한국학교수학회논문집 제 21 권, 제 4 호
Journal of the Korean School Mathematics Society
Volume 21, Number 4, 401-418, December 2018
http://doi.org/10.30807/ksms.2018.21.4.005

유추와 분석적 방법을 활용한 타원 초점 작도

김근배[1] · 최옥환[2] · 박달원[3]

현행 기하와 벡터 교과서에는 타원 방정식을 통해 초점, 꼭짓점 등을 구하는 기계적 활동이 주가 되어 있어 본 논문에서는 좌표평면과 식 없이 주어진 타원 그래프로부터 초점 작도를 하는 가역적 활동에서 유추와 분석적 방법이 활용되는 과정을 연구하였다.

탐구 도구는 Geogebra를 활용하였으며 처음 학생들은 주어진 타원에서 장축, 단축을 임의로 작도하여 타원의 초점을 찾으려는 오류를 범하였다. 하지만 원의 대칭축을 작도하는 방법을 경험하고 이 원리를 분석하여 타원에 유추한 결과 타원의 중심과 장축, 단축을 작도할 수 있었다. 이후 초점 작도 과정에서 분석적 방법을 활용하여 초점 식을 피타고라스 정리로 인식하여 원의 작도 활용해 타원의 초점 작도를 하였다. 따라서 타원 초점 작도에서 유추와 분석적 방법이 긍정적으로 작용할 수 있음을 확인하였다.

주요용어 : 타원, 유추, 분석적 방법

Ⅰ. 서론

1. 연구의 필요성 및 목적

오랜 역사의 흐름과 함께 수많은 수학 이론이 정립되고 있으며 그 과정에서 수학적인 호기심과 성찰이 계속적으로 이루어지고 있다.

학교에서 이루어지는 수학은 수세기동안 밝혀진 수학 이론을 학생들의 인지수준에 맞게 재구조화되어 교과서에 서술되어 있다. 하지만 대학입시위주의 학습 및 학습부담의 완화 측면에서 역사적으로 의미 있는 수학 발견과정과 탐구과정이 생략된 채 학생들이 수학을 단순 계산 및 문제풀이용으로 인식하고 있어 수학적 고찰과 수학적 탐구심을 함양하는데 제약이 있다.

학교에서 수학지도는 학생들로부터 정답만을 얻는 것이 아니라 학생들이 어떤 생각을 가지고 현상을 바라보며 어떻게 사고하는지를 파악하여 학생들 마음속에 수학적인 사고를 형성하게 함과 동시에 그 사고를 발전시켜나갈 수 있도록 이루어져야 한다. 또한 학생들이 수학적 사고를 할 수 있게끔 적절한 상황 및 자극을 제시해주어 기존의 경험 위에 새로운 경험을 하게 함으로써 의미를 창출해 나가도록 지도해야 한다.

교육과학기술부(2012)에 따르면 수학에 대한 자신감, 관심, 흥미를 갖도록 학습 동기를 유발하여야 하며 교육기자재를 사용할 때에는 구체적인 조작 및 탐구 활동을 통해 수학의 개념, 원리를 이해하고 수학 주제에 대한 모둠 토론을 하도록 강조하고 있다.

하지만 현재 우리나라 고등학교에서 이루어지는 수학 수업은 학습 동기와 의욕을 갖고 수학을 탐구

* MSC2010분류 : 97G50, 97Q30
1) 대전용산고등학교 (countblow@naver.com)
2) 충북여자고등학교 (choiok1833@hanmail.net)
3) 공주대학교 (dwpark@kongju.ac.kr), 교신저자

하고 사고하는 시간보다는 암기를 통한 반복적인 문제풀이를 통해 정답인지 아닌지를 확인하는 반복문제풀이학습에 훨씬 더 많은 시간을 할애한다. 이런 문제풀이 위주의 교육은 학생이 스스로 생각하고 수학적 의미를 음미하여 발산적인 사고를 하는 것을 벗어나기 때문에 수학적 개념을 깊이 이해하고 문제 해결을 하는 수학의 학습 목적달성을 어렵게 한다.

본 연구에서는 이차곡선 중 타원에 대해 다루게 되는데 교육과정에 의거한 교과서에 제시된 이차곡선의 정의는 <표 I-1>과 같다(김원경 2016).

<표 I-1> 교과서에 제시된 이차곡선의 정의

이차곡선	정의
포물선	평면 위의 한 점 F와 F를 지나지 않는 직선 l에 대해 점 F와 직선 l로부터 거리가 같은 점의 집합
타원	평면 위의 서로 다른 두 점 F, F'으로부터의 거리의 합이 일정한 점의 집합
쌍곡선	평면 위의 서로 다른 두 점 F, F'으로부터의 거리의 차가 일정한 점의 집합

기하와 벡터 이차곡선 단원을 학습한 고등학교 3학년 자연계열 학생들에게 타원의 그래프를 다룰 때 사고의 수단이 되는 초점을 가역적 사고를 통해 사고의 대상으로 살펴보고자 하였다. 좌표평면이나 식 없이 타원 그래프만 제시되었을 때, 초점을 어떻게 작도하는지 분석하고자 하였다.

따라서 아래와 같은 연구문제를 설정하였다.

연구문제 1. 원의 대칭축 작도에서 타원의 중심 작도로의 유추적 과정은 무엇인가?

연구문제 2. 타원의 중심으로부터 타원의 장축, 단축을 작도할 수 있는가?

연구문제 3. 타원의 장축, 단축에서 초점 작도 과정에 활용되는 분석적 방법은 무엇인가?

Ⅱ. 이론적 배경

1. 이차곡선의 작도

역사적으로 이차곡선에 대한 연구는 주어진 대수 방정식으로 그래프를 그리는 과정보다는 기하학적 도형으로서 곡선을 작도하고 이를 대수 방정식으로 표현하는 과정으로 발달해 왔다. 현 교육과정의 이차곡선 학습활동은 곡선의 기하학적 작도보다는 대수방정식에 의한 이차곡선의 개형을 그려보는 활동에 한정되어 있다(장미라, 2010). 하지만 이차곡선의 기하작도를 강조한다해도 이차곡선을 단순히 그리는 방법적인 측면에만 중점을 맞추고 그 작도 결과가 타원, 포물선, 쌍곡선 모양이라는 사실만 강조하는 경우가 대부분이다. 이차곡선의 학습에서 직접적이고 다양한 작도 경험의 부재가 이차곡선 학습 오개념의 주된 원인이고 이차곡선에 대한 교수학습은 기하적인 관점으로 접근 한 후 대수적인 관점으로 연결시켜야 할 필요성과 오개념에 대한 정확한 진단은 효과적인 교수학습의 기초가 된다(홍성관, 박철호, 2010). 이는 대수적 표현이 중요한 교수학습 상황에서 기하적인 관점으로의 접근의 중요성을 언급하고 있으며 추가로 이차곡선에 대한 오개념 분석의 필요성을 언급하고 있다. 이차곡선을 작도하는 탐구활동을 하며 이차곡선의 본질적인 성질을 들여다보고 찾아낼 수 있도록 해야 할 것이다.

이차곡선에 관련된 단원은 대수적 접근 방식과 기하적 접근 방식이 동시에 병렬적으로 지도되어야 하며 대수적 조작력이 미흡한 하위권 학생들에게는 이차곡선에 대한 성질을 역동적으로 표현하는 기

하적 접근 방식이 중요하다(양성현, 2011). 또한 Geogebra를 활용한 시각적 접근은 학생들로 하여금 수학 내·외적 연결성을 증진시키며 Geogebra를 활용하여 시뮬레이션 함으로써 학생들에게 수학의 실용성을 증대시켜 수학 외적 연결성을 깨닫게 할 수 있다. 또한 대수적으로 국한되어 있는 지도의 영역에 기하적인 요소를 가미함으로써 수학 내적 연결성을 증대시켜 학생들의 다면적 이해를 촉진함과 더불어 학생 스스로 연결적 사고를 할 수 있게 도와준다.

위 연구들은 이차곡선에 대한 기하적 접근 방식 및 작도의 중요성과 대수적 접근 방식과의 병렬적 지도를 강조하고 있다. 하지만 가역적 관점으로 이차곡선을 접근하여 초점을 거꾸로 작도해 나가는 연구는 나타나 있지 않다.

따라서 본 연구에서는 타원의 기하학적 접근으로 시작해 나타나는 오개념이나 어려움을 분석하고 이후 초점 작도 시에 대수적인 방법을 활용해 완성하고 다시 기하학적으로 확인하는 과정으로 연구를 진행하였다.

2. 유추

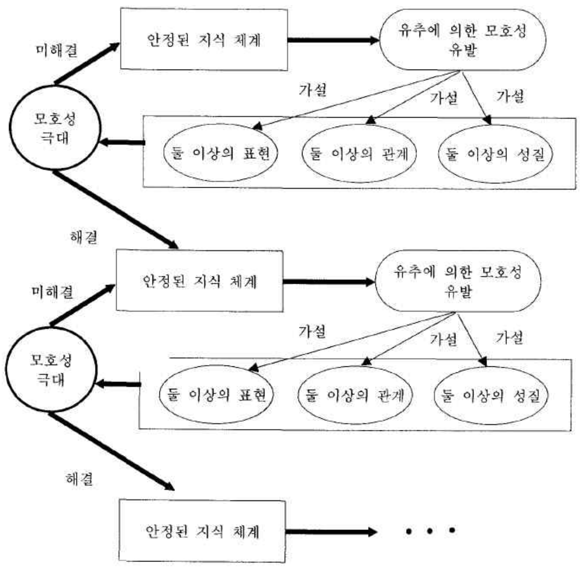
기본적으로 수학교육학에서의 유추에 관한 연구는 1980년대 이후 인지심리학에서 진행된 문제 해결에 관한 유추 연구의 연장선상에 있다(English, 2004). 유추적인 사고 방법은 유추를 구사하는 사고 방법으로 어떤 사상 A에 대해 그것의 성질 또는 법칙 P를 알고 싶으나 모른다고 할 때, 이미 알고 있는 사상 중에서 그 사상과 닮은 사상 A′을 생각해 내어, A′에서 성립하는 성질 또는 규칙 P′과 유사한 P가 원래의 사상 A에서 성립하지 않는지 알아보려는 사고 방법이다. 여기서 유추는 유비추리(類比推理)로 어떤 특수한 경우에서 다른 어떤 특수한 경우에 이르는 추리를 의미한다. 그런데 언제나 바른 것만을 유추한다고 볼 수는 없으므로 유추하고 나서 반드시 그것을 확인하지 않으면 안 되지만, 학생들의 능력을 고려하여 유추한 것을 그대로 인정하여 이용하기도 한다(편동중남, 1999).

유추는 수학교육에서 광범위하게 사용될 수 있는데, 수학적 법칙을 발견하기 위해서는 관찰된 사례의 공통적인 성질에 주목하여 일반적인 법칙을 추측하는 귀납 추론이 필요하며, 유추는 귀납 추론을 위한 중요한 도구가 되지만 유추가 학생들의 수학 학습에서 중요한 사고 과정임에도 불구하고 학교수학에서 충분히 다루어지지 않고 있다(Polya, 1986, 2003; 우정호, 2004; 반은섭; 2012).

유추는 학생들의 문제해결력, 귀납적 추론, 수학적 발견술, 창의성 신장에 도움을 줄 수 있는 수학교육의 유용한 사고 방법으로 허남구(2017)는 학생들은 서로 다른 수학적 대상에 대해 유사성을 바탕으로 연결함으로써 두 대상 사이의 관계를 인식할 수 있다고 보고 이차곡선의 작도 활동에서 나타나는 유추적 사고를 연구하였으며 유추적 사고는 학생들의 작도 문제 해결과 더불어 새로운 풀이 방법을 발견하는데 도움을 주었다.

구조화된 문제제기 상황에서도 사용할 수 있는 다양한 전략 중 하나로 유추를 들 수 있는데 유추를 활용한 문제제기 활동은 학생들의 수학 개념에 대한 이해를 기술해주는 유용한 교수학적 도구로 사용될 수 있으며(Hashimoto, 1987) 주어진 문제와 유사한 새로운 문제를 만드는 과제를 통해 구체화 될 수 있다(Polya, 1962, Kilpatrick, 1987).

학교수학을 지도하는 과정에서도 모호성을 유발하고 도전하여 안정을 꾀하는 경함을 제공하는 것이 필요하며 학생들의 탐구와 적극적인 참여를 권장한다면 모호성을 유발하여 이를 극복하는 것은 유익한 과정으로 볼 수 있다(이경화, 2009). 요컨대 수학자들은 유추적 사고에 의해 기존 체계에 모호성을 발생시키며, 이 때문에 불안정해진 체계는 서로 다른 맥락을 하나로 통합하거나 유추적 사고에 의한 불일치를 인식하고 정돈함으로써 안정된 새로운 체계로 발전하게 된다.



[그림 Ⅱ-1] 수학적 지식의 구성 과정에서 유추의 역할(이경화, 2009)

서로 다른 두 대상의 유사성을 찾아내고 그것을 설명하기 위해 노력하는 과정은 유추적 사고에 필수적인 요소이며 유추적 사고에 수학적 발견을 학생들의 수준을 반영하여 구체화하고 교수·학습 방법으로 활용할 필요가 있다.

3. 분석적 방법

분석법은 역행적 추론이라고도 불리는 데, 찾고자 하는 것을 이미 찾은 것처럼, 증명해야 할 것을 참인 것처럼 가정하고, 바라는 결과가 이루어지기 위해 어떤 조건이 있어야 하는지를 묻고 이러한 과정을 계속 반복하여 이미 알려져 있거나 참인 것으로 가정한 것에 도달하는 방법이다. 이와 반대의 과정으로 이미 알려져 있거나 참인 것으로 가정한 명제에서 출발하여 논리적으로 자연스러운 과정을 따라 마지막에 찾고자 하는 것이나 증명해야 할 명제에 이르는 과정을 종합이라 하며 종합은 가정으로부터 결론을 논리적으로 유도하는 연역적인 증명이라 할 수 있다(김현라, 2014).

분석적 활동은 작도 문제해결 과정 자체에서도 매우 중요하게 작용하는데 의도적으로 분석적 활동의 중요성을 강조하지 않더라도 학습자들이 작도 문제를 풀어가면서 자연스럽게 이러한 활동을 적극적으로 수행할 수 있는 기회를 제공한다. 뿐만 아니라 체계화된 작도 문제는 학습자들의 자기주도적인 학습을 가능하게 함으로써 학습자 개별적으로 문제해결 과정에 접근할 수 있으며 이를 통해 작도 문제해결과 관련된 인지적 활동, 즉 분석적 활동을 활성화시키는데 커다란 역할을 하게 된다(한인기, 2000).

강윤수, 서은정(2009)은 삼각형의 외접원(내접원)에서 '두 변의 수직이등분선(각의 이등분선)의 교점에서 세 꼭짓점(변)에 이르는 거리가 같은 이유'를 묻는 연구에서 분석적 방법이 유의미하게 작용하였다고 하였으며 류희찬, 제수연(2009)은 GSP를 이용하여 이차곡선의 정의를 바탕으로 학생들이 스스로 알고 있던 여러 기하와 관련된 성질로부터 이차곡선을 작도하는 방법을 발견하고, 그 작도방법의 타당성을 입증해봄으로써 이차곡선의 개념을 명확히 하는 것을 목적으로 하였다. 학생들이 주어진 점과 선분의 길이만으로 작도의 과정을 스스로 찾아내는 것은 쉽지 않지만, 작도되었다고 가정한 점을 그려보고 관찰해봄으로써 주어진 조건과의 관계를 쉽게 파악할 수 있었다고 한다. 그리고 GSP를 이용한 역동적 기하환경에서는 쉽게 정확한 작도 활동을 가능하게 하여, 작도하는 활동에만 치중하기 쉬운 작도학습에서 작도의 과정을 발견 활동을 중시하는 작도학습을 가능하게 하여 수학적 발견을 좀 더 구체적으로 관찰하고 정당화할 수 있었다고 하였다(이춘호, 2018; 재인용).

이상 선행연구를 통해 분석적 방법을 활용한 교육이 학생들의 수학적 사고를 구성하는 중요한 요인으로 작용함을 알 수 있다. 또한 Geogebra와 같은 역동적 기하환경에서의 작도 문제는 학생 스스로 다양한 접근을 가능하게 하여 새로운 수학적 발견을 이끌어 낼 수 있다.

Ⅲ. 연구 방법

1. 연구대상

일반계고인 대전 Y고등학교 3학년 자연계열 학생 중 희망자 5명을 아래와 같은 기준으로 선발하였다.

첫째, 좌표평면이나 식 없이 그래프만 주어진 타원에서 초점을 작도하기 위해서는 타원의 정의를 알고 있는 동시에 표현할 수 있어야한다.

둘째, 좌표평면이나 식 없이 그래프만 주어진 타원에서 초점을 기하학적으로 정확히 작도 할 수 있는 학생은 연구에 참여하는 의미가 없으므로 배제시키고자 하였다.

2. 연구도구

<표 Ⅲ-1> 사전검사 문항구성

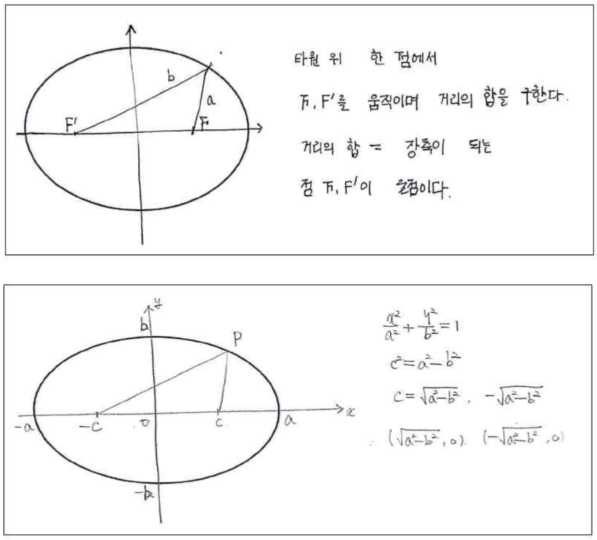
분류	문항번호	문항
정의	1-(1)	타원의 정의를 서술하시오.
	1-(2)	타원의 정의를 그림으로 나타내시오.
작도	2	타원의 그래프에서 초점을 작도하여 찾아내고 그 이유를 기하학적으로 밝히시오.

타원 초점 작도의 도전자는 처음 8명이었으며 사전검사를 20분 실시한 결과 1-(1), 1-(2) 문항을 정확히 맞히고 2번 문항을 맞히지 못한 학생이 5명으로 나타났다.

<표 Ⅲ-2> 사전검사 응답결과

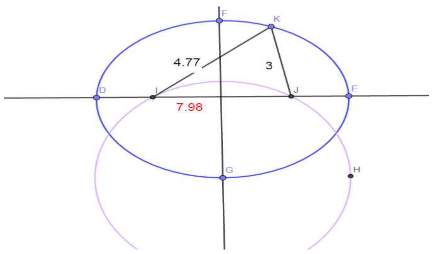
문항	1-(1) 정답제시	1-(2) 정답제시	1-(1), 1-(2) 모두 정답제시	2 정답제시
정답 인원(명)	5	7	5	0

사전검사 결과 초점 작도를 시도한 학생 모두 타원에서 장축, 단축을 임의로 표시하여 x축, y축을 그려 넣고 그 위에 초점이 존재한다고 추측하는 오류를 범하였다. 아래 그림은 처음 주어진 타원에서 장축, 단축을 임의로 설정한 학생들의 답변 중 일부이다.



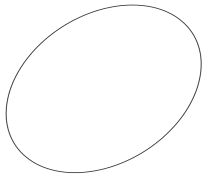
[그림 Ⅲ-1] 타원의 장축, 단축을 임의로 설정한 학생의 응답결과

실제로 [그림 Ⅲ-1]의 첫 번째 예를 제시한 학생이 Geogebra로 이를 구현하였을 때는 타원 위의 점에서 초점까지 거리의 합이 장축의 길이와 일치하지 않는 오류를 범하였다.



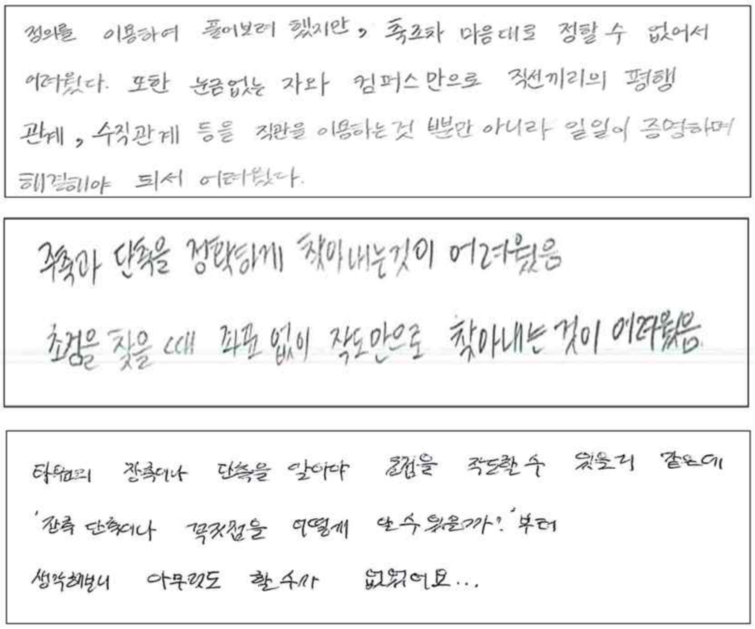
[그림 Ⅲ-2] 타원의 장축, 단축을 임의로 설정한 학생의 정당화 과정에서의 오류

또한 [그림 Ⅲ-3]처럼 축이 항상 x축이나 y축과 평행하지 않는 회전이동 된 타원이 제시되었을 때는 장축, 단축을 임의로 그어서는 초점을 찾을 수 없다는 확신을 학생들이 갖게 되었다.



[그림 Ⅲ-3] 타원의 장축, 단축이 x축이나 y축과 평행하지 않는 대표적인 예

이후 정확한 방법으로 타원의 장축, 단축을 작도해야한다는 필요성이 학생들로부터 자연스럽게 제기되었고 초점을 작도하기 전에 기하학적 방법으로 타원의 장축, 단축의 정확한 작도를 시도하였다. 하지만 학생들은 기하학적으로 장축, 단축을 정확히 찾는 방법이 매우 어려워서 그 뒤의 단계를 포기할 수밖에 없다고 서술하였음을 확인하였다.


정의를 이용하여 풀어보려 했지만, 축으로 마음대로 정할 수 없어서 어려웠다. 또한 눈금없는 자와 컴퍼스 만으로 직선끼리의 평행 관계, 수직관계 등을 직관을 이용하는 것 뿐만 아니라 일일이 증명하며 해결해야 되서 어려웠다.

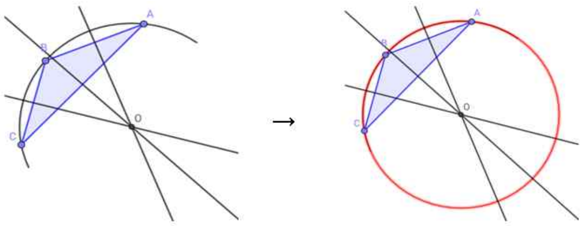
장축과 단축을 정확하게 찾아내는것이 어려웠음
초점을 찾을 때 좌표 없이 작도만으로 찾아내는 것이 어려웠음

타원의 장축이나 단축을 알아야 초점을 작도할 수 있을거 같은데 '장축 단축이나 꼭짓점을 어떻게 알 수 있을까?' 부터 생각해보니 아무것도 할 수가 없었어요...

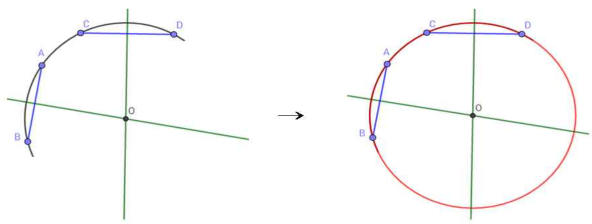
[그림 Ⅲ-4] 이차곡선의 정당화가 불가능하게 된 이유 및 느낀 점

따라서 타원의 장축, 단축 작도에 앞서 원의 대칭축을 작도하는 경험을 하게 하였다.

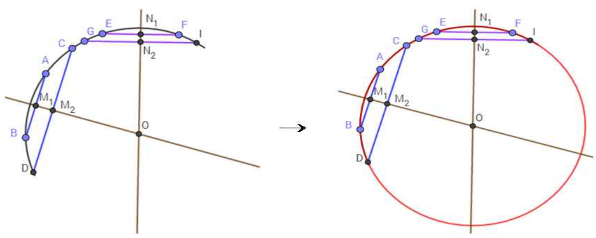
한편 타원의 장축, 단축 작도를 위해서는 타원의 중심 작도가 필요한데 이를 위해 원에서 대칭축과 원의 중심을 찾는 방법을 활용할 수 있다.



[그림 Ⅲ-5] 삼각형의 외심을 통한 원의 중심 찾기



[그림 Ⅲ-6] 현의 수직이등분선의 교점을 통한 원의 중심 찾기



[그림 Ⅲ-7] 두 평행선의 중점을 이은 직선의 교점을 통한 원의 중심 찾기

[그림 Ⅲ-5]는 주어진 삼각형에서 외심작도 방법으로 원의 중심을 찾는 방법, [그림 Ⅲ-6]은 대칭축의 성질을 활용하여 현의 수직이등분선으로 원의 중심을 찾는 방법이다.

3가지 방법 중에서 본 연구 취지에 맞게 적용될 수 있는 방법은 원 뿐만 아니라 타원이나 이차곡선의 대칭축을 찾는 방법에도 응용이 가능한 [그림 Ⅲ-7]의 방법뿐이다. 그 이유는 [그림 Ⅲ-5]은 한 평면 위의 서로 다른 세 점을 포함하는 원은 유일하지만 타원은 최소한 한 평면 위의 서로 다른 네 점이 주어져야한다. [그림 Ⅲ-6]은 임의의 현의 수직이등분선이 원의 대칭축이 되지만 타원에서는 장축과 단축을 포함한 직선만 대칭축이 되기 때문이다.

3. 연구절차

본 연구에 참여한 학생(Students) 5명에 대하여 S1, S2, …, S5로 번호를 부여하였으며 다음의 과정으로 연구를 진행하였다.

<표 Ⅲ-3> 연구절차

절차
0) Geogebra 설치, 사용법 및 작도 방법 이해(1.5차시)
1) 주어진 원의 대칭축 작도 (0.5차시)
↓ [유추]
2) 타원의 중심 및 장축, 단축 작도 (1차시)
3) 타원의 초점 작도 (0.5차시)
4) 완성된 타원에서 초점 탐구 (0.5차시)
↓ [분석적 방법]
5) 주어진 타원에서 초점 작도 (1차시)
6) 느낀 점 발표 (0.5차시)

0) 단계는 준비단계로 컴퓨터실에 Geogebra의 설치 및 메뉴에 보이는 기하 툴(tools)을 활용해봄으로써 Geogebra에서 사용할 수 있는 작도 도구를 익히고 스스로 활용해볼 수 있게끔 하였다. 또한 작도[4]를 Geogebra로 어떻게 할 수 있는지 학습을 하였으며 전체적인 과정을 작도의 방법으로 해나가도록 안내하였다. Geogebra의 사용법 교육을 1차시로 설정하였으나 Geogebra 설치 및 활용에 매우 어려움을 느끼는 학생들이 있어 0.5차시를 더 추가한 1.5차시로 수업을 연장하였다.

1) 단계는 주어진 원의 대칭축을 작도하고 원리를 탐색하고 이를 2) 단계에 유추하여 타원의 중심 및 장축과 단축을 찾아가게 하였다.

3) 단계는 앞 단계에서 찾은 장축과 단축으로부터 초점을 작도하였다.

4) 단계는 앞 단계에서 초점 작도에 실패한 학생들이 초점이 주어진 완성된 타원에서 초점의 기하학적 위치를 탐구한다.

5) 단계는 앞 단계에서 초점을 분석한 내용을 바탕으로 2) 단계까지 완료한 타원에서 초점을 작도하게 하였으며 6) 단계로 느낀 점을 토론하게 하였다.

Ⅳ. 연구 결과

1. 타원의 중심 작도

사전검사에서 5명 학생들 모두 타원의 장축, 단축을 임의로 작도하였기 때문에 타원의 중심 및 초

4) 눈금이 없는 자와 컴퍼스만을 사용하여 도형을 그리는 것.

점 작도를 실패하였다. 이 후 연구절차 1) 단계에서 원의 대칭축 작도를 시켜보니 5명 모두 현의 이등분선으로 원의 대칭축 작도에 성공하였다.

<표 Ⅳ-1> 원의 대칭축 작도 방법 설명

이유	학생번호
현의 수직이등분선 위에 원의 중심이 있어서	S2
삼각형을 작도하면 서로 합동인 직각이등변삼각형이 나와서	S1, S3, S5
단순 암기	S4

여기서 '삼각형을 작도하면 서로 합동인 직각이등변삼각형이 나온다.' 는 답변을 한 학생 S1, S3, S5와의 면담결과를 정리하면 아래와 같다.

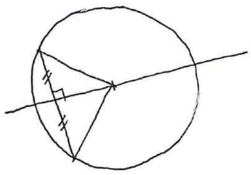
연구자 : 주어진 원에서 대칭축을 어떻게 작도했니?

S3 : 현의 수직이등분선이 원의 대칭축이 되요.

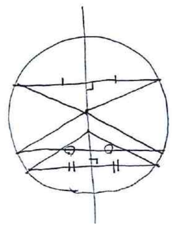
연구자 : 왜 현의 수직이등분선이 원의 대칭축이 된다고 생각했니?

S1, S5 : 원의 중심과 현의 양 끝점을 세 점으로 하는 삼각형을 만들어보면 합동인 직각이등변삼각형이 나와요.

S3 : 직각이등변삼각형이 되었다고 해서 원이 대칭이 된다기보다 현의 수직이등분선위의 임의의 점과 그 점에서 수직인 선을 그어서 원과 만나는 두 점 및 현의 수직이등분선의 또 다른 점으로 만든 삼각형이 항상 직각이등변삼각형이 되어서 현의 길이가 이등분돼요. 그래서 현의 수직이등분선이 원의 대칭축이 된다고 할 수 있어요.



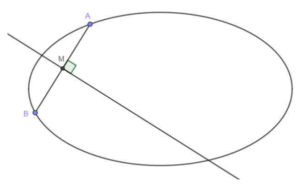
[그림 Ⅳ-1] S1, S5 학생의 설명



[그림 Ⅳ-2] S3 학생의 설명

면담결과 S1, S5 학생은 하나의 현에 대해 삼각형을 만들어 직각이등변삼각형이라 원의 대칭축이 된다고 했지만 S3 학생은 여러 개의 현에 대해서도 직각이등변삼각형이 나오기 때문에 원의 대칭축이 된다고 정확히 설명하였다.

이제 이 작도 방법을 타원에 유추하여 타원의 장축, 단축 작도를 하게 하였다. 1차 시도결과 모든 학생이 원에서 시도한 현의 수직이등분선 방법을 그대로 타원에 적용하여 [그림 Ⅳ-3]과 같은 오류를 범하였다.



[그림 Ⅳ-3] 현의 수직이등분선을 타원에 유추하여 나타난 오류화면

이는 유추과정에서 발생할 수 있는 자연스러운 오류라고 볼 수 있으며 학생들은 원에서 적용되었던 방법이 타원에서도 성립한다면 주어진 문제를 해결할 수 있었을 것이라 생각하였다. 이는 기존의 성질을 그대로 유지하려는 가설적인 사고가 유추 과정에 내재된 것이라고 볼 수 있다.

학생들이 타원의 대칭축이 되지 않은 이유에 대해서 고민하게 한 뒤 발표 기회를 주었다.

연구자 : 원의 대칭축 방법이 왜 타원에서는 적용되지 않았을까?
S5 : 원에서는 수직이등분선을 그으면 원의 중심을 지났는데 타원에서는 안 지나요.
S2 : 대칭이 되려면 타원의 중심을 지나야 되는데 방법을 찾고 있어요.
S4 : 타원의 대칭축이 되려면 원에서와 마찬가지로 현이 이등분되어야 되는데 타원에서는 그렇지 않아요.
연구자 : 그러면 타원에서 대칭축이 되려면 어떤 조건이 충족되어야 될까?
S3 : 타원의 중심을 지나가야 되요. 타원의 중심도 지나야하고 점도 대칭 되어야해요.
연구자 : 원에서 타원으로 유추한 과정에서 오류가 발생한 이유는 무엇일까?
S1, S5 : 수직이등분선이니 수직이나 이등분(중점)일텐데... 수직이나 이등분 조건 중에서 하나를 버려야 될 수도 있겠네요.
S3 : 원에서 현 2개를 평행하게 그어서 중점끼리 연결하면 원의 중심을 지나요.
S2 : 맞아요. 대칭축이니 점이 계속 대칭이 돼서 현을 평행하게 그으면 돼요.
S4 : 원에서는 수직이등분선이라 현 1개에 대해서 대칭축을 작도할 수 있었는데 수직 조건을 빼면 이등분 조건만 남아서 직선을 작도할 때는 평행한 현 2개가 필요해요.
S3 : 원에서 수직이등분선(대칭축) 2개의 교점으로 중심을 찾아낼 수 있으니 타원에서도 같은 방법으로 대칭축 2개의 교점으로 중심을 찾아낼 수 있어요.

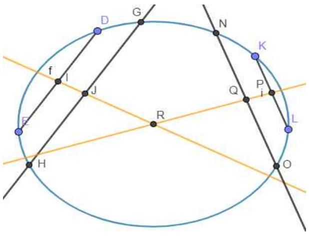
대화에서 보듯이 학생들은 처음에 현의 수직이등분선의 방법만 타원에 유추를 하였으나 오류가 있다는 것을 파악하고 타원에서 작도를 수정하려 하였다. 하지만 해결이 어려워지자 다시 원에서 대칭축이 되는 이유를 곰곰이 분석하여 타원에 다시 적용해보려 하였고 그 결과 단순히 원의 대칭축 작도를 암기만 했던 학생들도 대칭축의 의미를 분석하며 현의 중점을 연결한 선을 타원에 유추하였다. 더불어 원에서는 임의의 현의 수직이등분선이 대칭축이 되었지만 타원에서는 장축과 단축을 포함한 직선이 대칭축이 되어야한다는 사실을 깨닫고 원의 중심을 작도할 수 있는 2개의 현을 타원에 응용하여 타원의 중심을 찾아낼 수 있었다.

<표 Ⅳ-2> 원에서 유추를 통한 타원의 중심 발견 과정

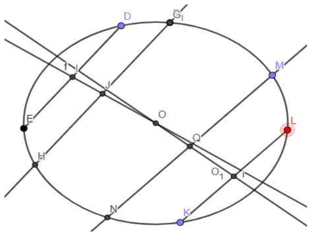
원 : 현의 수직이등분선으로 대칭축 작도
↓ (1차 유추)
타원 : 현의 수직이등분선 작도 (작도 오류 발생)
↓
원 : 수직이등분선의 작도 의미 탐색 (수직, 이등분 2개 조건 분리)
↓ (2차 유추)
타원 : 현의 이등분선 작도
↓ (수많은 현의 이등분선 중 타원의 중심을 지나는 이등분선 탐구)
원 : 현의 이등분선만으로 원의 중심을 지나는 방법 탐색
↓ (3차 유추 : 평행한 현의 중점을 이은 선이 원의 중심을 지나는 것을 발견)
타원 : 평행한 현의 중점을 이은 선 작도
↓ (4차 유추 : 원에서 현 2개의 수직이등분선 교점으로 원의 중심 발견)
타원 : 2쌍의 평행한 현의 중점을 각각 이은 선의 교점으로 타원의 중심 발견

이는 타원에서 직접적으로 불가능했던 타원의 중심 작도를 원에서 수직이등분선에서 과감히 수직 조건을 버리고 이등분만을 취하여 타원에 유추하여 평행한 현을 각각 이등분하여 그 중점을 연결한 선으로 타원의 중점을 발견해내는 결과를 가져왔다.

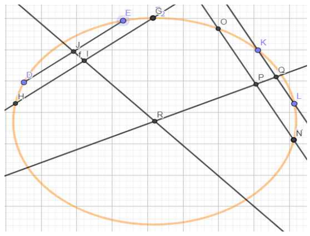
모호성이 유발되지 않으면 수학이 확장되거나 재구성되기 어려우며 모호성을 유발하는 가장 중요한 도구 중의 하나가 유추적 사고이다. 그러므로 안정 상태에서 모호성을 유발하여 불안정 상태로, 모호성을 해결하여 다시 안정 상태로 변화하는 것이 발견에 의한 수학의 발달 과정 모델이라고 할 수 있다(이경화, 2009).



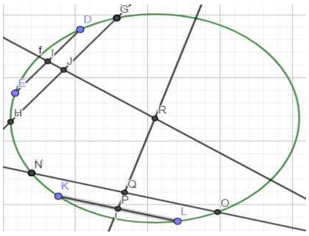
[S1 학생의 작도화면]



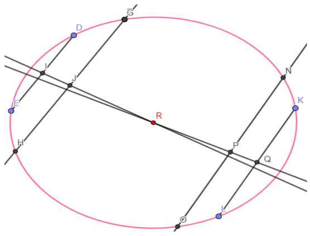
[S2 학생의 작도화면]



[S3 학생의 작도화면]



[S4 학생의 작도화면]



[S5 학생의 작도화면]

[그림 Ⅳ-4] 두 평행선의 중점을 이은 직선의 교점으로 타원의 중심 작도 화면

2. 타원의 장축, 단축 작도

타원의 중심 작도가 이루어진 후 타원의 장축, 단축 작도를 위한 탐구가 이루어졌다. 처음에는 정확한 작도가 이루어지지 않았는데 이에 대한 학생들과의 응답결과이다.

연구자 : 타원의 중심을 작도했으니 다음 과정으로 무엇을 하면 될까?

S5 : 타원의 장축, 단축을 작도해야하는데 타원의 중심을 지나며 양 끝점이 타원 위의 점이 되는 선분들 중 가장 긴 것과 가장 짧은 것을 찾아야하는데 쉽지 않네요.

S1 : 타원의 중심을 지나고 양 끝점을 타원 위의 점으로 하는 선분들 중에 가장 긴 것이 장축, 가장 짧은 것이 단축이에요.

S4 : 중심에서 가장 멀리 떨어진 점과 가장 가까운 점을 찾으면 되니까 타원의 중심을 원의 중심으로 하는 원과 타원과의 교점이 2개가 될 때 교점을 이으면 장축, 단축이 될 것 같아요.

연구자 : 그러면 교점이 2개 되는 순간을 논리적으로 정당화 할 수 있겠니?

S4 : 아니요. 원의 반지름을 크게 하면서 타원과의 교점이 2개가 되는 순간을 직접 눈으로 확인하는 것이라 정확하지 않을 것 같아요.

학생들은 이전 단계에서 찾은 타원의 중심을 활용하여 작도를 시도해야 한다는 생각은 모두 갖고 있었으나 구체적인 방법은 바로 찾지 못하였다.

S4 학생은 원으로 접근하는 생각은 좋았으나 정확한 작도를 하기보다 Geogebra를 통해 시각적으로

교점이 2개로 보이는 순간을 장축과 단축의 끝점이라 생각하고 처음에 작도를 시도하고자 하였다. 하지만 눈으로 찾아야하기 때문에 정확한 방법이 아니라고 생각하고 정확히 교점이 2개가 되는 방법을 찾고자 하였다. 한편 S2, S3 학생들은 원을 타원에 적용시킨 S4 학생 방법과 유사하지만 앞서 원의 대칭축 작도 경험을 살려 원과 타원의 교점 4개에서 교점들 간의 수직이등분선으로 타원의 장축, 단축 작도에 성공하였다.

S2 : 원의 반지름이 커짐에 따라 교점의 개수가 0개, 2개, 4개, 2개로 바뀌는데 2개가 되는 순간을 정확히 찾기 어려우니 4개에서 찾아낼 수도 있을 것 같아요.

S3 : 맞아요. 우리는 앞에서 타원의 중심뿐만 아니라 원의 대칭축 작도 방법도 했는데 타원에서 장축, 단축이 있다고 가정하면 장축, 단축은 타원의 대칭축으로도 볼 수 있어요. 즉, 4개의 교점은 서로 장축, 단축에 대칭점 관계가 되요.

S2 : S3 학생 말이 맞아요. 원을 그려서 교점 4개를 찾고 그 교점끼리 수직이등분선을 그으면 장축, 단축이 완성될 것에요.

연구자 : 맞아. 그런데 어떻게 원을 활용해야겠다고 생각을 한 거니?

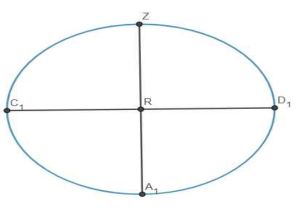
S2, S3 : 장축, 단축에 대해 대칭이 되는 타원 위의 두 점이 있는데 그 두 점에서 수직이등분선을 그으면 장축, 단축을 작도할 수 있어요. 그래서 대칭이 되는 타원 위의 두 점은 타원의 중심을 중심으로 하는 원과 타원의 교점으로 작도할 수 있어요.

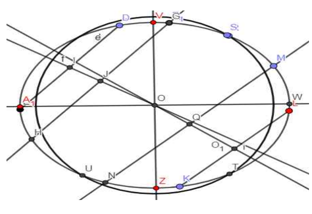
연구자 : 좋은 생각이구나. 근데 그러면 직선이니 정확히 완성하려면 어떻게 하면 될까?

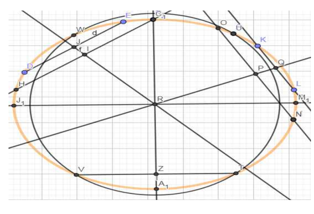
S2 : 직선과 타원과의 교점을 다시 구해 선분으로 만들어주면 장축, 단축이 되네요.

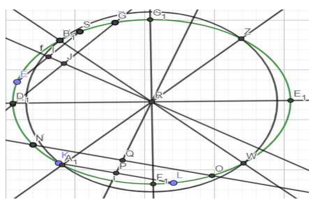
S2, S3 학생은 타원의 중심 작도 후 장축, 단축을 작도하는데 있어서 타원의 중심을 공유하는 원과 타원의 교점으로 장축, 단축을 완성하였음을 알 수 있다. 이는 이전 단계에서 학습한 원의 대칭축 작도 과정에서 학습한 대칭 개념, 수직이등분선 개념이 혼합되어 타원에 적용된 것으로 원에서 학습한 내용이 타원에 유추되었음을 알 수 있었다. 또한 S3 학생은 타원의 장축, 단축 작도를 위해 분석적 방법을 부분적으로 활용하였는데 장축, 단축이 있다고 먼저 가정하고 장축, 단축을 작도하기 위한 이전 단계를 탐구하였음을 확인하였다.

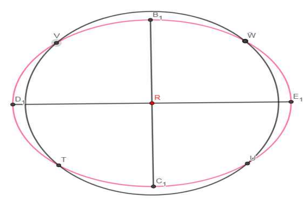
S1, S4, S5 학생도 S2, S3 학생보다 시간이 5~10분 더 걸렸지만 처음 방법을 보완하여 원을 활용한 교점 4개의 수직이등분선 방법으로 타원의 장축, 단축 작도에 성공하였다.


[S1 학생의 작도화면]


[S2 학생의 작도화면]


[S3 학생의 작도화면]


[S4 학생의 작도화면]


[S5 학생의 작도화면]

[그림 Ⅳ-5] 원과 타원의 교점끼리의 수직이등분선으로 타원의 장축, 단축 작도화면

3. 타원의 초점 작도

타원의 장축, 단축 작도 후 초점 작도 과정에서 모두 처음 20분 넘게 작도 진행을 하지 못하였는데 20분~30분 사이에 S2, S3, S4 학생이 초점이 나타나있는 완성된 타원을 따로 나타내고 그 초점의 작도 방법을 찾는 과정이 이루어졌다.

여기서 타원의 초점을 기하학적으로 찾게 되는데 초점 식을 피타고라스 정리로 변형하여 기하학적으로 작도할 수 있다는 것을 인식하고 Geogebra로 접근하는 것을 확인하였다.

이를 적절하게 해결한 S2, S3, S4 학생과의 면담이다.

연구자 : 왜 초점이 먼저 나타나있다고 가정하고 작도 방법을 찾았니?

S3 : 초점을 작도하는 것이 목적인데 $(c,0)$, $(-c,0)$의 위치를 먼저 나타내야 그 점을 작도하기 위한 방법이 쉽게 보일 것 같았어요. 타원 중심 찾을 때와 비슷하게요.

S2 : 타원의 장축, 단축을 작도했으니 초점만 작도하면 되는데 타원의 초점 식 $c^2=a^2-b^2$에서 $-b^2$을 이항하면 $b^2+c^2=a^2$이 되요. 여기서 가로 길이가 b, 세로 길이가 c, 빗변의 길이가 a인 직각삼각형 관계식이 나와요.

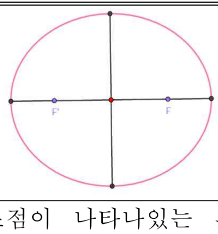
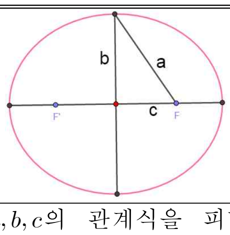
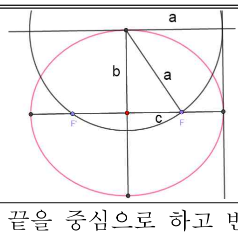
S4 : 맞아요. a와 b의 길이는 장축, 단축을 작도했으니 알 수 있는데 c가 의미하는 초점의 위치가 있다고 가정해보면 $b^2+c^2=a^2$인 피타고라스 정리를 볼 수 있어요. 따라서 $(0,b)$의 위치에서 반지름 길이가 a인 원을 작도하면 초점을 지나가게 되요.

S3 : 이 방법을 쓸려면 숨겨진 초점이 나타나있다고 가정하고 다시 이 초점을 작도하기 위한 방법으로 피타고라스 정리를 쓰게 되네요.

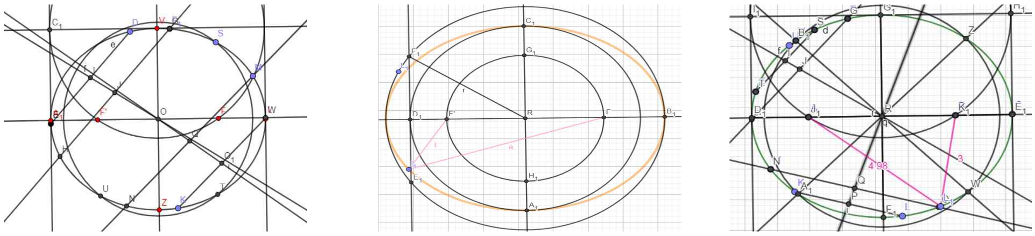
위 방법은 타원의 방정식 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$일 때 $c^2=\left|a^2-b^2\right|=a^2-b^2$을 피타고라스 정리 $a^2=b^2+c^2$ 와 분석적 방법을 활용해 기하학적으로 초점을 찾는 과정이다.

학생들은 스스로 분석적 방법을 적용하였으며 Geogebra로 이 과정을 정리하면 <표 Ⅳ-3>과 같다.

<표 Ⅳ-3> 타원 초점 작도의 어려움 해결을 위한 분석적 방법의 활용

분석적 방법 단계	1	2	3
작도 단계	3	2	1
그림			
설명	초점이 나타나있는 완성된 타원이 있다고 가정한다.	a,b,c의 관계식을 피타고라스 정리 $b^2+c^2=a^2$으로 나타낼 수 있다.	단축 끝을 중심으로 하고 반지름 길이가 a인 원을 작도하여 장축과 만나는 점이 초점이 된다.

이 과정을 통해 학생들은 처음 목표였던 그래프만 주어진 타원에서 초점을 작도하는 과정을 마무리 할 수 있게 된다. 부가적으로 Geogebra로 타원 위의 임의의 점에서 두 초점까지 이르는 길이의 합을 측정하면 항상 장축의 길이로 일정하다는 것을 확인할 수 있다.



[S2 학생의 작도화면] [S3 학생의 작도화면] [S4 학생의 작도화면]

[그림 Ⅳ-4] 원과 타원의 교점끼리의 수직이등분선으로 타원의 장축, 단축 작도화면

[그림 Ⅳ-4]에서 S2, S4 학생은 작도 과정이 같다고 볼 수 있으며 S4 학생은 초점 작도 후에 타원 위 동점과 초점까지 길이의 합을 측정하여 장축의 길이와 같은 지를 확인하였다.

S3 학생은 이들과 작도 과정이 달라 이들의 작도과정을 면담과 분석을 통해 정리하였다.

<표 Ⅳ-4> 성공한 학생의 작도 활동 결과

학생	타원 초점 작도 과정 설명
S2 S4	① 원의 중심을 작도하는 방법으로 타원 중심 작도 ② 중심을 타원의 중심으로 하는 원을 작도하여 교점 4개 발견 ③ 교점들의 수직이등분선과 타원과의 교점을 통해 장축, 단축 작도 ④ 타원 초점을 구하는 식 $c^2=a^2-b^2$에서 $b^2+c^2=a^2$인 피타고라스 정리를 타원에 적용하여 단축 끝점을 중심으로 하고 $\sqrt{b^2+c^2}=\lvert a\rvert$을 반지름 길이로 하는 원을 작도 ⑤ 원과 타원의 교점이 초점 (S4 : ⑥ 타원 위의 임의의 점에 대해 타원임을 정의로 정당화)
S3	①~③ : 위 과정과 동일 ④ $\lvert a\rvert$와 $\lvert b\rvert$를 반지름의 길이로 하는 원을 작도 ⑤ 타원 초점을 구하는 식 $c^2=a^2-b^2$에서 $\lvert c\rvert$를 높이로 하는 직각삼각형 작도 ⑥ $\lvert c\rvert$를 반지름으로 하는 원을 작도 ⑦ 원과 타원이 교점이 초점 (⑧ 타원 위의 임의의 점에 대해 타원임을 정의로 정당화)

S3 학생은 타원의 중심을 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\lvert a\rvert$, $\lvert b\rvert$, $\lvert c\rvert$인 원을 차례로 그려나가면서 초점을 발견하였다. 이 역시 초점 식을 피타고라스 정리로 인식하고 기하학적으로 작도하는 과정이다. 반면 S1, S5 학생은 초점을 작도하기 위해 일정한 계획을 갖고 시도한 것이 아니라 무작위로 작도를 하였다. S1 학생은 초점 작도가 어려워 타원 위의 정점에 대해 장축 위의 두 점을 움직여보며 길이의 합이 장축의 길이와 같은 순간을 찾는 도전을 하였고 S5 학생은 무작위로 하는 과정에서 혼란을 느껴 일찍 포기를 하였다.

<표 Ⅳ-5> 연구에 참여한 5명 학생들의 결과여부

구분 \ 학생	S1	S2	S3	S4	S5
타원 중심 작도	○	○	○	○	○
장축, 단축 작도	○	○	○	○	○
초점 작도	X	○	○	○	X

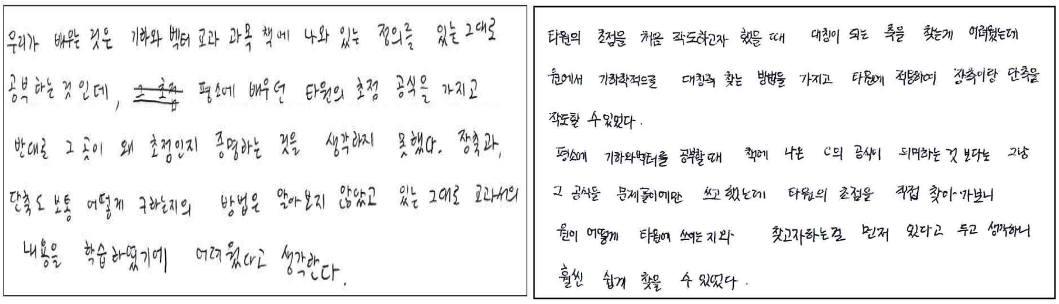
<표 Ⅳ-5>는 본 연구에 참여한 학생 5명의 타원 중심 작도, 타원의 장축, 단축 작도, 타원 초점 작도 결과여부이다.

5명의 학생들은 처음 주어진 타원에서부터 초점을 작도하는 전체적인 과정에서 공통적으로 타원의 장축, 단축 작도 및 초점 작도에서 큰 어려움을 나타냈으며 그에 따른 해결 방법으로 유추와 분석적 방법이 활용되었다.

<표 Ⅳ-6> 전체적인 작도 과정에서 나타난 어려움과 해결 방법

과정	학생들의 어려움	학생들의 해결 방법
축 작도	타원의 장축, 단축 작도 방법을 기하학적으로 정확히 찾지 못함	원의 중심 작도 경험을 타원에 유추하고 원과 타원의 교점 4개에 대한 수직이등분선으로 해결함 (유추)
초점 작도	타원의 장축, 단축에서 초점을 기하학적으로 찾아내는데 어려움을 나타냄	초점이 먼저 존재한다고 가정하고 타원 초점 식에서 피타고라스 정리를 기하학적으로 활용하여 원의 작도로 해결함 (분석적 방법)

학생들은 문제 풀이의 수단으로 사용한 초점을 직접 작도해 나가는 본 연구를 경험하며 초점을 먼저 놓고 타원을 그리는 정의의 관점을 가역적으로 바라보게 되었다. 또한 타원을 원에서 유추하여 탐구하는 연결성과 유추에서 일어나는 자연스러운 오류를 인식하였으며 분석적 방법을 통해 대수식을 기하적인 관점으로 바라볼 수 있는 시각을 기르게 되었다.


우리가 배우는 것은 기하와 벡터 교과 과목 책에 나와 있는 정의를 있는 그대로 공부하는 것인데, ~~그 초점~~ 평소에 배우던 타원의 초점 공식을 가지고 반대로 그 곳이 왜 초점인지 증명하는 것을 생각하지 못했다. 장축과, 단축도 보통 어떻게 구하는지의 방법은 알아보지 않았고 있는 그대로 교과서의 내용을 학습하였기에 어려웠다고 생각한다.

타원의 초점을 처음 작도하고자 했을 때 대칭이 되는 축을 찾는게 어려웠는데 원에서 기하학적으로 대칭축 찾는 방법을 가지고 타원에 적용하여 장축이랑 단축을 작도할 수 있었다.
평소에 기하와벡터를 공부할 때 책에 나온 c의 공식이 의미하는 것 보다는 그냥 그 공식을 문제풀이에만 쓰고 했는데 타원의 초점을 직접 찾아가보니 원이 어떻게 타원에 쓰이는 지와 찾고자하는걸 먼저 있다고 두고 생각하니 훨씬 쉽게 찾을 수 있었다.

[그림 Ⅳ-5] 타원 초점 작도에서 느낀 점

Ⅴ. 결론 및 논의

본 연구는 고등학교 3학년 자연계열 학생 5명을 대상으로 그래프만 주어진 타원에서 초점을 작도해 나가는 과정에서 나타나는 학생들의 유추와 분석적 방법을 통해 다음과 같은 결론을 내릴 수 있다.

첫째, 5명 학생 모두 타원의 정의에서 타원 초점은 먼저 주어지는 것이며 문제풀이 시 $c^2 = |a^2 - b^2|$으로 단순히 초점을 구하는 식만을 암기하여 답을 찾아나가고 있었다. 하지만 기하학적으로 타원에서 초점을 찾아나가는 문제에 당황하였으며 타원의 장축, 단축을 임의로 작도하는 오류를 범하였다. 따라

서 학교수학을 지도하는 과정에서 학생들이 단순히 암기만 하여 쉽게 지나칠 수 있는 부분에 대한 호기심과 모호성을 유발시키고 도전을 하게하여 스스로 극복하고 의미를 창출해 나갈 수 있는 경험을 제공하는 것이 필요하다.

둘째, 타원의 중심과 장축, 단축을 작도할 때 원의 대칭축 및 원과 타원의 교점을 활용하여 해결하였는데 이 과정에서 유추가 활용되었다. 원에서의 방법을 타원에 그대로 적용하자 오류가 나타났고 이는 유추과정에서 나타나는 자연스러운 오류로 기존의 대상인 원과 비교 대상인 타원과의 차이점 분석을 통해 해결할 수 있었다. 이는 직면한 문제를 해결하기가 어려울 때, 기존에 학습한 지식을 유추해봄으로써 문제 해결의 실마리를 찾을 수 있다. 하지만 이 과정에서 자연스러운 유추의 오류에 대해 교사는 안내자의 역할로 긍정적인 피드백을 해 줄 필요가 있으며 학생은 오류의 원인을 대상의 차이점을 비교함으로써 오류를 해결하고 수학적 사고를 더 확장하여 새로운 영역으로 나아갈 수 있다.

셋째, 타원의 장축, 단축에서 초점을 작도할 때 초점이 $(c, 0)$, $(-c, 0)$으로 먼저 있다고 가정한 뒤 장축, 단축과 초점 사이의 관련성을 파악하였기에 $c^2 = a^2 - b^2$을 피타고라스 정리로 생각하여 반지름 길이가 $|c|$인 원을 작도할 수 있었다. 여기서는 초점이 먼저 있다고 가정하고 초점을 찾기 위한 분석적 방법이 활용되었을 뿐만 아니라 대수식을 피타고라스 정리, 즉 기하학적인 시각으로 변형하여 적용하였다는 점에서 큰 의미가 있다고 볼 수 있다. 따라서 찾고자 하는 대상이 먼저 있다고 가정한 뒤 그 대상이 있기 위한 조건을 탐색하는 분석적 방법과 대수식을 기하적인 시각과 병행하도록 하여 학생들의 수학적 시각을 넓힐 필요가 있다.

한편 본 연구자는 이번 연구를 통해 다음과 같은 제언을 하고자 한다.

첫째, 교사는 암기로만 학습되는 부분에 학생들이 호기심을 갖게 하여 여기에 담겨진 수학적 원리를 파악하고 창의성을 기르도록 해야 한다.

둘째, 학교수학에서 학습자가 유추를 경험하도록 해야 한다. 그 유추활동에서 나타나는 자연스러운 오류에 대해 교사는 필요 시 안내자의 역할을 하고 학습자가 스스로 해결해나가게 하여 수학적 사고력을 키울 수 있는 추가적인 연구가 필요하다.

참고 문헌

강윤수, 서은정 (2009). 삼각형의 내·외심 지도방법 연구. **한국학교수학회 논문집, 12**(3). pp.171-188.

교육과학기술부 (2012). **수학과 교육과정**(교육과학기술부 고시 제2011-361호).

김원경 외 11인 (2016). **기하와 벡터**. 비상교육.

김현라 (2014). **유추와 분석법을 활용한 초등수학영재들의 정사각형 분할에 관한 연구**. 한국교원대학교 석사학위 논문.

류희찬, 제수연 (2009). 분석법을 이용한 이차곡선의 작도활동에서 나타난 학생들의 수학적 발견과 정당화. **교원교육**, pp.168-189.

반은섭 (2012). 유추 조건에 따른 수학적 문제 해결 효과. **한국학교수학회논문집, 15**(3). pp.535-563.

양성현 (2011). Geogebra를 활용한 역동적인 시각적 표상에 기반한 이차곡선 지도 방안. **대한수학교육학회, 13**(3). pp.447-468.

우정호 (2004). **학교수학의 교육적 기초(증보판)**. 서울대학교 출판부.

이경화 (2009). 수학적 지식의 구성에서 유추적 사고의 역할. **수학교육학연구, 19**(3). pp.355-369.

이춘호 (2018). **Geogebra를 활용한 삼각형 내·외심의 분석적 지도방법**. 공주대학교 석사학위논문.

장미라 (2010). 역사적 고찰을 통한 이차곡선의 지도방안. **한국수학교육학회지, 24**(3). pp.731-744.

편동중남 (1999). **수학적인 생각의 구체화**. 서울: 경문사.

한인기 (2000). 분석적 활동의 활성화를 위한 작도 문제의 활용. **한국수학교육학회지, 10**. pp.189-199.

허남구 (2017). 이차곡선의 작도 활동에서 나타난 유추적 사고. **수학교육학연구, 27**(1). pp.51-67.

홍성관, 박철호 (2007). 이차곡선 학습에서 고등학생들의 오개념 분석. **학교수학, 9**(1). pp.119-139.

Hashimoto, Y. (1987). Classroom practice of problem solving in Japanese elementary schools. In

Becker, J. P. & Miwa, T. (Ed), *Proceedings of the U. S.-Japan Seminar on Mathematical Problem Solving.* pp.94-119.
Kilpatrick (1987). Problem formulating: where do good problems come from? In A. H. Schoenfeld (Ed.), *Cognitive Science and Mathematics Education.* pp.123-147.
English, L. D. (2004). Mathematical and analogical reasoning of young leaders. *Hoboken, NJ: Taylor and Francis.*
Polya. G. (1962). *Mathematical Discovery*: On understading, Learning, and Teaching Problem Solving. New York.
Polya. G. (1986). **어떻게 문제를 풀 것인가** (우정호 역). 서울: 교우사.
Polya. G. (2003). **수학과 개연 추론** : 수학에서의 귀납과 유추 (이만근 역). 서울: 교우사.

Focal point construction of ellipses using analogy and analytical methods

Kim, Keun-Bae[5) · Choi, Ok-Whan[6) · Park, Dal-Won[7)

Abstract

The current geometric and vector textbooks focus on the mechanical activities of findi ng focus, corner, etc. through elliptic equations. In this paper, we propose a process in w hich analogy and analytical methods are used in reversible activities of focusing from a given elliptic graph without a coordinate plane.

The exploratory tool was used as Geogebra. At first, students tried to find the focus o f the ellipse by randomly constructing the major axis and the minor axis in the given ell ipse. However, we have experienced a method of constructing the circle of symmetry and analyzed this principle and deduced it to the ellipse. As a result, we could construct the center, long axis and short axis of the ellipse. Then, using the analytical method, the foc us formula was recognized as the Pythagorean theorem, and the ellipse 's focus was con structed by using the original drawing. Therefore, it is confirmed that analogy and analyt ical method can positively affect the elliptical focus.

Key word : ellipse, analogy, analytical method

Received October 31, 2018
Revised November 23, 2018
Accepted November 28, 2018

＊ 2010 Mathematics Subject Classification : 97G50, 97Q30

5) DaeJeon Yongsan High school (countblow@naver.com)
6) ChungBuk Girl's High school (choiok1833@hanmail.net)
7) KongJu University (dwpark@kongju.ac.kr), Corresponding Author