의 연산에 대한 모든 내용을 다루는 것으로 나타났다.

중학교 3학년 마지막 단원에서 피타고라스 정리를 학습하는 일본의 경우, 3학년 1학기에서 제곱근, 무리수 등을 학습하는 것으로 나타났다. 다루는 수준은 우리나라와 유사하였다.

둘째, 피타고라스 정리의 넓은 활용성에 비추어 다양한 활용에 대한 학습이 필요하다. 우리나라의 경우, 피타고라스 정리 활용에 대한 성취기준은 삭제하였지만, 교과서 집필 지침에는 제곱근을 학습한 후 다룰 수 있다는 여지를 남겨 놓고 있다.

미국의 경우, 3년 동안 피타고라스 정리를 학습하면서 정도의 차이는 있지만 매 학년마다 활용에 대한 문제를 다루고 있다. 1학년에서는 피타고라스 정리가 중심이지만 실세계 문제를 다루고 있고, 2학년에서는 피타고라스 정리의 학습목표 자체를 ‘실세계 문제 해결’이라고 명시하고 있으며, 3학년에서는 다양한 수학적 지식과 연계하여 다양한 활용문제를 폭넓게 다룰 수 있도록 교과서를 구성하고 있다.

중국의 경우, 제곱근과 실수를 학습한 다음 피타고라스 정리를 학습하고 있다. 그 이후 평행사변형과 그 성질, 원의 성질, 원과 호, 도형의 닮음, 삼각함수, 도형의 사영 등을 다루는데, 이러한 주제의 학습에서 피타고라스 정리를 폭넓게 활용하고 있는 것으로 나타났다. 피타고라스 정리를 2학년에서 학습하지만, 다른 주제의 학습에서 피타고라스 정리의 활용을 다양하게 다루고 있었다.

일본의 경우, 중학교 마지막 단원이 피타고라스 정리이다. 이로 인해 자연스럽게 피타고라스 정리의 적용 소단원에서 중학교 전체 내용 영역에서 피타고라스 정리를 적용할 수 있도록 구성하였다. [표 8]에서 보는 것처럼 4개의 소단원 중 3개의 소단원이 피타고라스 정리의 활용에 할애하고 있었다.

4. 피타고라스 정리와 관련된 내용의 재구조화

2015 개정 교육과정에서 피타고라스 정리가 중학교 2학년으로 이동하였다. 그런데 피타고라스와 관련이 있는 제곱근에 대한 배려가 없었다. 또한 성취기준에서 피타고라스 정리의 활용을 삭제하였고, 제곱근을 학습한 다음 다룰 수 있다는 매우 모호한 지침만 있는 상태이다. 미국의 사례를 통해 제곱근을 피타고라스 정리에 앞서 배움으로 인해 생길 수 있는 학습 부담의 측면은 거의 없고, 중국의 사례를 통해 볼 때, 우리나라에서도 중학교 2학년에서 제곱근에 대한 내용을 학습할 수 있다고 판단된다. 이러한 점을 고려하여 2015 개정 수학과 교육과정을 기반으로 피타고라스 정리와 관련된 내용의 재구조화 방향을 다음과 같이 제시하고자 한다. 참고로 본 연구에서는 피타고라스 정리와 관련이 있는 내용으로 수와 연산, 문자와 식, 기하 영역으로 한정하였다.

본 연구에서 도출한 재구조화 방향은 다음 두 가지이다. 첫째, 앞에서 제시한 예상되는 일곱 가지 문제점을 해결하는 것, 둘째, 외국의 사례를 통한 시사점을 구체화시키는 것으로 설정하였다.

먼저, 앞에서 제시한 일곱 가지 문제점을 해결하는 방법은 간단히 살펴보자. 첫째 문제점은 피타고라스 정리의 제시에 대한 부분인데, 이것은 제곱근에 대한 사전 학습만으로 해결될 수 있다. 둘째 문제점은 피타고라스 정리의 정당화와 관련된 부분으로 새로운 정당화 방법을 발굴하는 것으로 해결될 수 있다. 실제로 닳음과 함께 피타고라스 정리를 학습하게 되므로, 인도의 수학자 바스카라의 증명법(aves, 1990)으로 간단히 해결할 수 있다. 셋째 문제점은 제곱을 포함한 방정식과 관련된 부분인데, 이것은 제곱근의 정의에서 $x^2 = a$ 에 대한 선행 경험을 필요로 하는 것으로 제곱근을 정의할 때 미지의 x 의 제곱에 대한 강조를 통해 해결할 수 있다. 넷째 문제점은 실수의 값을 가지는 변의 길이에 대한 부분이므로, 제곱근과 무리수에 대한 사전 학습만으로 해결될 수 있다. 다섯째, 여섯째, 일곱째 문제점은 피타고라스 정리의 활용에 대한 것으로 제곱근과 연계된 피타고라스 정리의 활용에 대한 경험을 통해 해결할 수 있다.

외국의 교과서는 서로 다른 다양한 시기에 피타고라스 정리를 학습하고 있었는데, 우리나라에 적용 가능한 시사점으로 첫째, 피타고라스 정리 이전에 제곱근과 무

리수에 대한 학습, 둘째, 다양한 활용의 강조로 요약할 수 있다.

따라서 우리나라에서 예상되는 여러 가지 문제점을 효과적으로 해결하기 위해 외국의 사례를 시사점으로 삼아 향후 우리나라 교육과정에서 적용 가능한 피타고라스 정리와 관련된 내용에 대한 교육과정 재구조화 방안으로 다음 [표 14]와 같이 제시할 수 있다. [표 14]에 제시된 것과 같이, 중학교 2학년 수와 연산과 관련된 단원에서 ‘제곱근과 무리수’를 학습하도록 하고, 중학교 3학년 수와 연산과 관련된 단원에서 ‘제곱근과 피타고라스 정리’를 학습하도록 하는 것으로 요약할 수 있다.

[표 14] 피타고라스 정리 관련 내용의 재구조화
[Table 14] Reorganization of Content related to PT

2015 개정		재구조화된 내용
수와 연산	○ 유리수와 순환소수	○ 유리수와 순환소수 ○ 제곱근과 무리수
문자와 식	○ 식의 계산(단항식) ○ 일차부등식·연립일차방정식	○ 식의 계산(단항식) ○ 일차부등식·연립일차방정식
기하	○ 삼각형과 사각형의 성질 ○ 도형의 닳음 ○ 피타고라스 정리	○ 삼각형과 사각형의 성질 ○ 도형의 닳음 ○ 피타고라스 정리
수와 연산	○ 제곱근의 뜻과 성질 ○ 무리수의 뜻 ○ 실수의 대소 관계 ○ 근호를 포함한 식의 계산	○ 제곱근의 성질 ○ 실수의 대소 관계 ○ 근호를 포함한 식의 계산 ○ 제곱근과 피타고라스 정리
문자와 식	○ 다항식의 곱셈, 인수분해 ○ 이차방정식	○ 다항식의 곱셈, 인수분해 ○ 이차방정식
기하	○ 삼각비 ○ 원의 성질	○ 삼각비 ○ 원의 성질

먼저, 현재 중학교 2학년의 수와 연산 단원에서 다루는 내용은 ‘유리수와 순환소수’로 수의 표현(notation)에 대한 부분이지 수의 분류는 아니다. 같은 맥락에서 제곱근 역시 수의 표현과 관련된 부분이지 수의 분류가 아니라는 점에서 유사한 속성을 지니고 있다. 따라서 수를 표현하는 방법으로서 순환소수와 더불어 제곱근을 학습하도록 구성하고, 자연스럽게 유리수와 무리수의 정의에 대해 학습하도록 구성하는 것이다. 다음으로, 중학교 3학년의 수와 연산 단원에서 다루는 내용은 중학교 2학년에서 학습한 내용을 심화, 발전시켜 현재와 같이 제곱근의

성질과 실수의 대소 관계, 제곱근을 포함한 식의 계산을 학습하게 한다. 그 후, 피타고라스 정리의 활용에 대한 중요성을 부각시키고, 향후 학습에 발생할 수 있는 문제점을 최소화하며, 제곱근을 포함한 식의 계산을 적극적으로 활용할 수 있는 피타고라스 정리의 활용 내용을 다룰도록 구성하는 것이다.

V. 결론 및 제언

본 연구에서는 2015 개정 중학교 수학과 교육과정의 가장 큰 변화 중의 하나인 피타고라스 정리의 중학교 2학년 이동에 따른 예상되는 문제점을 분석하고, 이를 해결할 수 있는 내용의 재구조화를 목적으로 수행되었다. 이를 위해 2015 개정 수학과 교육과정의 분석, 다양한 외국 사례의 조사와 분류 및 이를 통한 시사점의 도출, 최종적으로 피타고라스와 관련된 내용의 재구조화를 연구내용으로 하였다. 본 연구를 통한 얻은 결론 및 제언은 다음과 같다.

세계 여러 국가에서 피타고라스 정리를 다루는 방식은 매우 다양하다. 대부분의 국가에서 중학교 2학년에서 다루는 것으로 나타났지만, 일본과 같이 중학교 3학년에서 다루고 있는 나라도 있고, 미국처럼 중학교 1, 2, 3학년에서 모두 다루고 있는 나라도 있었다. 이들 나라들의 다양한 사례로부터 우리나라의 현재 교육과정에 제공할 수 있는 유의미한 시사점을 도출하려고 하였고, 최근 급하게 피타고라스 정리를 중학교 2학년으로 이동한 우리나라에 맞는 최적의 재구조화 방안을 설정하려 하였다.

첫째, 피타고라스 정리는 중학교 1, 2, 3학년 어디에서나 학습할 수 있는 내용 요소라는 점이다. 따라서 우리나라에서 중학교 2학년에서 학습하는 것은 매우 자연스러운 것임에 틀림이 없어 보인다. 다만, 피타고라스 정리를 학습하기 이전의 선행조건이 한 가지 존재하고 있는데, 그것이 제곱근이다. 어느 한 나라 예외도 없이 피타고라스 정리의 학습은 제곱근의 학습을 전제로 한다는 점이다. 따라서 피타고라스 정리를 학습하기 이전에 제곱근을 학습하여야 하는데, 가장 최적의 위치는 중학교 2학년 유리수와 순환소수 내용 단원에 배치하는 것이다.

둘째, 피타고라스 정리는 정리 그 자체도 중요하지만, 그것의 활용성에 매우 중요한 가치를 두고 있다는 점이

다. 즉, 피타고라스 정리의 활용에 대한 성취기준은 삭제될 수 없는 학습요소라는 점이다. 중학교 2학년에서 제곱근을 포함한 식의 계산 없이 피타고라스 정리를 학습함으로써 인해 가지는 한계를 극복하기 위한 방안이 강구되어야 한다는 점이다. 이를 위해 중학교 3학년 수와 연산 단원에서 제곱근을 포함한 사칙계산을 학습한 이후, 제곱근과 피타고라스 정리의 활용 소단원을 새롭게 구성할 것을 제안한다. 더불어 이에 대한 성취기준도 추가되어야 한다.

지금까지의 연구결과를 바탕으로 다음과 같은 제언을 할 수 있다. 첫째, 2015 개정 수학과 교육과정에서는 학년별 학습량 적정화를 위해 '피타고라스 정리'를 중학교 2학년으로 이동하였다. 하지만 이에 대한 구체적인 대안은 없는 상황이다. 본 연구를 통해 새로운 교과서 구성방안의 마련을 제언한다. 둘째, 피타고라스 정리를 중학교 3학년에서 2학년으로 이동함으로써 중학교 3학년의 제곱근, 이차방정식, 삼각비 등 피타고라스 정리가 필요한 맥락에서 의미 있게 활용될 수 있는 방안의 모색이 필요하다. 셋째, 교수·학습 방법 및 유의 사항에서 제곱근과 무리수는 피타고라스 정리를 이용하여 도입할 수 있다고 언급하고 있는데, 본 연구 결과를 통해 무리수를 도입하는 바람직한 방향 제시에 대한 연구의 필요성을 제언한다.

참 고 문 헌

- 교육과학기술부·부산광역시교육청(2009). 세계 각국의 교육과정 및 운영사례(II) -일본-. 교육과정자료-437.
- Ministry of Education, Science and Technology & Busan Metropolitan City Office of Education(2009). *Educational curriculum and operations in world countries (II) - Japan -*. Curriculum Resources -437
- 교육부 (2015). 수학과 교육과정, 세종: 교육부.
- The Ministry of Education (2015). *Mathematics curriculum*, Saejong: ME.
- 박경미·권오남·박선화·박만구·변희현·강은주·서보익·이환철·김동원·김선희 (2014). 문·이과 통합형 수학과 교육과정 재구조화 연구, 서울: 교육부.
- Park, K.M., Kwon, H.N., Park, S.H., Park, M G., Phen, H.H., Kang, E.J., Suh, B.E., Lee, H.C., Kim, D.W. & Kim. S.H. (2014). *A research on humanities and nature integrated*

- mathematics curriculum restructuring*, Seoul: ME.
- 박경미 외 41명(2015). 2015 개정 수학과 교육과정 시안 개발 연구. 한국과학창의재단 연구보고 BD15110002.
- Park, K. M. & 41 others (2015). *A Study on the development of revised curriculum in the Mathematics Department of Research Report of Korea Science Foundation*.
- 서보억 · 김남균 · 도중훈 · 박윤범 · 김기탁 · 박영근 · 최인영(2018). *수학과 교육과정 변천에 대한 분석 연구*. 한국과학창의재단 연구보고.
- Suh, B.E., Kim, N.K., Do, J.H., Park, Y.B., Kim, K.T., Park, Y.K. & Choi, I.Y. (2018). *A Study on the Transition of Mathematics Curriculum*. Korea Science and Engineering Foundation Research Report
- 송미영 · 임해미 · 최혁준 · 박혜영(2013). *OECD 국제 학업성취도 평가 연구: PISA 2012 결과 보고서*. 한국교육과정평가원 연구보고 RRE-2013-6-1.
- Song, M.Y., Lim, H.M., Choi, H.J., Park, H.Y. (2013). *OECD International Academic Achievement Assessment Study: PISA 2012 Outcome Report*. Korea Research Institute for Curriculum and Evaluation Research Report RRE-2013-6-1.
- Common Core State Standards Initiative(2017). *Common Core State Standards for Mathematics*. http://www.corestandards.org/wp-content/uploads/Math_Standards1.pdf(검색일: 2017.12.10.).
- Department of Education UK(2013). *Mathematics Programme of study for key stage 3*. <http://webarchive.nationalarchives.gov.uk/20131202172639/https://media.education.gov.uk/assets/files/pdf/m/mathematics%20-%20key%20stage%204%2004-02-13.pdf>.
- Eves, H.(1990). *An Introduction to the History of Mathematics*, Saunders College Publications.
- Martin, M. O., Mullis, I. V. S., & Foy, P.(2012). *TIMSS 2011 International Science Report*. MA: Boston College.
- Ministry of Education Singapore(2013a). *O- & N(A)-Level Mathematics Teaching and Learning Syllabus*. Singapore.
- Ministry of Education Singapore(2013b). *Primary Mathematics Teaching and Learning Syllabus*. Singapore.
- Prentice Hall(2012a). *Mathematics course1*, Boston: Pearson Prentice Hall Inc.
- Prentice Hall(2012b). *Mathematics course2*, Boston: Pearson Prentice Hall Inc.
- Prentice Hall(2012c). *Mathematics course3*, Boston: Pearson Prentice Hall Inc.
- 教育部 (2011). *義務教育各學科課程標準<2011年版>*, 北京: 北京師範大學出版集團.
- The Ministry of Education (2011). *2011 reformed Chinese Mathematics Curriculum*, Beijing: Beijing Teachers University Press.
- 日本文教出版(2015a). *中學數學1年*, 東京: 日本教育研究センター.
- Japanese Education Publishing(2015a). *Middle School Mathematics 1*, Japan Education Publishing Center.
- 日本文教出版(2015b). *中學數學2年*, 東京: 日本教育研究センター.
- Japanese Education Publishing(2015b). *Middle School Mathematics 2*, Japan Education Publishing Center.
- 日本文教出版(2015c). *中學數學3年*, 東京: 日本教育研究センター.
- Japanese Education Publishing(2015c). *Middle School Mathematics 3*, Japan Education Publishing Center.
- 人民教育出版社 課程材料研究所 (2012). *義務教育教科書 數學 7年級 上冊/下冊*, 北京: 人民教育出版社.
- People's Education Publishing Materials Research Institute (2012). *Compulsory education textbook mathematics grade 7*, Beijing: People's Education Press.
- 人民教育出版社 課程材料研究所 (2013). *義務教育教科書 數學 8年級 上冊/下冊*, 北京: 人民教育出版社.
- People's Education Publishing Materials Research Institute (2013). *Compulsory education textbook mathematics grade 8*, Beijing: People's Education Press.
- 人民教育出版社 課程材料研究所 (2014). *義務教育教科書 數學 9年級 上冊/下冊*, 北京: 人民教育出版社.
- People's Education Publishing Materials Research Institute (2014). *Compulsory education textbook mathematics grade 9*, Beijing: People's Education Press.

A Study on Reorganization of 'Pythagorean Theorem' in School Mathematics

Suh, Bo Euk

Department of Mathematics Education,, Chungnam National University

E-mail : eukeuk@cnu.ac.kr

One of the biggest changes in the 2015 revised mathematics curriculum is shifting to the second year of middle school in Pythagorean theorem. In this study, the following subjects were studied. First, Pythagoras theorem analyzed the expected problems caused by the shift to the second year middle school. Secondly, we have researched the reconstruction method to solve these problems.

The results of this study are as follows. First, there are many different ways to deal with Pythagorean theorem in many countries around the world. In most countries, it was dealt with in 7th grade, but Japan was dealing with 9th grade, and the United States was dealing with 7th, 8th and 9th grade.

Second, we derived meaningful implications for the curriculum of Korea from various cases of various countries. The first implication is that the Pythagorean theorem is a content element that can be learned anywhere in the 7th, 8th, and 9th grade. Second, there is one prerequisite before learning Pythagorean theorem, which is learning about the square root. Third, the square roots must be learned before learning Pythagorean theorem. Optimal positions are to be placed in the eighth grade 'rational and cyclic minority' unit.

Third, Pythagorean theorem itself is important, but its use is more important. The achievement criteria for the use of Pythagorean theorem should not be erased. In the 9th grade 'Numbers and Calculations' unit, after learning arithmetic calculations including square roots, we propose to reconstruct the square root and the utilization subfields of Pythagorean theorem.

* ZDM Classification : D33

* 2000 Mathematics Subject Classification : 97U20

* Key words : Pythagorean Theorem, 2015 Reform Curriculum, Mathematics Textbook, Geometry Contents, Teaching Material

* This work was supported by research fund of Chungnam National University