

선형 PID 제어기 설계에 관한 연구

조준호*
 원광대학교 전자융합공학과

A Study on the Design of Linear PID Controller

Joon-Ho Cho*
 Dept. of Electronics Convergence Engineering, Wonkwang University

요약 본 논문은 선형 PID 제어기의 설계 방법에 대해서 설명하였고, 향후 설계 방법에 대해서 제안 하였다. 첫 번째 PID 설계 방법으로는 위상여유와 이득여유를 보장하는 방법이다. 이 방법은 주파수 영역에서 설계하는 것으로 안정도를 보장한다. 두 번째 방법은 내부 모델 제어 방법이다. 이 방법은 제어 모델에 대한 내부 모델을 동정 후 내부 모델의 파라미터를 이용하여 PID 제어기를 설계하는 것이다. 따라서 이 방법은 외란에 강한 특성을 갖고 있다. 마지막으로 제안하는 것은 Cascade-smith-Predictor 제어기 이다. 이방법의 Cascade 제어기와 smith-Predictor의 구조를 결합한 것으로 강인제어와 최적제어 두 가지 장점을 갖는 제어기 구조이다. 이 방법은 최적 제어기 설계 방법으로 성능 평가 지수를 얻을 수 있을 것이다. 이와 같은 PID 제어기 설계 방법은 비선형 방법의 기초가 되며, 지속적인 연구가 수행되고 있다.

키워드 : 선형 제어, 내부모델 , 안정도, 강인제어, 비선형 제어

Abstract This paper describes the design method of the linear PID controller and proposed the design method in the future. The first PID design method is to ensure phase margin and gain margin. This method guarantees stability by designing in the frequency domain. The second method is an internal model control method. This method is to design the PID controller using the parameters of the internal model after identifying the internal model for the control model. Therefore, this method has a strong disturbance characteristic. Finally, a proposed Cascade and smith-Predictor controller. The combination of the cascade controller and the smith-predator of this method is a controller structure that has two advantages: robust control and optimal control. This method can obtain the performance evaluation index as the optimal controller design method. This PID controller design method becomes the basis of the nonlinear method and is being continuously studied.

Key Words : Linear control, internal model, stability, robust control, nonlinear control

1. 서론

PID(Proportional and Integral and Derivative) 제어기는 이해하기 쉽고 구조가 간단하며 실제 구현이 용이하여 공정 산업분야에서 널리 사용되고 있는 제어기이다[1-4]. PID 제어기를 설계할 때 가장 중요한

것은 파라미터를 결정하는 것이다.

따라서 PID 제어기의 파라미터를 결정하는 방법에 대하여 많은 연구가 이루어지고 있다[5]. 그 중에서 Ziegler-Nichols Rule, Cohen-Coon Method, IAE, ISE, ITAE 방법들이 보편적으로 쓰이고 있다. 그러나 이

*Corresponding Author : 조준호(cho1024@wku.ac.kr)

러한 방법들 대부분은 1차 및 2차의 모델에 대해서는 적용이 용이하다. 따라서 고차모델이나 지연시간이 큰 공정에 대하여 좋은 성능을 얻을 수 있는 범용적인 PID 제어기의 동조방법에 대한 연구가 진행되고 있다. 그 중 최근 연구된 것으로는 축소 모델의 계수 값을 이용하여 제어 파라미터 값을 직접 구하는 방법이 있다[6-12]

이와 같은 범용적 제어를 설계하기 위한 선행 조건으로는 고차의 모델과 같은 응답을 나타내는 축소 모델을 구하는 것이다. 시간 영역에서의 대표적인 모델 축소 방법으로는 Pade 근사화 방법, Routh stability 근사화 방법이 있고, 주파수 영역에서의 대표적인 모델 축소 방법으로는 Wang의 모델 축소 방법이 있으며, 입·출력 데이터를 이용한 방법으로는 최소자승법을 이용한 방법 등이 있다[13-17]. 본 논문에서는 축소 모델을 이용하여 선형 제어 방법에 대해서 설명한다. 첫 번째 방법은 이득여유와 위상여유를 만족하는 PID 제어기 설계이다. 이 방법은 주파수 영역에서 안정도를 만족해야 하므로 입·출력 데이터를 이용한 모델 축소 방법으로써 과도상태와 정상상태로 분류 한 뒤 과도 상태 부분은 세분화 하여 각 그룹에 맞는 FOPTD(First Order Plus Time Delay Model)로 축소 모델을 구하고, 정상상태 부분은 하나의 FOPTD로 축소하는 알고리즘을 제안 하였다. 이렇게 과도 상태와 정상 상태로 분류 및 그룹화 하여 단조로운 응답 뿐만 아니라 진동 응답까지 표현 할 수 있어 다양한 동특성을 갖는 공정들에 대해 범용적으로 적용할 수 있는 장점이 있다. 제어구조로는 지연시간을 보상하는 Smith predictor 구조를 적용하였고, 제어 파라미터값들은 그룹에 맞는 FOPTD 모델을 선택하여 모델의 계수로부터 성능지수 ITAT가 최소가 되도록 최적의 값을 구하였다.

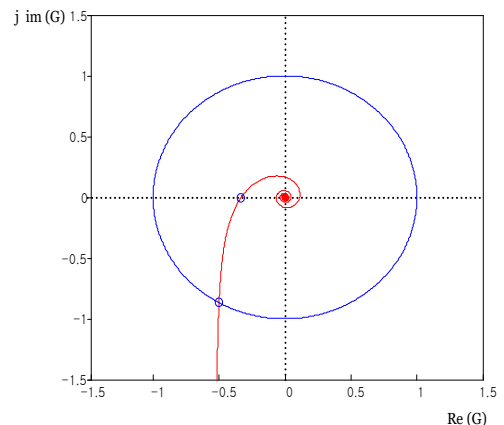
본 논문의 구성은 동적 시스템의 모델 파라미터 동정, 최적화 제어기 설계 알고리즘, 결론으로 구성되어 있다.

2. 선행연구

2.1 이득여유와 위상여유를 만족하는 설계

제어 파라미터 값의 결정시 고려 사항으로는 제어 성능지수(IAE, ISE, ITAE), 안정도, 설계 사양 등

이 있다. 이 중 제어기 설계중 가장 먼저 고려해야 할 사항은 시스템의 안정도이다. 이러한 이유로 안정도를 고려한 제어기 설계 방법이 연구되어지고 있다. Fig. 4.4는 이득여유와 위상여유를 만족하는 Nyquist 선도를 나타 낸 것이다. 이득여유와 위상여유는 주파수 영역에서의 상대 안정도 척도로 가장 많이 사용되고 있다. 이득여유와 위상여유를 고려한 제어기 설계 방법으로는 계산적인 방법, 검사에 의한 방법, Nyquist 선도와 보드선도를 이용한 방법, arctan 함수의 1차 선형 보간식을 사용하는 방법 등이 연구되었다. 이 방법 중 HO, HANG이 제안한 arctan 함수의 1차 선형식을 사용한 동조 방법은 적응제어 및 자동-동조의 문제점을 해결했지만, arctan 함수의 보간식을 적용함으로써 설계사양과 오차가 발생한다.



[Fig. 1] Nyquist Curve Specified Gain and Phase Margin

이러한 오차를 개선하기 위해서 arctan 함수를 사용하지 않고 위상여유와 이득여유를 만족하는 제어기 설계 방법이 제안되었으며, 본 논문에서는 1차의 지연시간을 갖는 모델에 대해서 고려하였다.

2.1.1. 1차의 지연시간을 갖는 모델

PI 제어기의 전달함수 $G_c(s)$ 을 식 (1), 1차의 지연시간을 갖는 제어공정 전달함수를 식 (2)로 나타내었다.

$$G_c(s) = \frac{k_p s + k_i}{s} \quad (1)$$

$$G_p(s) = \frac{k}{1+s\tau} e^{-sL} \quad (2)$$

식(1)과 식(2)로부터 개루프 전달함수 $G_c(s) G_p(s)$ 을 구한다.

$$G_p(s)G_c(s) = k_p s \frac{ke^{-sL}}{(\tau s + 1)s} + k_i \frac{ke^{-sL}}{(\tau s + 1)s} \quad (3)$$

식(3)에서 지연시간을 오일러 공식을 적용하고, 주파수응답 w 함수로 나타내면 식 (4)와 같다.

$$G_p(jw) G_c(jw) = k_p r_x + k_i r_y + j k_p i_x + j k_i i_y \quad (4)$$

여기서

$$r_x = \frac{k(\cos(wL) - \tau w \sin(wL))}{\tau^2 w^2 + 1},$$

$$r_y = \frac{k(-\tau w^2 \cos(wL) - w \sin(wL))}{w^2 + \tau^2 w^4}$$

$$i_x = \frac{k(-\tau w \cos(wL) - \sin(wL))}{\tau^2 w^2 + 1},$$

$$i_y = \frac{k(-w \cos(wL) + \tau w^2 \sin(wL))}{w^2 + \tau^2 w^4} \quad \text{이다.}$$

식(4)을 보면 실수부는 제어파라미터 k_p, k_i 값과 제안된 함수 r_x, r_y 의 곱의 합 형태이며, 허수부 부분도 제어파라미터 k_p, k_i 값과 제안된 함수 i_x, i_y 와의 곱의 합 형태이다. 또한 제안된 함수 (r_x, r_y, i_x, i_y) 의 구성을 보면 공정의 파라미터 값 k, L, τ 들과 각주파수 w 로 구성되어있다.

위와 같은 특성들을 이용하여, 본 논문에서는 이득여유와 위상여유를 만족하는 PI 제어를 설계하기 위하여 다음과 같은 2단계의 알고리즘을 적용하였다.

1단계) 제안된 함수 (r_x, r_y, i_x, i_y) 의 값 결정.

제안된 함수의 값을 결정하기 위해서는 공정의 파라미터 값 k, L, τ 들과 w 값을 결정해 줘야 한다. 제안된 함수들의 값은 앞 장에서 설명한 모델링 방법으로 구한 지연 시간을 갖는 1차 함수의 파라미터 값을 구한다. 또한 각 주파수 w 의 범위를 구하기 방법으로 Routh 안정도 판별법에 의한 1차의 지연시간을 갖는

모델에 대하여 PI 제어기 파라미터의 범위를 먼저 구한 뒤 시스템의 안정한 범위에서 이득여유와 위상여유를 만족하는 각 주파수의 범위를 구하였다. 이렇게 구한 공정파라미터와 각 주파수 w 의 범위 값으로 제안된 함수 (r_x, r_y, i_x, i_y) 의 범위를 구할 수 있다.

2단계) 이득여유 및 위상여유를 만족하는 PI 제어 파라미터 값 결정

식 (4)식에서 이득여유와 위상여유를 만족하는 것은 식(5)~(8)과 같다.

$$k_p \times r_x + k_i \times r_y = -\frac{1}{Am} \quad (5)$$

$$k_p \times i_x + k_i \times i_y = 0 \quad (6)$$

$$k_p \times r_x + k_i \times r_y = -\cos(Pm) \quad (7)$$

$$k_p \times i_x + k_i \times i_y = -\sin(Pm) \quad (8)$$

1) 이득여유를 만족하는 제어파라미터 동조

위 수식들로부터 이득여유를 만족하는 PI제어 파라미터 값은 식 (9),(10)과 같다.

$$k_p = \frac{-\frac{1}{Am} - k_i \times r_y}{r_x} \quad (9)$$

$$k_i = \frac{\frac{1}{Am} \times i_x}{r_x \times i_y - r_y \times i_x} \quad (10)$$

2) 위상여유를 만족하는 PI 제어파라미터 동조

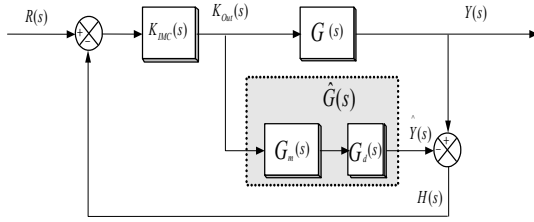
위 수식들로부터 위상여유를 만족하는 PI제어 파라미터 값은 식 (11),(12)과 같다.

$$k_p = \frac{-\cos(pm) - k_i \times r_y}{r_x} \quad (11)$$

$$k_i = \frac{\cos(pm) \times i_x - \sin(pm) \times r_x}{i_y \times r_x - i_x \times r_y} \quad (12)$$

2.2 IMC 구조를 갖는 PID제어기 설계

IMC 제어기는 내부 안정도, 강인 안정도 및 강인 성능을 고려하여, 주파수 영역에서 설계되어지며, Fig. 1과 같이 구성되어있다.



[Fig. 2] Structure of IMC controller

IMC 제어기의 구조는 일반적인 PID 제어기에 내부 모델 $\hat{G}(s)$ 이 첨가된 형태이다. 모델출력 $\hat{Y}(s)$ 는 내부 모델 $\hat{G}(s)$ 과 제어기의 출력 $K_{Out}(s)$ 에 의해서 계산되어 진다. 또한 내부 모델 제어기 $K_{IMC}(s)$ 의 입력은 내부 모델 출력 $\hat{Y}(s)$ 과 실제 출력 $Y(s)$ 의 차인 $H(s)$ 와 설정치인 $R(s)$ 의 차가 사용된다. IMC 제어기의 내부모델은 식 (13)과 같이 구성되어 있다.

$$\hat{G}(s) = G_m(s)G_d(s) \quad (13)$$

여기서, $G_d(s)$ 는 지연시간과 우반면에 존재하는 모든 영점을 포함하며, 정상상태 이득이 1인 비 최소위상 공정이며, $G_m(s)$ 는 최소위상 공정이다. 내부모델 제어기 $K_{IMC}(s)$ 는 식(14)와 같이 구성되어 있다.

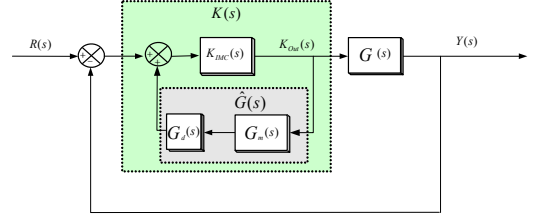
$$K_{IMC}(s) = \frac{F(s)}{G_m(s)} \quad (14)$$

여기서, $F(s)$ 는 전체 폐루프 시스템의 안정성과 강인성을 위해 첨가되는 정상상태 이득이 1인 저역 통과 필터이다.

$$F(s) = \frac{1}{(\tau_f s + 1)^r} \quad (15)$$

여기서, τ_c 는 원하는 폐루프의 시상수이며, r 은 차수이다.

본 논문에서는 1차로 한정하여 제어기를 설계하였다. Fig. 2의 IMC 제어 구조는 일반적인 PID 제어기의 구조와 같게 만들기 위해서 Fig. 3와 같이 등가 모델로 표현 할 수 있다.



[Fig. 3] Equivalent model of IMC controller

Fig. 3에서 $K(s)$ 는 제어기의 전달함수로 식(16)과 같다.

$$K(s) = \frac{K_{IMC}(s)}{1 - K_{IMC}(s)\hat{G}(s)} = \frac{F(s)}{G_m(s) - F(s)G_d(s)} \quad (16)$$

식(16)에서 알 수 있듯이 PID 제어기의 파라미터 값은 동정된 내부 모델 값과 1차 저역 통과 필터의 파라미터 τ_f 의 값으로 구성되어있다. 따라서 IMC 제어구조를 갖는 PID 제어기를 설계하는 것은 내부 모델을 동정하는 것과 필터의 파라미터 τ_f 를 결정하는 것으로 설명할 수 있다.

2.2.1 제어기 파라미터 동조

본 논문에서는 2차의 지연시간을 갖는 내부 모델에 대하여 성능지수 IAE와 ITAE 값이 최소가 되도록 제어기를 설계 하였다. 내부 모델 제어기 $K_{IMC}(s)$ 는 앞 절에서 동정된 내부 모델인 식(17)과 같다.

$$K_{IMC}(s) = \frac{as^2 + bs + c}{\tau_f s + 1} \quad (17)$$

PID제어기의 전달함수는 식(18)과 같이 구할 수 있다.

$$K(s) = \frac{as^2 + bs + c}{(L + \tau_f)s} \quad (18)$$

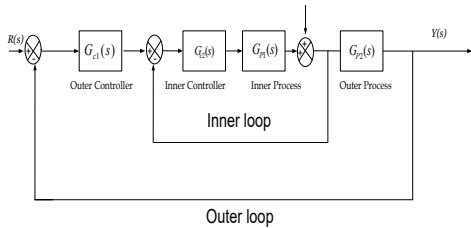
여기서 $G_d(s) = e^{-Ls}$ 는 1차의 테일러 급수를 적용 하였다. PID 제어기의 파라미터 값은 식 (19)과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{bmatrix} K_P \\ K_I \\ K_D \end{bmatrix} = \frac{1}{L + \tau_f} \begin{bmatrix} b \\ c \\ a \end{bmatrix} \quad (19)$$

3. 연구결과

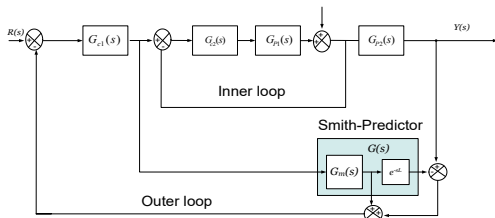
Cascade 제어기는 외부로 부터의 외란 및 센서의 변화 등에 영향에 둔감하게 작동하여 만족할 만한 제어 성능을 얻을 수 있는 건설제어기의 한 가지 종류이다. 기존의 Cascade 제어기구조는 Fig. 4과 같이 구성되어 있다. Cascade 제어기의 구조는 내부 루프와 외부 루프로 이루어져 있고, 공정을 보면 내부 루프 공정과 외부 루프 공정으로 이루어져 있으며, 제어기 또한 내부 루프에 있는 내부 루프 제어기와 외부 루프에 있는 제어기로 구성되어 있다.

Cascade 제어기는 2개로 구성되어 있어 기존의 PID 제어기 설계보다는 복잡하다. 본 논문에서는 Cascade 제어기 설계에 있어 내부 루프에 있는 제어기는 ITAE값이 최소가 되도록 하는 제어기 설계방법을 적용하였고, 외부 루프에 있는 제어기를 설계하기 위해서 내부 공정, 내부 루프의 제어기와 외부 루프의 공정을 결합한 전달함수를 2차의 지연시간을 갖는 모델로 축소하고, 축소 모델로부터 외부 루프의 제어기를 설계할 수 있는 새로운 방법을 제안 하였다.



[Fig. 4] Cascade controller structure

또한 대부분의 공정이 지연시간을 포함하고 있어, 지연시간을 보상해주는 Smith-Predictor 제어기 구조를 Fig. 5와 같이 제안하였다.



[Fig. 5] Proposed Cascade Controller Structure

3.1 내부 루프 제어기 설계

본 논문에서의 내부 루프 제어기는 내부 루프의 공정이 1차의 지연시간을 갖는 공정에 대하여 성능지수 ITAE가 최소가 되도록 제어 파라미터 값을 구하였으며, Table 1과 같다.

<Table 1> PID tuning rule

Process	$k_1 K_c$	T_1/τ_i	τ_d/T_1
$\frac{k_1}{T_1 s + 1} e^{-sL_1}$	$0.586 (\frac{L_1}{T_1})^{-0.92}$	$1.030 - 0.165 (\frac{L_1}{T_1})$	
	$0.965 ((\frac{L_1}{T_1})^{-0.85})$	$0.796 - 0.1465 (\frac{L_1}{T_1})$	$0.308 (\frac{L_1}{T_1})^{-0.929}$

3.2 외부 루프 제어기 설계

외부 루프 제어기는 제어 파라미터뿐만 아니라 Smith-Predictor의 파라미터 값들까지 모두 구해야 한다. 본 논문에서는 외부 루프의 제어기 파라미터와 Smith-Predictor의 파라미터를 구하기 위해서 축소 모델을 사용하였다.

Cascade controller의 구조에서 inner loop 부분을 전개하면 부분은 식(20)과 같다.

$$G_1(s) = \frac{G_{c2}(s)G_{p1}(s)}{1 + G_{c2}(s)G_{p1}(s)} \quad (20)$$

또한 외부 루프 공정은 식 (21)과 같다.

$$G(s) = \frac{G_{c2}(s)G_{p1}(s)G_{p2}(s)}{1 + G_{c2}(s)G_{p1}(s)} \quad (21)$$

식 (21)를 축소 모델 알고리즘을 적용하면 (22)와 같다.

$$\hat{G}(s) = \frac{e^{-sL}}{as^2 + bs + c} \quad (22)$$

3.3 외부 루프 제어기의 PID 파라미터 값.

제안된 Cascade 제어기 구조의 스미스 예측기 부분을 포함한 폐루프 전달함수는 식(23)과 같다.

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G_{cl}(s)G(s)}{1 + G_{cl}(s)G_m(s) + G_{cl}(s)[G(s) - G_m(s)e^{-sL}]} \quad (23)$$

식(23)은 식(24)처럼 근사화 된다.

$$\frac{Y(s)}{R(s)} \approx \frac{G_{cl}(s)\hat{G}(s)}{1 + G_{cl}(s)G_m(s)} \quad (24)$$

식 (24)에서 외부 루프의 제어기 전달 함수는 식 (25)과 같다.

$$G_{cl}(s) = k\left(\frac{as^2 + bs + c}{s}\right) \quad (25)$$

여기서 $k_p = k \times b, k_i = k \times c, k_d = k \times a$ 이며, a, b, c 는 축소 모델의 파라미터이다.

식(25)를 식(24)에 대입하여 정리하면, 특성방식의 시간 지연 항이 제거되어 식(26)과 같다.

$$\frac{Y(s)}{R(s)} \approx \frac{ke^{-sL}}{s+k} \quad (26)$$

식 (26)에서 입력이 단위계단 함수이고 설정치가 y_r 이라 하면, ISE(Integral of the Squared Error), ITAE(Integral of Time multiplied by the Absolute value of Error)에 대한 정의식을 k 에 대해서 편미분하면 Table 2와 같이 구할 수 있다.

<Table 2> Performance tuning method

	ISE	ITAE
k	$\frac{1}{2L}$	$\frac{2}{L}$

4. 결론

본 논문에서는 PID 제어기 설계에 대하여 설명하였고, 지연 시간과 비선형성을 보상주기 위해서 새로운 Cascade 제어기 설계방법을 제안하였다. 성능지수 ISE와 ITAE를 고려한 외부 루프의 제어기 설계는 수식적으로 계산할 수 있음을 확인 하였다.

제안된 Cascade 제어기의 내부 루프에 제어기, 공정과 외부 루프의 공정을 2차의 지연시간을 갖는 모델로 축소할 수 있음을 주파수 응답, 시간 응답 부분에서 기존의 방법보다 우수함을 확인 할 수 있었다.

REFERENCES

- [1] Franklin, G. F., J. D Powell. and A, E, Baeni.(1986), Feedback control of Dynmic Systems,
- [2] Ogata, K, (1990), Moden Control Engineering.
- [3] Åström, K.J. and C.C. Hang and P. Persson,(1991),Towards intelligent PID control, *Automatica*, 28,1-9.
- [4] Åström, K.J. and C.C. Hang,(1988),Automatic Tuning of PID Controller, instrument Society of America.
- [5] M. Zhuang and D. P. Atherton.(1993). Automatic tuning of optimum PID controllers, *Proc. Inst. Elect. Eng.*, 140(3),216-224.
- [6] K. J. Astrom and T. Hagglund. (1984). Automatic tuning of simple regulators with specifications on phase and amplitude margins, *Automatica*, 20(5), 645-651.
- [7] W. K. Ho, C. C. Hang, W. Wojsznis, and Q.H.Tao .(1996). Frequency domain approach to self-tuning PID control, *Contr. Eng*, 4(6), 807-813.
- [8] W. K. Ho, O. P. Gan, E. B. Tay, and E. L. Ang.(1996). Performance and gain and phase margins of well-known PID tuning formulas, *IEEE Trans. Contr. Syst. Technol.* 4, 473-477.
- [9] W. K. Ho, C. C. Hang, and L. S. Cao. (1995). Tuning of PID controllers based on gain and phase margin specifications, *Automatica*, 31(3), 497-502.
- [10] W. K. Ho, T. H. Lee, H. P. Han, and Y. Hong.(2001). Self -Tuning IMC-PID Control with Interval Gain and Phase Margins Assignment, *IEEE Trans. Contro. Syst. Technol*, 9(3), 535-541.

- [11] Y.Shamash. (1975). Model reduction using the Routh stability criterion and the Pade approximation technique, *Int. J. Control*, 21(3), 475-484.
- [12] Q. G. Wang, T. H. Lee, H. W. Fung, Q. Bi and Y. Zhang. (1999). PID tuning for improved performance, *IEEE Trans. Contro. Syst. Technol.*, 7(4), 457-465.
- [13] Qing-Guo Wang, Chang-Chieh Hang, and Qiang Bi. (1999). A Technique for Frequency Response Identification from Relay Feedback, *IEEE Trans. Contro. Syst. Technol.*, 7(1), 122-128.
- [14] Y.Shamash. (1975). Model reduction using the Routh stability criterion and the Pade approximation technique, *Int. J. Control*, 21(3), 475-484.
- [15] Jeoungnae Choi, Joonho Cho, Wonjyok Lee, Hyungsoo Hwang. (2003). Model Reduction Method and Optimized Smith Predictor Controller Design using Reduced Model, *Trans. KIEE*, 52D(11), 619-625.
- [16] A. Karimi, D. Garcia, and R. Longchamp.(2002). PID controller design using Bode's integrals, in *Proc. American Control Conf.*, Anchorage, AK, 2002(5007-5012)
- [17] YangQuan Chen, Kevin L. Moore.(2005). Relay Feedback Tuning of Robust PID Controllers With Iso-Damping Property, *IEEE Transactions on systems, man, and Cybernetics*, 35(1), 23-31

조 준 호(Joon Ho Cho)



- 2002년 2월 : 원광대학교 대학원 제어계측공학과(공학석사)
- 2007년 2월 : 원광대학교 대학원 제어계측공학과(공학박사)
- 2007년 4월 ~ 현재 : 원광대학교 전자융합공학과 부교수

- 관심분야 : 전기전자, 로봇비전, 의료영상처리
- E-Mail : cho1024@wku.ac.kr