

# 응력 수정 계수를 고려한 피로 제약 조건 구조물의 위상최적설계

김 대 훈<sup>1</sup> · 안 기 수<sup>1</sup> · 정 승 환<sup>1</sup> · 박 순 옥<sup>2</sup> · 유 정 훈<sup>3\*</sup>

<sup>1</sup>연세대학교 대학원 기계공학과, <sup>2</sup>동서울대학교 기계자동차과, <sup>3</sup>연세대학교 기계공학부

## Fatigue Constrained Topological Structure Design Considering the Stress Correction Factor

Daehoon Kim<sup>1</sup>, Kiso Ahn<sup>1</sup>, Seunghwan Jeong<sup>1</sup>, Soonok Park<sup>2</sup> and Jeonghoon Yoo<sup>3\*</sup>

<sup>1</sup>Graduate school of Mechanical Engineering, Yonsei Univ., Seoul, 03722, Korea

<sup>2</sup>Department of Engineering Automotive, Dong Seoul Univ, Gyeonggi, 13117, Korea

<sup>3</sup>Department of Mechanical Engineering, Yonsei Univ., Seoul, 03722, Korea

### Abstract

In this study, a structure satisfying the fatigue constraint is designed by applying the topology optimization based on the phase field design method. In order to predict life based on the stress value, high cycle fatigue failure theory in which stress acts within the range of elastic limit is discussed and three fatigue theories of modified-Goodman, Smith-Watson-Topper and Gerber theory are applied. To calculate the global maximum stress, a modified P-norm stress correction method is used. As a result, it is possible to obtain topology optimization results that minimize the volume while satisfying the fatigue constraints. By applying the phase field design method, a simple shape with a minimized gray scale was obtained, and the maximum stress value acting on the optimization result became very close to the allowable stress value due to the modified P-norm stress method. While previous studies does not consider the stress correction factor, this study proposes the determination method regarding the stress correction factor considering loading effects related to axial stress components.

**Keywords** : phase field design method, fatigue failure constraint, modified P-norm stress, lightweight design, stress correction factor

### 1. 서 론

위상최적설계법(topology optimization)은 변수 최적 설계법 또는 형상최적설계법과는 달리 구체적인 초기 형상을 필요로 하지 않는다는 장점 때문에 개념설계 단계에서 구조물의 형상을 결정할 수 있다는 장점이 존재한다. 기존의 설계 방법으로 초기 설계 형상을 결정하는 경우에는 설계자의 경험이나 직관에 의존하여 초기 형상을 설정한 후, 성능 확인 절차와 설계 변경을 반복하여야 한다. 그러나 위상최적설계법은 설계자가 설정한 목적함수와 제약 조건을 만족하는 초기 설계 형상을 도출할 수 있다. Bendsøe와 Kikuchi에 의해서 균질화법(homogenization method) 이론이 위상최적설계 연구에 접

목된 이후(Bendsøe and Kikuchi, 1988), 위상최적설계는 단성, 음향 등의 기계적 구조설계, 전자기장 내의 구조설계 등 다양한 분야에 적용되었다. 위상최적설계의 방법론 중 하나인 밀도법(density method)을 적용하여, 정적 하중 제약 조건의 응력 기반 위상최적설계(Duysinx and Bendsøe, 1998)에 대한 연구가 진행되었다.

그러나 대부분의 구조물은 정적인 하중보다는 반복적인 동 하중이 작용함으로서 파손된다. 반복적인 하중이 가해지게 되면 재료의 항복 강도 이하에서도 파손되며, 이를 피로 파괴(fatigue failure)라고 한다. 이러한 피로 파괴 제약 조건을 고려한 밀도법 기반의 위상최적설계에 대한 연구가 수행된 바 있다(Holmberg *et al.*, 2014). 밀도법에 대한 연구는 설계

\* Corresponding author:

Tel: +82-2-2123-2859; E-mail: yoojh@yonsei.ac.kr

Received January 22 2018; Revised March 12 2018;

Accepted March 13 2018

©2018 by Computational Structural Engineering Institute of Korea

This is an Open-Access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution Non-Commercial License(<http://creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0>) which permits unrestricted non-commercial use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.

변수가 각 요소의 밀도로 정의되어 이해가 쉽고 실제적인 적용이 쉽다는 장점이 있지만, 격자 무늬(zig-zag pattern)의 발생과 실제 존재하는 물질에 적용할 수 없는 중간 영역의 밀도를 가지는 회색영역(grey scale)이 존재할 수 있는 단점이 있다. 이러한 문제점을 해결하기 위한 다양한 필터링 기법들이 존재하나(Sigmund, 2007; Guest, 2009), 근본적인 문제점을 해결할 수 없을 뿐만 아니라, 추가적인 계산을 필요로 한다.

유한요소해석을 이용한 구조물의 해석에서 응력은 국부적으로 발생하는 현상이며, 일반적으로 요소(mesh)의 형상에 따라 그 개수만큼 계산된다. 그러므로 구조물의 위상최적설계 과정에서는 이상적으로는 모든 지점에서 발생하는 응력을 고려해줘야 하지만, 요소의 개수가 증가하게 되면 계산량도 급격히 증가하게 된다. 또한 구조물에서 발생하는 최대 응력값만을 고려하는 경우, 응력제약 조건을 위해 정식화된 식을 설계 변수로 미분할 수 없으므로 설계 과정에서 민감도 계산을 수행할 수 없다. 따라서 계산의 효율성을 높이면서, 국부적 응력값(local stress value)을 반영한 전역적 응력값(global stress value)을 나타내기 위해서 P-norm 응력 측정법을 적용한 연구(Holmberg *et al.*, 2014; Lee *et al.*, 2016)와 Kreisselmeier-Steinhauser(K-S) 함수가 사용된 방법(Paris *et al.*, 2009; Qiu and Li, 2010)이 제안되었다. P-norm 응력 측정법은 모든 지점의 응력을 반영할 수 있지만, 전역적 응력값과 국부적 최대 응력값 간에 오차가 발생할 수 있다.

본 연구에서는 페이즈필드 설계법을 통해서 피로 파괴 제약 조건을 가진 구조물의 설계법을 제시하고 기존의 위상최적설계 기법이 가진 격자무늬 패턴과 중간 영역의 크기를 최소화하고자 한다. 또한, modified P-norm 응력 측정법(Ahn, 2017)을 통해서 전역적 응력값을 도출하고 제약 조건을 반영하는 설계를 제안한다. 또한 응력 수정 계수(stress correction factor)의 고려를 통하여 주응력 성분을 파악하고 구조물의 내구한도에 많은 영향을 주는 요소를 고려한 설계안을 제시하고자 한다.

## 2. 응력 기반 위상최적설계

### 2.1 DWP 함수를 적용한 페이즈필드 설계법

페이즈필드 모델은 두 가지 상(phase)이 존재하는 영역에서 일어나는 상전이 현상(phase transition)을 수학적으로 정의한 모델이며, 페이즈필드 설계법에서는 다음과 같은 반응-확산(reaction-diffusion)식에 의해 설계 변수( $\psi$ )의 갱신이 이루어지게 된다.

$$\frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t} = \alpha \nabla^2(x,t) - \frac{\partial F(\psi, u(\psi))}{\partial \psi} \quad (1)$$

여기서,  $\alpha$ 는 확산 계수(diffusion coefficient),  $u(\psi)$ 는 해석에 따른 상태변수를,  $F$ 는 설계과정에서의 목적함수를 나타낸다. 페이즈필드 설계법에서는 설계변수의 값에 따라 상(phase)이 물질 또는 빈 공간으로 정의되며 이에 따라 설계 영역내의 물질 분포가 정해진다.

본 연구에서 사용된 페이즈필드 설계법에서 목적 함수의 민감도 계산에 Double Well Potential(DWP) 함수가 사용된다. DWP 함수를 적용하면 설계 변수의 변화는 두 상의 경계에서만 이루어지게 되며(Takezawa *et al.*, 2010), 이에 따른 목적 함수는 다음과 같이 표현된다.

$$F(\psi) = a w(\psi) + \frac{\partial \bar{f}(\psi)}{\partial \psi} g(\psi) \quad (a: \text{constant}) \quad (2)$$

$\bar{f}$ 는 augmented Lagrangian 함수이며,  $w(\psi)$ 와  $g(\psi)$ 는 각각 smooth dirac-delta 함수와 smooth Heaviside 함수를 나타내며, 다음과 같은 식으로 표현된다.

$$w(\psi) = \psi^2(1-\psi)^2, \quad g(\psi) = \psi^3(6\psi^2 - 15\psi + 10) \quad (3)$$

DWP 함수를 적용하면, 설계 변수  $\psi$ 가 0(빈 공간)과 1(물질)인 지점에서의 민감도  $\partial \bar{f} / \partial \psi$  값이 0이 된다. 따라서 설계 영역 내에서 민감도 계산이 가능한 설계 변수가 0과 1사이의 값을 가지게 되는 경계에서만 형상이 변화하므로 기존 최적 설계 기법에서 문제가 되는 회색영역을 크게 줄일 수 있으며, 별도의 필터링 기법없이도 단순한 형상을 얻을 수 있다는 장점(Lim *et al.*, 2014)이 있다.

### 2.2 Modified upper bound P-norm 응력

P-norm 응력법은 설계 변수  $\psi$ 에 의해 정의되는 구조물의 형상 변화에 따른 국부적 응력값을 반영하면서 전역적 응력값을 표현하는 방법이다. P-norm 응력법은 미분 가능한 식의 형태를 가지기 때문에, 위상최적설계 과정에서 설계 변수 갱신을 위한 민감도 계산이 가능하다. P-norm 응력법은 일반적으로 다음과 같이 표기될 수 있다.

$$\lim_{P \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{N} \sum_{a \in \Omega} (\sigma_a(\psi))^P \right)^{\frac{1}{P}} = \sigma_{\max}(\psi) \quad (4)$$

$$\lim_{P \rightarrow \infty} \left( \sum_{a \in \Omega} (\sigma_a(\psi))^P \right)^{\frac{1}{P}} = \sigma_{\max}(\psi) \quad (5)$$

여기서, P는 P-norm 계수이며  $\sigma_a$ 는 피로 하중 하에서의 응력 진폭을 나타낸다. 식 (4), (5)에서 P가 무한대일 경우, P-norm 응력법으로 표현되는 전역적 응력값은 국부적 최대 응력값과 같은 값을 가진다. P-norm은 식 (4)와 같이 P-norm 응력법에 의해서 얻어진 전역적 응력값이 국부적 최대 응력값보다 적은 값을 나타내는 upper bound P-norm과 식 (5)와 같이 전역적 응력값이 국부적 최대 응력값보다 큰 값을 나타내는 lower bound P-norm으로 나타낼 수 있다. Lower bound P-norm 식을 사용하는 경우, 오차를 줄이기 위하여 국부적 응력값 중에서 허용 응력값보다는 큰 값을 일부 제외시켜서 사용하기도 한다(Lee et al., 2016). Upper bound P-norm의 경우 구조물의 모든 지점에서 발생하는 응력을 반영해 줄 수 있으나, 식 (4)에서 알 수 있듯이, 요소의 개수인 N만큼 나눠주기 때문에 P-norm 응력값이 국부적으로 발생하는 최대 응력값보다는 적은 값을 나타낸다. 본 연구에서는 P-norm 응력값과 최대 응력값의 차이를 줄이기 위해서 다음과 같이 정의된 modified upper bound P-norm 응력값을 사용하였다(Ahn, 2017).

$$\lim_{P \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{VN} \sum_{a \in \Omega} (\sigma_a(\psi))^P \right)^{\frac{1}{P}} = \sigma_{\max}(\psi) \quad (6)$$

여기서, V는 체적 분율(volume fraction)값을 나타내며 체적 분율의 값은 0과 1사이의 값을 가진다. 식 (4)로 표현되는 기존의 upper bound P-norm과 비교할 때, 요소의 개수인 N에 체적 분율값을 곱해줌으로써 실제 구조물이 존재하는 영역의 응력만을 반영할 수 있으며, 전역적 응력값과 국부적 최대 응력값과의 차이를 줄일 수 있다는 장점을 가지게 된다.

### 2.3 피로 제약 조건

고(high) 사이클의 파괴 이론에서 응력값과 하중 반복회수 간의 재료의 거동은 S-N 선도(S-N curve)로 정의된다. 본 연구에서는 S-N 관계식과 세 가지 대표적인 응력 기반 피로 파괴 기준인 modified-Goodman 기준, SWT(smith, watson and toppler) 기준(Dowling, 2004), Gerber 기준을 사용하고 그 결과를 비교하였다. 이러한 피로 파괴의 기준 선도는 특정한 수명에서의 응력 진폭(stress amplitude)과 평균 응력(mean stress)의 관계를 나타낸다. 일반적으로 인장력이 파괴의 주요 요소로 작용하기 때문에, 기준 선도에서 인장 응력이 작용하는 영역만을 고려하였다(Norton, 2011).

반복된 하중에 의한 피로 파손은 최대 응력 값보다는 응력 범위(stress range)와 관련이 있는 것으로 알려져 있다

(Wöhler, 1870). 평균 응력에 대한 영향력을 고려하기 위하여 다음과 같이 응력비(stress ratio)를 정의한다.

$$r = \frac{\sigma_m}{\sigma_a} = \frac{F_m}{F_a} \quad (7)$$

여기서, r은 응력비이며,  $\sigma_m$ 과  $\sigma_a$ 는 각각 평균 응력과 응력 진폭을 나타낸다.  $F_m$ 과  $F_a$ 는 각각 평균 하중(mean force)과 하중 진폭(force amplitude)이다. 평균 응력이 0인 경우, 응력비의 값은 0이 되며, 이 경우 요구 수명을 고려한 응력 최대값을 나타내기 위해서 다음의 Basquin 공식을 사용한다.

$$S_{a|r=0} = S_f' (2N_f)^b \quad (8)$$

여기서,  $S_f'$ 는 피로 강도 상수(fatigue strength constant)이며, 통상 재료의 극한 인장 강도( $S_{ut}$ , ultimate tensile strength)값을 사용한다.  $N_f$ 는 예상 피로 수명, b는 피로 강도 지수(fatigue strength coefficient)를 의미한다.

Modified-Goodman 기준, SWT 기준, Gerber 피로 기준은 다음과 같이 각각 식 (9), (10), (11)로 표현할 수 있다.

$$\frac{\sigma_a}{S_{a|r=0}} + \frac{\sigma_m}{S_{ut}} = 1 \quad (9)$$

$$S_{a|r=0} = \sqrt{\sigma_a(\sigma_m + \sigma_a)} \quad (10)$$

$$\frac{\sigma_a}{S_{a|r=0}} + \left( \frac{\sigma_m}{S_{ut}} \right)^2 = 1 \quad (11)$$

구조물에 작용하는 평균 응력과 응력 진폭이 재료의 항복 강도( $S_y$ , yield strength)값을 초과하지 않도록, 기준 선도에 나타나는 피로 기준식과 항복 강도 선도의 교집합 영역을 수학적으로 정의할 수 있다. 이 영역을 설계 안전 구역(safe area)로 설정하고, modified-Goodman 기준을 적용하여 수식으로 표현하면 다음과 같다. 앞서 정의한 응력비에 관한 식 (8)을 도입하면, 다음의 유도 과정을 통해 응력비가 결정된 상태에서 피로 제약 조건을 만족하는 허용 응력 진폭값을 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\sigma_a}{S_{a|r=0}} + \frac{\sigma_m}{S_{ut}} \leq 1 \right) \cap \left( \frac{\sigma_a}{S_y} + \frac{\sigma_m}{S_y} \leq 1 \right) \\ & \Rightarrow \left( \sigma_a \leq \frac{S_{a|r=0} S_{ut}}{S_{ut} + r S_{a|r=0}} \right) \cap \left( \sigma_a \leq \frac{S_y}{r+1} \right) \\ & \Rightarrow \sigma_a \leq \min \left( \frac{S_{a|r=0} S_{ut}}{S_{ut} + r S_{a|r=0}}, \frac{S_y}{r+1} \right) \end{aligned} \quad (12)$$

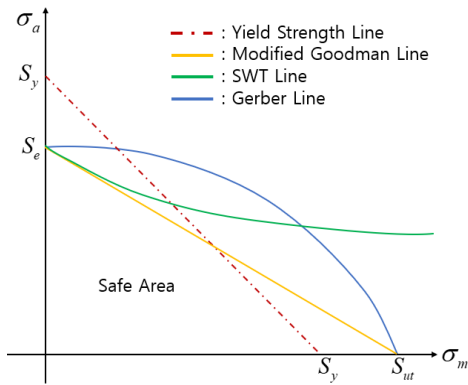


Fig. 1 Safe area based on the fatigue criteria diagrams with yield strength line

도출된 식을 통해서 응력비, 재료의 물성치, 요구 수명으로 피로 기준을 만족하는 구조물을 설계할 수 있다. SWT 기준과 Gerber 기준에 대한 허용 응력 진폭 유도 과정은 각각 다음의 식 (13)과 식 (14)로 나타낸다. Fig. 1은 피로 기준인 modified-Goodman 기준, SWT 기준, Gerber 기준과 항복 강도를 표시한 기준 선도이다. 선도에서 각각의 피로 기준과 항복 강도 선도의 교집합 구간은 안전 설계 영역을 나타낸다.

$$((\sigma_m + \sigma_a)\sigma_a \leq S_{a|r=0}) \cap \left( \frac{\sigma_a}{S_y} + \frac{\sigma_m}{S_y} \leq 1 \right) \quad (13)$$

$$\Rightarrow \left( \sigma_a \leq \frac{S_{a|r=0}}{\sqrt{r+1}} \right) \cap \left( \sigma_a \leq \frac{S_y}{r+1} \right)$$

$$\Rightarrow \sigma_a \leq \min \left( \frac{S_{a|r=0}}{\sqrt{r+1}}, \frac{S_y}{r+1} \right)$$

$$\left( \frac{\sigma_a}{S_{a|r=0}} + \left( \frac{\sigma_m}{S_{ut}} \right)^2 \leq 1 \right) \cap \left( \frac{\sigma_a}{S_y} + \frac{\sigma_m}{S_y} \leq 1 \right) \quad (14)$$

$$\Rightarrow \sigma_a = S_{a|r=0} (r=0)$$

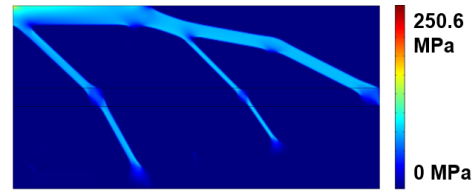
$$\text{or } \sigma_a \leq \min \left( \frac{-S_y^2 + \sqrt{(S_{ut})^4 + 4r^2(S_{a|r=0})^2(S_{ut})^2}}{2r^2 S_{a|r=0}}, \frac{S_y}{r+1} \right)$$

### 2.4 응력 수정 계수

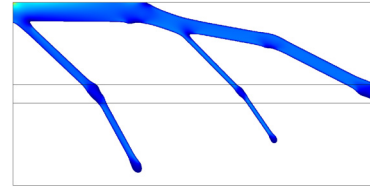
응력 수정 계수(stress correction factor)를 이용하면 주 응력 성분을 파악하여 구조물 내구 한도에 많은 영향을 주는 요소를 고려할 수 있다. 응력 수정 계수는 다음의 식 (15)로 계산된다.

$$C_{load} = -0.3x + 1 \quad (15)$$

$$(0.7 \leq C_{load} \leq 1, 0 \leq x \leq 1)$$



(a) Plotting range(0MPa~250.6MPa)



(b) Plotting range(25.06MPa~250.6MPa)

Fig. 2 1st principal stress plot (maximum 1st principal stress: 250.72MPa)

여기서, 변수  $x$ 는 구조물 전체의 요소 개수에 대한 1차 주응력 값이 우세하게 작용하는 부분의 요소 개수의 비율로 설정된다. 즉, 모든 지점에서 인장 응력이 우세하게 작용하면 변수  $x$ 의 값은 1로 결정되어서 응력 수정 계수,  $C_{load}$ 의 값은 0.7이 된다. 반대로, 모든 지점에서 압축 응력(compressive stress)이 우세하게 작용된다면, 변수  $x$ 의 값은 0 응력 수정 계수,  $C_{load}$ 의 값은 1이 된다.

본 연구에서 변수  $x$ 를 결정하는 1차 주응력 값이 우세하게 작용하는 부분에 대한 정의는 구조물에 작용하는 최대 1차 주응력 값을 기준으로 상위 90%에 해당하는 부분으로 선정했다. Fig. 2(a), (b)는 외팔보의 위상최적설계 구조물에 대한 1차 주응력 분포도이다. Fig. 2(a)에서 구조물의 하단 부분에서 1차 주응력 값이 0에 가까운 값을 나타냄을 알 수 있다. 즉, 이 부분에는 인장 응력이 우세하게 작용하지 않고, 압축 응력(compressive stress)인 3차 주응력 값이 우세하다. Fig. 2(b)와 같이 최대 1차 주응력 값 범위를 기준으로 상위 90%의 범위로 설정하면, 인장 응력이 우세한 범위만을 선정할 수 있다. 이렇게 결정된 응력 수정 계수는 2.3절에서 언급한 허용 응력 진폭에 곱해서 위상최적설계의 제약 조건에 반영된다. 응력 수정 계수를 적용하기 위한 알고리즘은 다음과 같다. 먼저, 응력 수정 계수를 도입하지 않고 위상최적설계를 진행한다. 이후, 수립된 위상최적설계물에 작용하는 응력 성분을 분석하여 응력 수정 계수를 결정한다. 결정된 응력 수정 계수를 적용하여, 위상최적설계를 다시 진행한다. 위상 최적화가 다시 진행되는 동안에는 매 단계(iteration)에서의 응력을 재분석하여 다음 단계의 응력 수정 계수를 갱신하게 된다.

### 2.5 최적설계 문제 및 설계 영역 정의

본 연구에서는 위상최적화설계에 자주 사용되는 외팔보

(cantilever beam)에 대한 설계를 진행하였다. 최적설계 문제 정의는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} &\text{Minimize } F(\psi, u(\psi)) = \int_{\Omega} \psi dx & (16) \\ &\text{subject to } G(\psi) = \sigma(\psi) - \sigma_{req} \leq 0 \end{aligned}$$

설계의 목적함수는 체적(volume) 최소화 조건으로 설정하고, 제약 조건으로는 물체에 작용하는 하중으로 발생된 최대 응력이 산출된 허용 응력을 넘지 않도록 정의하였다. Fig. 3(a)와 (b)는 각각 설계 영역과 초기 설계 형상을 나타낸다. 설계 영역의 가로, 세로의 크기는 각각 200mm, 100mm이며, 설계 영역에 적용된 유한 요소는 1mm 크기의 정사각형 QUAD4 요소로 구성하였다. 모든 위상최적설계과정에서 탄성 계수(Young's modulus)는 210GPa, 포아송비(poisson's ratio)는 0.33, 항복 응력은 350MPa, 극한 인장 강도와 피로 강도 상수는 500MPa의 물성치를 적용하였다. 식 (1)의 확산계수의 값은 1.0e-4로, 식 (2)의  $a$ 값은 10으로 설정되었다. 본 연구에서 진행한 모든 유한요소해석은 상용유한요소해석 패키지인 COMSOL을 사용하였고, 최적화 알고리즘은 Matlab 기반의 프로그램을 이용하였다.

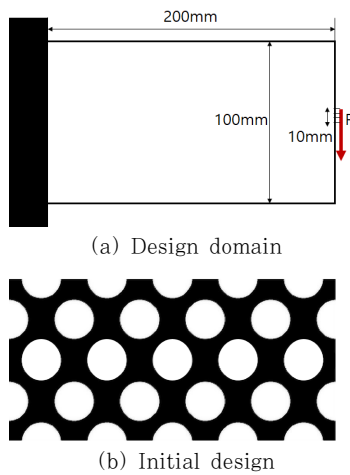


Fig. 3 Modeling for fatigue stress constrained problem for cantilever beam design

### 3. 최적화 결과

#### 3.1 평균응력이 0인 경우

평균 응력이 0인 경우, 식 (7)에 의해서 응력비가 0임을 알 수 있다. 식 (12)~(14)로 표현된 modified-goodman 기준, SWT 기준, Gerber 기준은 같은 예상 수명값을 가지며, 허용

응력 진폭값은 식 (7)의 Basquin 공식을 통해서 산출된다. 따라서, 서로 다른 세 가지의 피로 기준을 적용하여도 동일한 최적화 결과물을 도출하게 된다. Fig. 4(a)~(c)는 각각 평균 응력이 0이고, 예상 수명이  $10^6$ ,  $10^7$ ,  $10^8$  사이클인 위상최적 설계 결과를 보여준다. 해당 예제에서는 Fig. 3(a) 우측면 중간 부분에 600kN/m의 하중을 가하였다. 예상 수명이 각각  $10^6$ ,  $10^7$ ,  $10^8$  사이클(cycle)일 때, 식 (7)에 의한 허용 응력 진폭값은 각각 242.1MPa, 215.69MPa, 192.148MPa이다. 예상 수명이  $10^6$  사이클인 경우, 최적화된 구조물에 작용하는 최대 응력값은 242.09MPa로 나타나며, 응력이 가장 크게 작용하는 지점은 Fig. 4(a)에 나타난 바와 같이 구조물의 좌상단, 좌하단 부분이 된다. 설계 목적함수인 체적 분율의 최종값은 0.3480으로 계산된다. 위상최적설계 결과물로부터 설계된 구조물의 내부에는 회색영역이 나타나지 않고, 단순한 최종 형상을 얻을 수 있음을 알 수 있다. 이는 DWP 함수를 적용한 페이스필드 설계법의 특성에 기인한다. 또한, modified

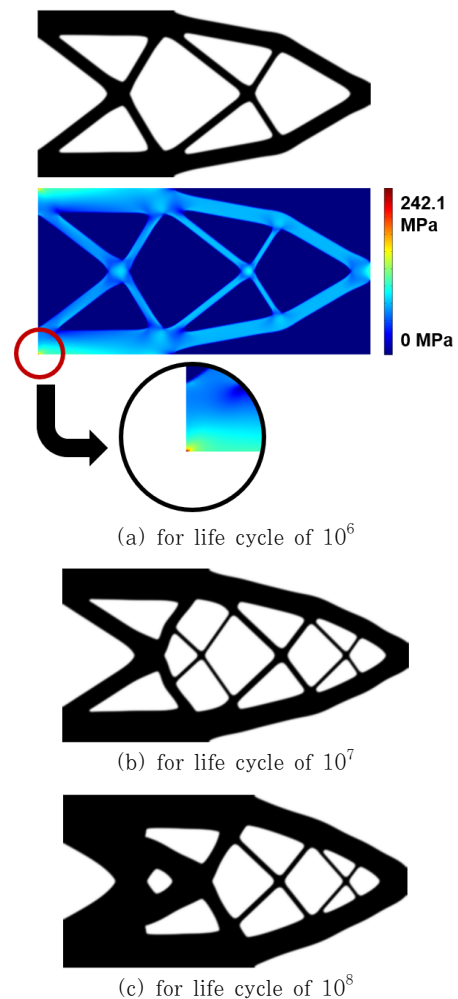
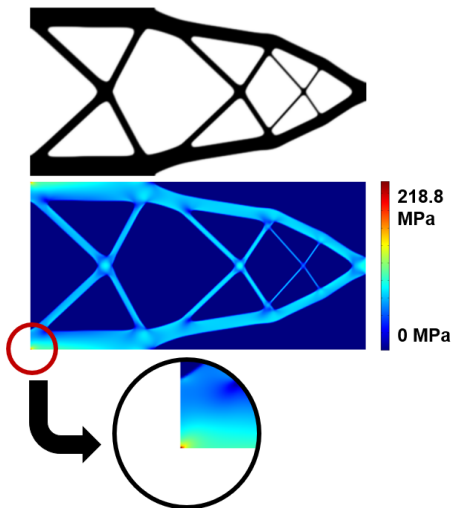


Fig. 4 Topology of optimization results for various life cycle requirements ( $\sigma_m = 0$ ).

upper bound P-norm 응력법의 적용으로 최적화된 구조물에 작용하는 최대 응력값이 Basquin 공식으로 계산된 허용 응력 진폭값에 가깝게 근접함을 알 수 있다. 예상 수명이 각각  $10^7$ ,  $10^8$  사이클(cycle)일 때 구조물에 작용하는 최대 응력값은 각각 215.69MPa, 192.148MPa로 나타났고, 목적함수인 체적분율 값은 각각 0.4275, 0.5683으로 나타났다. 예상 수명이 증가할수록 구조물에 작용하는 최대 응력값은 적어져야 하며, 최대 응력값이 줄어들기 위해서는 체적이 증가해야 한다. 위상최적설계에 따른 결과물도 이와 같은 경향을 보임을 알 수 있다.

### 3.2 응력비가 0.6인 경우

평균 응력이 0이 아니고 응력비가 0.6인 경우, 허용 응력 진폭값은 Fig. 1에서 표시된 modified-Goodman 기준, SWT 기준, Gerber 기준의 선도를 따르게 된다. 즉, 같은 응력비를 가진 하중이 작용하더라도 평균 응력과 응력 진폭의



(a) with Gerber criteria



(b) with SWT criteria



(c) with modified-Goodman criteria

Fig. 5 Topology optimization results for various fatigue criteria(stress ratio=0.6, required life cycle= $10^6$ )

합이 각 기준별로 상이한 값을 가지게 되며, 가장 넓은 범위의 안전 설계 영역을 가진 Gerber 기준을 적용하여 구조 설계를 할 경우, 가장 큰 허용 응력 진폭 값을 가진다. 이와는 반대로 가장 보수적인 설계 영역을 가지는 modified-Goodman 기준을 적용할 경우, 가장 낮은 허용 응력 진폭값을 가진다. 해당 예제에서는 예상 피로 수명을  $10^6$  사이클로, 가해지는 하중은 450kN/m으로 설정하였다. 식 (12)~(14)에 의해서 Gerber 기준, SWT 기준, modified-Goodman의 기준을 적용한 경우, 허용 응력 진폭값은 각각 218.8MPa, 191.4MPa, 187.6 MPa의 값을 나타낸다. Fig. 5(a)~(c)는 각각 응력비가 0.6 이고 요구 수명이  $10^6$  사이클인 경우에 Gerber 기준, SWT 기준, modified-Goodman 기준을 적용한 위상최적설계의 결과를 나타낸다. Gerber 기준, SWT 기준, modified-Goodman 기준을 적용한 위상최적설계 결과물에 작용하는 최대 응력은 각각 218.75MPa, 191.37MPa, 187.38MPa로 나타났다. 앞의 예제 결과와 같이 응력이 가장 크게 작용하는 지점은 구조물의 좌상단, 좌하단 부분으로 나타나며, 각각의 체적 분율은 0.2704, 0.3264, 0.3365이다. 각각의 결과에서 설계 제약 조건인 허용 응력의 진폭값은 초과되지 않고 구조물에 작용하는 최대 응력값이 허용 응력 진폭값과 근사하는 결과물이 도출되었다. 또한, 안전 설계 영역이 가장 넓은 Gerber 기준을 적용할 경우, 체적 분율이 가장 적게됨을 확인할 수 있다.

### 3.3 응력비가 1.5인 경우

응력비가 1.5인 경우, 허용 응력 진폭값은 Fig. 1에서 표시된 항복 강도 선도(yield strength line)를 따른다. 따라서, 서로 다른 세 가지의 피로 기준을 적용하더라도 최적설계 결과물의 형상은 모두 동일하게 된다. 안전 설계 영역이 항복 강도 선도를 따르므로 평균 응력과 응력 진폭의 합은 재료의 항복 강도값을 나타낸다. 해당 예제에서는 요구 수명을  $10^6$  사이클로 설정하고, 오른쪽 측면에 450kN/m의 하중을 부여

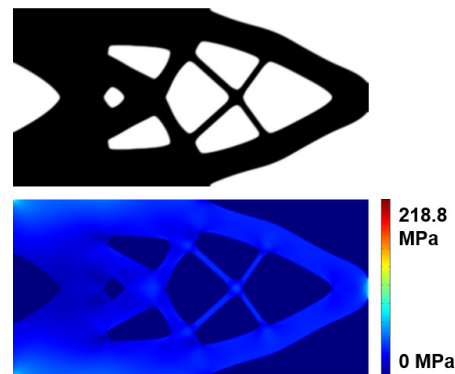


Fig. 6 Topology optimization result and stress distribution for stress ratio=1.5 and required life cycle= $10^6$



하였다. 식 (12)~(14)에 따른 Gerber 기준, SWT 기준, modified-Goodman 기준을 적용한 경우, 허용 응력 진폭값은 140MPa이다. 응력이 가장 크게 작용하는 지점은 앞의 예제들과 같이 구조물의 좌상단, 좌하단 부분으로 나타난다. Fig. 6은 해당 예제에서의 위상최적설계 결과를 보여주고 있으며, 이 때 작용하는 최대 응력은 139.8MPa이고, 체적 분율은 0.5971로 계산되었다.

### 3.4 응력 수정 계수를 적용한 경우

Gerber 피로 기준을 적용하여, 응력비가 0.538, 요구 수명을  $10^6$  사이클로 설정하고, 부가 하중을 450kN/m으로 설정했다. 설계영역은 Fig. 3(a)와 같고, 초기 최적 형상은 Fig. 3(b)와 같다. 응력 수정 계수를 결정하기 전의 허용 응력 진폭은 227.6 MPa이다. Fig. 7(a)는 응력 수정 계수를 적용하지 않은 최적 구조와 응력 분포를 보여주며, 이 경우 체적 분율은 0.2521, 최대 응력은 227.6MPa이다. 응력 수정 계수를 적용하지 않은 설계 형상을 초기 형상으로 설정하여 응력 수정 계수를 적용한 최적화 과정을 추가적으로 적용한 결과를 Fig. 6(b)에 나타내었다. 이에 따른 최종 허용 응력 진폭은 193.58MPa, 응력 수정 계수는 1에서 0.85로 감소하며, 체적 분율은 0.319, 구조물에 작용하는 최대 응력은 193.53MPa로 계산된다. 응력 수정 계수를 적용하게 되면 체적이 증가하게 되면서, 구조물에 작용하는 응력값이 감소함을 확인할 수 있다.

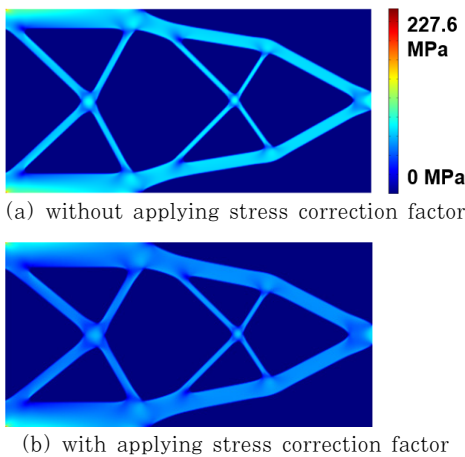


Fig. 7 Topology optimization results considering the stress correction factor

## 4. 결 론

본 연구에서는 페이스필드 설계법을 이용한 피로 파괴 제약 조건을 가지는 구조물의 위상최적설계를 수행하였다. 페이스필드 설계법과 DWP 함수의 적용으로 필터링 기법의 적용 없이

회색 영역을 최소화하고, 단순한 최종 형상을 가진 구조물을 설계하였다. 또한 modified upper bound P-norm 응력법을 사용하여 upper bound P-norm과 비교해서 전역적 응력값이 국부적 최대 응력값에 보다 근사하도록 하였다.

또한 본 연구에서는 구조에 작용하는 평균 응력과 응력 진폭의 비율로 설정되는 응력비 개념을 설계 과정에 도입하였다. 그 결과 응력비, 재료의 물성치, 요구 수명으로 피로 제약 조건 기준을 만족시키는 구조물의 설계가 가능함을 확인하였다. 또한 주응력 성분을 파악하여서 구조물의 내구한도에 보다 많은 영향을 주는 요소를 결정하기 위해 응력 수정 계수를 제안하였다. 이를 통해 단순히 체적만을 증가하여 구조물에 작용하는 응력값을 낮추는 것이 아닌, 인장 응력으로 인한 내구 한도 감소 요인을 반영한 체계적인 설계가 가능함을 확인할 수 있다.

## 후 기

이 논문은 2016년도 한국연구재단의 지원을 받아 수행되었습니다(NRF-2016R1A2B4008501).

## References

Ahn, K. (2017) Structural Optimization using the Phase Field Method Considering Stress and Fatigue Constraints, Master Thesis, Yonsei University.

Bendsøe, M.P., Kikuchi, N. (1988) Generating Optimal Topologies in Structural Design using a Homogenization Method, *Comput. Methods Appl. Mech. & Eng.*, 71(2), pp.197~224.

Dowling, N.E. (2004) Mean Stress Effects in Stress-life and Strain-life Fatigue(No. 2004-01-2227). SAE Technical Paper.

Duysinx, P., Bendsøe, M.P. (1998) Topology Optimization of Continuum Structures with Local Stress Constraints, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 43(8), pp.1453~1478.

Guest, J.K. (2009) Topology Optimization with Multiple Phase Projection, *Comput. Methods Appl. Mech. & Eng.*, 199(1), pp.123~135.

Holmberg, E., Torstenfelt, B., Klarbring, A. (2014) Fatigue Constrained Topology Optimization, *Struct. & Multidiscip. Optim.*, 50(2), pp.207~219.

Lee, K., Ahn, K., Yoo, J. (2016) A Novel P-Norm Correction Method for Lightweight Topology Optimization under Maximum Stress Constraints, *Comput. & Struct.*, 171, pp.18~30.

- Lim, H., Yoo, J., Choi, J.S.** (2014) Topological Nano-Aperture Configuration by Structural Optimization based on the Phase Field Method, *Struct. & Multidiscip. Optim.*, 49(2), pp.209~224.
- Norton, R.L.** (2011) Machine Design: An Integrated Approach, Prentice-Hall Inc: NJ, USA.
- París, J., Navarrina, F., Colominas, I., Casteleiro, M.** (2009) Topology Optimization of Continuum Structures with Local and Global Stress Constraints, *Struct. & Multidiscip. Optim.*, 39(4), pp.419~437.
- Qiu, G.Y., Li, X.S.** (2010) A Note on the Derivation of Global Stress Constraints, *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 40(1-6), p.625.
- Sigmund, O.** (2007) Morphology-based Black and White Filters for Topology Optimization, *Struct. & Multidiscip. Optim.*, 33(4), pp.401~424.
- Takezawa, A., Nishiwaki, S., Kitamura, M.** (2010) Shape and Topology Optimization based on the Phase Field Method and Sensitivity Analysis, *J. Comput. Phys.*, 229, pp.2697~2718.
- Wöhler, A.** (1870) Über die Festigkeits-Versuche Mit Eisen und Stahl.

## 요 지

본 논문에서는 페이즈필드 설계법 기반의 피로 제약 조건 구조물의 위상최적설계를 수행하였다. 페이즈필드 설계법의 도입으로 기존의 위상최적설계법에서 발생하기 쉬운 중간 영역의 크기를 크게 감소시켰다. 수정된 upper bound P-norm의 도입으로 모든 지점의 응력 성분을 고려하면서, 전역적 응력값이 국부적 최대 응력값과 근사한 값을 가질 수 있도록 설정하였다. 또한 기존의 피로 파괴 제약 조건 위상최적설계에서 다루지 않았던 응력 수정 계수에 대한 고려를 위하여 위상최적설계 결과물의 1차 주응력 성분을 고려하여 응력 수정 계수를 도입하고 이에 따라 허용 응력 진폭 값을 수정 하였다. 이를 통하여 인장 응력으로 인한 내구 한도 감소 요인을 반영한 체계적인 설계 방안을 제시하였다.

**핵심용어** : 페이즈필드 설계법, 피로 파괴 제약조건, 수정된 P-norm 응력법, 경량화설계, 응력 수정 계수