ISSN 1975-8359(Print) / ISSN 2287-4364(Online)
The Transactions of the Korean Institute of Electrical Engineers Vol. 67, No. 5, pp. 651~655, 2018
http://doi.org/10.5370/KIEE.2018.67.5.651

시간지연 곱 이차항을 포함하는 LKF에 기초한 시간지연 선형 시스템의 안정성

Stability of time-delayed Linear Systems Based on Augmented LKF Including Time-delay Product Quadratic Terms

김 진 훈*
(Jin-Hoon Kim)

Abstract – In this paper, based on an augmented Lyapunov-Krasovskii functional(LKF) with time-delay product quadratic terms, the stability result in the form of linear matrix inequality(LMI) is proposed. In getting an LMI result, the free matrix based integral inequality is used. Finally, two well-known numerical examples are given to demonstrate the usefulness of the proposed result.

Key Words : Time-delay, Stability, Augmented LKF with delay-product term, Free matrix based integral inequality.

1. 서 론

많은 제어시스템에서 흔히 존재하는 시간지연은 시스템 성능 저하, 진동 뿐 만 아니라, 안정성까지도 보장하지 못하는 경우를 흔하게 접하게 된다. 이런 이유로, 지난 30여 년 동안 시간지연 시스템의 안정도에 관하여 수많은 연구 결과가 발표되었고, 지금도 매우 활발히 연구가 진행되고 있는 분야이다[13]. 다음과 같은 시간지연 선형시스템을 생각하자.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + A_d x(t-d(t)) \\ x(t) = \phi(t), \ \ -h \le t \le 0 \end{cases} \tag{1}$$

여기서 $x \in R^n$는 상태, $A, A_d \in R^{n \times n}$은 상수행렬, ϕ는 연속적으로 미분 가능한 초기조건, 그리고 $d(t)$는 다음을 만족하는 시변 시간지연이다.

$$0 \le d(t) \le h, \ \ \mu_1 \le \dot{d}(t) \le \mu_2, \ \ \forall t \ge 0. \tag{2}$$

특히 조건 (2)와 같은 시변(time-varying) 시간지연을 갖는 선형 시스템 (1)의 안정도 문제의 경우에는 시간 영역에서 다루는 것이 자연스럽고, 또한 시간영역에서는 Lyapunov-Krasovskii 함수(LKF) 접근법이 가장 광범위하게 사용되어지고 있다[1]-[10][13]. 이를 이용하여 시간지연종속 안정도 문제에 관한 결과를 얻는 과정은 2단계로 이루어진다. 첫 단계는 적당한 LKF 후보함수를 선정하는 것이고, 두 번째 단계는 이의 시간미분의 상한을 선형행렬부등식(LMI)[12]으로 표현하는 것이다. 좀 더 나은 결과를 얻기 위하여, 첫 단계에서는 상태에 대하여 좀 더 많은 정보를 도입하려는 노력의 일환으로 (i) 증강상태(상태의 미분, 상태의 적분 등)의 도입[10] (ii) 적분구간의 분할 방법[4]이 제시되었다. 그리고 두 번째 단계로는 많은 적분부등식(Jensen[13], Wirtinger 기반 부등식[5], 자유변수 부등식[7] 등)이 제시되었다.

본 논문에서는 시간지연 (2)를 갖는 시스템 (1)의 안정성을 보장하는 좀 더 나은 결과를 얻기 위하여 시스템 (1)에 주어진 상태 변수 $\{x(t),\ x(t-d(t)),\ \dot{x}(t)\}$ 이외에 증강된 상태 $\left\{x(t-h), \dot{x}(t-d(t)), \dot{x}(t-h), \int_{t-h}^{t-d(t)} x(s)ds, \int_{t-d(t)}^{t} x(s)ds\right\}$를 도입하였고, 또한 시간지연이 곱하여진 형태의 2차함수(quadratic function)도 도입되었다(다음 수식 (10) 참조). 물론 좀 더 많은 증강된 상태를 도입하면(시간지연 분할 또는 상태의 2차적분, 3차적분등) 좀 더 나은 결과를 기대할 수 있겠으나 이는 LMI 변수의 증가를 가져오기에 상태의 적분까지 만을 도입하였다. 또한 2단계를 효과적으로 해결하기 위해서는 다음의 보조정리 2에 주어진 자유가중행렬(free weighting matrix)를 이용한 적분 부등식과 다음 보조정리 1에 주어진 2차함수가 음(negative)이 될 충분조건이 이용되었다.

이 논문에서 사용되는 기호는 일반적인 것이다. $X>0$ (or, $X<0$)은 대칭행렬 X가 양확정행렬(or, 음확정행렬)임을 나타내고, 대칭행렬속의 ★는 대칭항을 나타낸다.

† Corresponding Author: School of Electronics Engineering, Chungbuk National University, Korea.
E-mail: jinhkim@cbnu.ac.kr
Received : March 2, 2018; Accepted : April 23, 2018

2. 예비 결과

다음의 보조정리들은 다음의 주요결과의 증명에 사용될 예비 결과들이다.

보조정리 1[11]. 대칭행렬 $X_0, X_1, X_2 \in R^{n \times n}$에 대하여 $f(\alpha)=\alpha^2 X_2+\alpha X_1+X_0,\ \alpha \in R$ 라 하자. 만약,

$$\begin{cases} \text{(i)} \quad f(r)=r^2 X_2+rX_1+X_0<0 \\ \text{(ii)} \quad f(0)=X_0<0 \\ \text{(iii)} \quad r\dot{f}(0)+2f(0)=rX_1+2X_0<0 \end{cases}$$

이면, $f(\alpha)<0, \forall \alpha \in [0,r]$ 이다.

따름정리 2. 대칭행렬 $X_0, X_{11}, X_{12}, X_{21}, X_{22} \in R^{n \times n}$에 대하여 $g(\alpha)=\alpha^2 X_{21}+(r-\alpha)X_{22}+\alpha X_{11}+(r-\alpha)X_{12}+X_0,\ \alpha \in R$ 라 하자. 만약,

$$\begin{cases} \text{(i)} \quad g(r)=r^2 X_{21}+rX_{11}+X_0<0 \\ \text{(ii)} \quad g(0)=r^2 X_{22}+rX_{12}+X_0<0 \\ \text{(iii)} \quad r\dot{g}(0)+2g(0)=r(X_{11}+X_{12})+2X_0<0 \end{cases} \tag{3}$$

이면, $g(\alpha)<0, \forall \alpha \in [0,r]$이다.

증명: 먼저, $g(\alpha)$를 다시 쓰면 다음이 되고

$$g(\alpha)=\alpha^2(X_{21}+X_{22})+\alpha(X_{11}-2rX_{22}-X_{12})+r^2 X_{22}+rX_{12}+X_0$$

위의 보조정리1를 적용하면 쉽게 얻게 되므로 자세한 것은 생략한다.

보조정리2. 만약 $\begin{bmatrix} Z_1 & Z_2 & N_1 \\ \star & Z_3 & N_2 \\ \star & \star & R \end{bmatrix} \geq 0$ 이면 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned} -\int_a^b \dot{x}^T(s)R\dot{x}(s)ds \leq\ & (b-a)\xi^T\left(Z_1+\frac{1}{3}Z_3\right)\xi \\ & +2\xi^T\left\{N_1[x(b)-x(a)]+N_2\int_a^b\left[x(b)+x(a)-\frac{2}{b-a}\int_a^b x(s)ds\right]\right\} \end{aligned} \tag{4}$$

여기서 ξ는 적당한 차원의 임의의 벡터이다.

증명: $\psi(s)=\frac{1}{b-a}(b+a-2s)$라 하면 $\int_a^b \psi^2(s)ds=\frac{1}{3}(b-a)$, $\int_a^b \dot{x}(s)=x(b)-x(a)$, $\int_a^b \psi(s)\dot{x}(s)=x(b)+x(a)-\frac{2}{b-a}\int_a^b x(s)ds$ 이고, 이를 다음 관계식에 적용하면 쉽게 (4)를 얻는다.

$$\begin{aligned} 0 \leq & \int_a^b \begin{bmatrix} \xi \\ \psi(s)\xi \\ \dot{x}(s) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} Z_1 & Z_2 & N_1 \\ \star & Z_3 & N_2 \\ \star & \star & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \psi(s)\xi \\ \dot{x}(s) \end{bmatrix} ds \\ & =(b-a)\xi^T\left(Z_1+\frac{1}{3}Z_3\right)\xi \\ & \quad +2\xi^T\left\{N_1\int_a^b \dot{x}(s)ds+N_2\int_a^b \psi(s)\dot{x}(s)ds\right\} \\ & \quad +\int_a^b \dot{x}^T(s)R\dot{x}(s)ds. \end{aligned}$$

Remark 1: 특별히 $\xi^T=[x^T(b)\ x^T(a)\ \frac{1}{b-a}\int_a^b x^T(s)ds]$라면 보조정리 2는 Zeng 등[7]의 결과와 같아진다.

3. 주요 결과

다음은 시간지연 (2)를 갖는 선형시스템 (1)의 점근적 안정성을 보장하는 결과를 제시한다.

정리 1: $n \times n$양확정행렬 P, $3n \times 3n$ 양확정행렬 Z_1, Z_2, Q_1, Q_2, Q_3, $n \times n$ 양확정행렬 R_1, R_2, R_3 그리고 $15n \times 15n$ 양확정행렬 $\begin{bmatrix} X_1 & X_2 & M_1 \\ \star & X_3 & M_2 \\ \star & \star & R \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} Y_1 & Y_2 & N_1 \\ \star & Y_3 & N_2 \\ \star & \star & R \end{bmatrix}$가 존재하여 다음 6개의 LMI들을 만족하면

$$\begin{cases} \text{(i)} \quad (h^2\Gamma_{21}+h\Gamma_{11}+\Gamma_0)_{\dot{d}(t)=\mu_1}<0 \\ \text{(ii)} \quad (h^2\Gamma_{21}+h\Gamma_{11}+\Gamma_0)_{\dot{d}(t)=\mu_2}<0 \\ \text{(iii)} \quad (h^2\Gamma_{22}+h\Gamma_{12}+\Gamma_0)_{\dot{d}(t)=\mu_1}<0 \\ \text{(iv)} \quad (h^2\Gamma_{22}+h\Gamma_{12}+\Gamma_0)_{\dot{d}(t)=\mu_2}<0 \\ \text{(v)} \quad (h(\Gamma_{11}+\Gamma_{12})+2\Gamma_0)_{\dot{d}(t)=\mu_1}<0 \\ \text{(vi)} \quad (h(\Gamma_{11}+\Gamma_{12})+2\Gamma_0)_{\dot{d}(t)=\mu_2}<0 \end{cases} \tag{5}$$

시간지연 (2)를 갖는 시스템 (1)은 점근적으로 안정하다. 여기서

$$\begin{aligned} \Gamma_0= & 2\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_0 \\ e_0 \end{bmatrix}^T PE_1[\dot{d}(t)]+\dot{d}(t)\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_0 \end{bmatrix}^T Z_1 \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_0 \end{bmatrix}-\dot{d}(t)\begin{bmatrix} e_2 \\ e_3 \\ e_0 \end{bmatrix}^T Z_2 \begin{bmatrix} e_2 \\ e_3 \\ e_0 \end{bmatrix} \\ & +(1-\dot{d}(t))\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_4 \end{bmatrix}^T (Q_1-Q_2)\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_4 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} e_1 \\ e_3 \\ e_5 \end{bmatrix}^T (Q_1+Q_3)\begin{bmatrix} e_1 \\ e_3 \\ e_5 \end{bmatrix} \\ & +\begin{bmatrix} e_1 \\ e_1 \\ Ae_1+A_d e_2 \end{bmatrix}^T (Q_2+Q_3)\begin{bmatrix} e_1 \\ e_1 \\ Ae_1+A_d e_2 \end{bmatrix} \\ & +2\left\{\begin{bmatrix} e_0 \\ e_0 \\ e_2-e_3 \end{bmatrix}^T Q_1+\begin{bmatrix} e_0 \\ e_0 \\ e_1-e_2 \end{bmatrix}^T Q_2+\begin{bmatrix} he_1 \\ e_0 \\ e_1-e_3 \end{bmatrix}^T Q_3\right\}\cdot\begin{bmatrix} A_c \\ e_0 \\ e_0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+2X_3(e_2-e_3)+2X_5(e_2+e_3-2e_7)+2Y_3(e_1-e_2)\\
&+2Y_5(e_1+e_2-2e_6)+h(Ae_1+A_de_2)^T(R_2+R_3)(Ae_1+A_de_2),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Gamma_{11} =& -2\begin{bmatrix} e_0\\ e_0\\ e_0\\ e_6\\ e_0\end{bmatrix}^T PE_1[\dot{d}(t)]+2\begin{bmatrix} e_1\\ e_2\\ e_0\end{bmatrix}^T Z_1\left\{\dot{d}\begin{bmatrix} e_0\\ e_0\\ e_6\end{bmatrix}+\begin{bmatrix} A_c\\ (1-\dot{d}(t))e_4\\ e_1-(1-\dot{d}(t))e_2\end{bmatrix}\right\}\\
&+2\left\{\begin{bmatrix} e_1\\ e_6\\ e_0\end{bmatrix}^T Q_2+\begin{bmatrix} e_0\\ e_6\\ e_0\end{bmatrix}^T Q_3\right\}\begin{bmatrix} A_c\\ e_0\\ e_0\end{bmatrix}+Y_1+\frac{1}{3}Y_4,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Gamma_{12} =& -2\begin{bmatrix} e_0\\ e_0\\ e_0\\ e_0\\ e_7\end{bmatrix}^T PE_1[\dot{d}(t)]+2\begin{bmatrix} e_2\\ e_3\\ e_0\end{bmatrix}^T Z_2\left\{-\dot{d}\begin{bmatrix} e_0\\ e_0\\ e_7\end{bmatrix}+\begin{bmatrix} (1-\dot{d}(t))e_4\\ e_5\\ (1-\dot{d}(t))e_2-e_3\end{bmatrix}\right\}\\
&+2\left\{\begin{bmatrix} e_1\\ e_7\\ e_0\end{bmatrix}^T Q_1+\begin{bmatrix} e_0\\ e_7\\ e_0\end{bmatrix}^T Q_3\right\}\begin{bmatrix} A_c\\ e_0\\ e_0\end{bmatrix}+X_1+\frac{1}{3}X_4\\
&+(1-\dot{d}(t))e_4^T(R_1-R_2)e_4,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Gamma_{21} &= \begin{bmatrix} e_0\\ e_0\\ e_6\end{bmatrix}^T Z_1\cdot\left\{\dot{d}\begin{bmatrix} e_0\\ e_0\\ e_6\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix} A_c\\ (1-\dot{d}(t))e_4\\ e_1-(1-\dot{d}(t))e_2\end{bmatrix}\right\},\\
\Gamma_{22} &= \begin{bmatrix} e_0\\ e_0\\ e_7\end{bmatrix}^T Z_2\cdot\left\{-\dot{d}\begin{bmatrix} e_0\\ e_0\\ e_7\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix} (1-\dot{d}(t))e_4\\ e_5\\ (1-\dot{d}(t))e_2-e_3\end{bmatrix}\right\},
\end{aligned}
\tag{6}
$$

이고, 또한

$$
E_1[\dot{d}(t)]=\begin{bmatrix} A_c\\ (1-\dot{d}(t))e_4\\ e_5\\ e_1-(1-\dot{d}(t))e_2\\ (1-\dot{d}(t))e_2-e_3\end{bmatrix},\ A_c=Ae_1+A_de_2, \tag{7}
$$

$$
\begin{aligned}
&e_i=\begin{bmatrix}0_{n*(i-1)n} & I_{n\times n} & 0_{n\times(7-i)n}\end{bmatrix},\ i=1,2,\cdots,7,\\
&e_0=0_{n\times 7n}.
\end{aligned}
$$

이다. 끝으로, (6)의 $\Gamma_0,\Gamma_{11},\Gamma_{12},\Gamma_{21},\Gamma_{22}$에 포함되어있는 다음 태의 비대칭행렬 $2F^TG$는 대칭행렬 F^TG+G^TF를 간략히 표현한 것이다.

증명: 본격적인 증명에 앞서, 다음과 같이 정의하며,

$$
\begin{cases}
t_d=t-d(t),\ t_h=t-h,\ h_d(t)=h-d(t),\\
q_1(t)=\dfrac{1}{h_d}\displaystyle\int_{t_h}^{t_d}x(s)ds,\\
q_2(t)=\dfrac{1}{d(t)}\displaystyle\int_{t_d}^{t}x(s)ds,
\end{cases}
\tag{8}
$$

또한 벡터 $\xi_t\in R^{7n}$를 다음으로 정의하자.

$$
\xi_t^T=\begin{bmatrix}x^T(t) & x^T(t_d) & x^T(t_h) & \dot{x}^T(t_d), \dot{x}^T(t_h), q_1^T(t) & q_2^T(t)\end{bmatrix} \tag{9}
$$

이제 본격적으로 증명을 시작한다. 시간지연 시스템 (1)의 안정도를 보이기 위하여 다음과 같은 Lyapunov- Krasovskii 후보함수를 생각하자.

$$
\begin{aligned}
V(x_t)=&\begin{bmatrix} x(t)\\ x(t_d)\\ x(t_h)\\ d(t)q_2\\ h_d(t)q_1\end{bmatrix}^T P\begin{bmatrix} x(t)\\ x(t_d)\\ x(t_h)\\ d(t)q_2\\ h_d(t)q_1\end{bmatrix}+d(t)\begin{bmatrix} x(t)\\ x(t_d)\\ d(t)q_2\end{bmatrix}^T Z_1\begin{bmatrix} x(t)\\ x(t_d)\\ d(t)q_2\end{bmatrix}\\
&+h_d\begin{bmatrix} x(t_d)\\ x(t_h)\\ h_d(t)q_1\end{bmatrix}^T Z_2\begin{bmatrix} x(t_d)\\ x(t_h)\\ h_d(t)q_1\end{bmatrix}+\int_{t_d}^{t}w^T(t,s)Q_1w(t,s)ds\\
&+\int_{t_h}^{t_d}w^T(s)Q_2w(s)ds+\int_{t_h}^{t}w^T(s)Q_3w(s)ds\\
&+\int_{t_h}^{t_d}(h-t+s)\dot{x}^TR_1\dot{x}(s)ds+\int_{t_d}^{t}(h-t+s)\dot{x}^TR_2\dot{x}(s)ds\\
&+\int_{t_h}^{t}(h-t+s)\dot{x}^TR_3\dot{x}(s)ds
\end{aligned}
\tag{10}
$$

여기서 $w^T(s)=\begin{bmatrix}x^T(t) & x^T(s) & \dot{x}^T(s)\end{bmatrix}$이다. 위의 (10)의 두 번째와 세 번째 항에서 보듯이, 시간 지연 $d(t)$와 h_d가 곱하여진 2차(quadratic)함수 형태가 LKF에 포함되어있다. 시스템 (1)의 궤적에 따른 (10)에 정의된 LK후보함수 $V(x_t)$의 시간미분을 구하면 다음을 얻는다.

$$
\begin{aligned}
\dot{V}(x_t)=\xi_t^T\Bigg\{&\begin{bmatrix} e_1\\ e_2\\ e_3\\ d(t)e_6\\ h_de_7\end{bmatrix}^T PE_1[\dot{d}(t)]+\dot{d}(t)\begin{bmatrix} e_1\\ e_2d(t)e_6\end{bmatrix}^T Z_1\begin{bmatrix} e_1\\ e_2\\ d(t)e_6\end{bmatrix}\\
&+2d(t)\begin{bmatrix} e_1\\ e_2\\ d(t)e_6\end{bmatrix}^T Z_1\begin{bmatrix} A_c\\ [1-\dot{d}(t)]e_4\\ e_1-[1-\dot{d}(t)]e_2\end{bmatrix}-\dot{d}(t)\begin{bmatrix} e_2\\ e_3\\ h_d(t)e_7\end{bmatrix}^T Z_2\begin{bmatrix} e_2\\ e_3\\ h_d(t)e_7\end{bmatrix}\\
&+2h_d\begin{bmatrix} e_2\\ e_3\\ h_d(t)e_7\end{bmatrix}^T Z_2\begin{bmatrix} [1-\dot{d}(t)]e_4\\ e_5\\ [1-\dot{d}(t)]e_2-e_3\end{bmatrix}+[1-\dot{d}(t)]\begin{bmatrix} e_1\\ e_2\\ e_4\end{bmatrix}^T Q_1\begin{bmatrix} e_1\\ e_2\\ e_4\end{bmatrix}\\
&-\begin{bmatrix} e_1\\ e_3\\ e_5\end{bmatrix}^T Q_1\begin{bmatrix} e_1\\ e_3\\ e_5\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix} h_d(t)e_1\\ h_d(t)e_7\\ e_2-e_3\end{bmatrix}^T Q_1\begin{bmatrix} A_c\\ e_0\\ e_0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix} e_1\\ e_1\\ A_c\end{bmatrix}^T Q_2\begin{bmatrix} e_1\\ e_1\\ A_c\end{bmatrix}\\
&-[1-\dot{d}(t)]\begin{bmatrix} e_1\\ e_2\\ e_4\end{bmatrix}^T Q_2\begin{bmatrix} e_1\\ e_2\\ e_4\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix} d(t)e_1\\ d(t)e_6\\ e_1-e_2\end{bmatrix}^T Q_2\begin{bmatrix} A_c\\ e_0\\ e_0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix} e_1\\ e_1\\ A_c\end{bmatrix}^T Q_3\begin{bmatrix} e_1\\ e_1\\ A_c\end{bmatrix}\\
&-\begin{bmatrix} e_1\\ e_3\\ e_5\end{bmatrix}^T Q_3\begin{bmatrix} e_1\\ e_3\\ e_5\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix} he_1\\ d(t)e_6+h_d(t)e_7\\ e_1-e_3\end{bmatrix}^T Q_3\begin{bmatrix} A_c\\ e_0\\ e_0\end{bmatrix}\\
&+[1-\dot{d}(t)]h_d(t)e_4^T(R_1-R_2)e_{4+}hA_c^T(R_2+R_3)A_c\Bigg\}\xi_t+v_a(x_t)
\end{aligned}
\tag{11}
$$

여기서, 보조정리 2를 사용하면 다음을 얻는다.

$$v_a(x_t) = -\int_{t_h}^{t_d} \dot{x}^T(s)(R_1+R_3)\dot{x}(s)ds - \int_{t_d}^{t} \dot{x}^T(s)(R_2+R_3)\dot{x}(s)ds$$
$$\le \xi_t^T\left\{d(t)(Y_1+\frac{1}{3}Y_3)+2N_1(e_1-e_2)+2N_2(e_1+e_2-2e_6)\right\}\xi_t$$
$$+\xi_t^T\left\{h_d(t)(X_1+\frac{1}{3}X_3)+2M_1(e_2-e_3)+2M_2(e_2+e_3-2e_7)\right\}\xi_t$$

이를 (11)에 적용하고, (6)에 정의된 행렬들 $\Gamma_0, \Gamma_{11}, \Gamma_{12}, \Gamma_{21}, \Gamma_{22}$을 이용하여 정리하면 다음을 얻고

$$\dot{V}(x_t) \le \xi_t^T\{d^2(t)\Gamma_{21}+h_d^2(t)\Gamma_{22}+d(t)\Gamma_{11}+h_d(t)\Gamma_{12}+\Gamma_0\}\xi_t \quad (12)$$
$$= \xi_t^T\{\Omega[d(t),\dot{d}(t)]\}\xi_t$$

여기서 $\Omega[d(t),\dot{d}(t)]$는 $d(t)$에 대하여는 2차식이고, $\dot{d}(t)$에 대하여는 1차식이다. 따라서, 위의 (5)의 조건으로부터, $\forall \dot{d}(t)\in[\mu_1,\mu_2]$에 대하여, 다음이 성립한다.

(i) 과 (ii) $\Leftrightarrow \Omega[d(t),\dot{d}(t)]_{d(t)=h} < 0,$

(iii) 과 (iv) $\Leftrightarrow \Omega[d(t),\dot{d}(t)]_{d(t)=0} < 0,$

(v) 과 (vi) $\Leftrightarrow \left(\frac{\partial}{\partial d(t)}\Omega[d(t),\dot{d}(t)]+2\Omega[d(t),\dot{d}(t)]\right)_{d(t)=0} < 0.$

이를 따름정리 1를 적용하면 다음이 되고

(i)-(vi) $\Rightarrow \Omega[d(t),\dot{d}(t)] < 0, \ \forall d(t)\in[0,h], \forall \dot{d}(t)\in[\mu_1,\mu_2]$

이는 $\dot{V}(x_t)<0, \ \forall \xi_t \ne 0$임을 의미한다. 이것으로 증명을 마친다. □

4. 수치 예제

제시된 결과의 유용성은 잘 알려진 2개의 수치예제를 통하여 보이도록 하자.

예제 1: 다음과 같은 행렬을 갖는 시간지연 시스템 (1)을 고려하자.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \ A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (13)$$

잘 알려진 바와 같이[12], 이 시스템의 경우에도 시간지연이 상수인 경우(즉 $\dot{d}(t)=0, \forall t$), 시스템의 안정성을 보장하는 최대 시간지연의 크기는 $h^{\text{anlytical}}=\pi$이다. 다음 표 1은 여러 값의 $-\mu_1=\mu_2$에 따른 시스템 행렬 (13)를 갖는 시스템 (1)의 안정도를 만족하는 최대 허용 h를 기존의 결과와 비교 정리한 표이다.

표 1. 예제 1 시스템의 안정도를 보장하는 최대 시간지연
Table 1. Maximal allowable delay for Example 1

$-\mu_1=\mu_2$	0.05	0.1	0.5	Nov
Seuret등[5]	2.5516	2.3693	1.7000	$10n^2+3n$
Kwon등[6]	2.5696	2.4120	1.9602	$27n^2+4n$
Zeng등[7]	2.5721	2.4146	1.9346	$65n^2+11n$
Lee등[9]	2.5753	2.4252	2.0199	$114n^2+18n$
본 논문	**2.5795**	**2.4342**	**2.0573**	$261.5n^2+26.5n$

위의 표 1에서 보듯이 새로이 제시된 정리1의 결과는 기존의 결과보다 우수함을 알 수 있다. 또한 위의 표에서 Nov는 변수의 개수를 말하며, 본 논문에서 이의 크기가 커진 이유는 보조정리 2의 결과를 정리1의 증명에 적용하면서 ξ를 (9)의 ξ_t를 하였기 때문이다. ξ을 ξ_t보다 적은 크기의 벡터로 하면 Nov는 적게 되는데 반하여 최대시간지연은 제시된 결과보다 약간 작아진다.

예제 2: 다음과 같은 행렬을 갖는 시간지연 시스템 (1)을 고려하자.

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -0.9 \end{bmatrix}, \ A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \quad (14)$$

이 시스템의 경우, 잘 알려진 바와 같이[12], 시간지연이 상수인 경우(즉 $\dot{d}(t)=0, \forall t$), 시스템의 안정성을 보장하는 최대 시간지연의 크기는 $h^{\text{anlytical}}=6.1721$이다. 다음 표 2는 여러 값의 $-\mu_1=\mu_2$에 따른 시스템 행렬 (14)를 갖는 시스템 (1)의 안정도를 만족하는 최대 허용 h를 기존의 결과와 비교 정리한 표이다.

표 2. 예제2 시스템의 안정도를 보장하는 최대 시간지연
Table 2. Maximal allowable delay for Example 2

$-\mu_1=\mu_2$	0.1	0.2	0.5	0.8
Seuret등[5]	4.7038	3.8346	2.4208	2.1377
Kwon등[6]	4.8117	4.1019	3.1282	2.6982
Zeng등[7]	4.7883	4.0607	3.0557	2.6150
Lee등[9]	4.8297	4.1398	3.1555	2.7307
Zhang등[10]	4.809	4.091	3.109	2.710
본 논문	**4.8601**	**4.1976**	**3.2440**	**2.8214**

참고로 Nov는 표 1과 동일하기에 생략하였다. 끝으로. 위의 표 2에서 보듯이 새로이 제시된 정리1의 결과는 기존의 결과보다 우수함을 알 수 있다.

5. 결 론

이 논문에서 LKF 후보함수를 선정함에 있어, 현재 뿐만 아니라, 이의 미분과 적분까지로 변수를 증강하였고 또한 시간지

연이 곱하여진 2차(quadratic)함수 항을 도입하였다. 2차적분(quadratic integral)항은 자유행렬기반 적분부등식을 이용하여 LMI형태의 안정성 결과를 얻었다. 끝으로 제시된 결과는 두 개의 대표적 예제를 통하여 이의 유용성을 보였다.

References

[1] M. Wu, Y. He, J.-H. She and H.-P. Liu, "Delay- dependent criteria for robust stability of time-varying delay system", *Automatica,* vol. 40, no. 8, pp. 1435- 1439, 2004.

[2] J.-H. Kim, "Note on stability of linear systems with time-varying delay", *Automatica,* vol. 47, pp. 2118-2121, 2011.

[3] P. Park, J.W. Ko and C. Jeong, Reciprocally convex approach to stability of systems with time-varying delays, *Automatica,* vol. 47, pp. 235-238, 2011.

[4] H. Zhang and Z. Liu, Stability analysis for linear delayed systems via an optimally dividing delay interval approach, *Automatica*, vol47, pp2126-2129, 2011.

[5] A. Seuret and F. Gouaisbaut, "Wirtinger-based integral inequality: Application to time-delayed systems", *Automatica,* vol. 49, pp. 2860-2866, 2013.

[6] O.M. Kwon, M.J. Park, J.H. Park, S.M. Lee and E.J. Cha, "Improved results on stability of linear systems with time-varying delays via Wirtinger-based integral inequality, *J. of the Franklin Institute,* vol. 351, pp. 5382-5398, 2014.

[7] H.-B. Zeng, Y. He, M. Wu, and J. She, Free matrix based integral inequality for stability analysis of systems with time-varying delay, *IEEE Trans. on Automatic Control,* vol. 60, pp2768-2772, 2015.

[8] J.-H. Kim, "Further improvement of Jensen inequality and application to stability of time-delayed systems, *Automatica,* vol. 64, pp. 121-125, 2016.

[9] T. H. Lee, and J. H. Park, A novel Lyapunov functional for stability of time-varying delay systems via matrix-refined-function, *Automatica,* vol. 80, pp239-242, 2017.

[10] C.-K. Zhang, Y. He, L. Jiang, and M. Wu, Notes on stability of time-delay systems: bounding inequalities and augmented Lyapunov-Krasovskii functionals, *IEEE, Trans. Automatic Control,* vol. 62, pp5331-5336, 2017.

[11] J.-H. Kim, Stability of time-delayed linear systems using an improved integral inequality, Trans. of KIEE, vol,66, no.5, pp. 806-811, 2017.

[12] S. Boyd, L. E. Ghaoui, E. Feron and V. Balakrishhnan, *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory,* Studies in Applied mathematics, 1994.

[13] K. Gu, V.L. Kharitonov and J. Chen, *Stability of time-delay systems*, Birkhausser, 2003.

저 자 소 개

김 진 훈 (Jin-Hoon Kim)

1961년10월18일생. 1985년 서울대 전기공학과 졸업. 1985년~1986년 신영전기(주) 연구원. 1989년 한국과학기술원 전기 및 전자공학과졸업(석사). 1993년 동 전기 및 전자공학과졸업(공박). 1993년~1994년 경상대 제어계측공학과 전임강사. 1998년 미국 UCI 방문교수. 2008년 미국 UTA 방문교수. 1995년~현재 충북대학교 전자정보대학 전자공학부 교수; 컴퓨터정보통신 연구소 연구원.

Tel: 043-261-2387, Fax: 043-268-2386.

E-mail: jinhkim@cbnu.ac.kr