

Concurrence of Rank-two Multipartite Quantum States

Joonwoo Bae[†]

Department of Applied Mathematics, Hanyang University (ERICA),
55, Hanyangdaehak-ro, Sangnok-gu, Anyang-si, Gyeonggi 15588, Korea

(Received March 5, 2018; Revised March 27, 2018; Accepted March 28, 2018)

In this work, we derive a general lower bound to concurrence of an arbitrary mixture of two pure states, that is, rank-two multipartite quantum states. We show that the lower bound can tightly detect entanglement of rank-two states, and also can be implemented experimentally with present-day technologies, i.e. single-copy level measurement and classical post-processing.

Keywords: Entanglement theory, Quantum information theory

OCIS codes: (270.5585) Quantum information and processing; (270.5565) Quantum communications

2-계수 양자상태의 양자얽힘 분석

배준우[†]

한양대학교(에리카) 응용수학과
☎ 15588 경기도 안산시 상록구 대학로 55

(2018년 3월 5일 받음, 2018년 3월 27일 수정본 받음, 2018년 3월 28일 게재 확정)

본 논문에서는 양자시스템이 두 순수상태가 임의대로 혼합된 상태, 즉 2-계수 양자상태, 에 존재할 때 시스템이 포함하는 양자 얽힘의 일반적인 하한값을 유도하고 양자얽힘검증 및 양자상태 분리가능성 판별 방법을 제안한다.

Keywords: 양자얽힘, 양자정보이론

OCIS codes: (270.5585) Quantum information and processing; (270.5565) Quantum communications

I. 서 론

양자정보처리는 일반적으로 양자시스템의 준비, 양자시스템의 조작, 양자시스템의 측정으로 구성된다^[1]. 양자시스템 준비를 통해 양자정보처리를 위한 양자상태를 준비한다. 양자시스템의 조작은 양자이론의 공리로부터 유니타리 변환을 활용하여 수행한다. 양자상태의 측정은 양자시스템의 상태에서 측정값으로의 변환과정을 뜻한다. 주어진 시스템의 양자상태를 밝혀내는 과정을 양자상태 토모그래피 라고 하는데, 양자상태는 일반적으로 차원에 대한 가정이 주어진 힐버트 공간에서 음의 기대값을 갖지 않으며 대각합이 1인 연산자로 표현된다. 힐버트 공간 위에서 양자상태공간을 다음으로 정의할 수 있다.

$$S(\mathcal{H}) = \{\rho \in B(\mathcal{H}) : \text{tr}[\rho] = 1, \rho \geq 0\} \quad (1)$$

여기서 B 는 주어진 힐버트 공간에서 유계인 선형 연산자들의 집합이다. 주어진 시스템 A 의 양자상태들을 다음과 같이 표현하자.

$$\rho^{(A)} \in S(\mathcal{H}_A) \quad (2)$$

이제, 여러 개의 양자시스템이 존재할 때, 시스템들 간의 공유하는 상관관계는 양자역학적 성질을 갖게 된다. 각 시스템들의 양자상태들을 토모그래피를 통해 밝혀내고 이러한 각 개별시스템의 양자상태들을 활용하여 전체 시스템을 준비한다면, 이 때 전체 양자시스템은 분리가능한 양자상태 (separable state)에 있다고 한다. 이 때, 시스템 A 와 B 는 다음의 상태

$$\rho^{(A)} \otimes \rho^{(B)} \quad (3)$$

[†]E-mail: joonwoobae@hanyang.ac.kr; bae.joonwoo@gmail.com ORCID: 0000-0002-2345-1619

Color versions of one or more of the figures in this paper are available online.

혹은 다음과 같이 위의 상태들을 확률분포 p 로 혼합한 상태

$$\rho_{\text{sep}}^{(AB)} = \sum_i p_i \rho_i^{(A)} \otimes \rho_i^{(B)} \quad (4)$$

로 기술된다^[2]. 분리가능한 상태들은 국소연산-고전통신(Local Operations and Classical Communication, LOCC)으로 준비할 수 있다.

만일, 토모그래피를 통해 밝혀낸 개별시스템들을 이용하여 전체시스템을 기술할 수 없다면, 전체 시스템을 분리가능하지 않은 상태, 즉 얽힌양자상태(entangled state)로 분류한다:

$$\rho_{\text{ent}}^{(AB)} \neq \sum_i p_i \rho_i^{(A)} \otimes \rho_i^{(B)} \quad (5)$$

얽힌양자상태들은 앞에서 언급한 국소연산-고전통신만을 이용하여 준비할 수 없다. 이 때의 상관관계를 양자얽힘(entanglement)이라고 한다. 양자얽힘은 고전시스템에 존재하지 않는 양자역학적 성질을 지닌 상관관계이다.

양자얽힘은 양자정보처리의 재료(resource)이다^[3,4]. 양자얽힘이 존재한다면 쓸모있는 양자정보처리의 수행이 가능하다. 예를 들어, 양자암호통신이 가능하며^[5,6], 양자알고리즘의 실행이 가능하다^[7]. 자체로는 쓸모없는 종류 혹은 양의 양자얽힘인 경우라도 다른 양자채널과 연계하여 통신용량을 향상하는 데에 사용될 수도 있다^[8]. 양자얽힘을 포함한 양자시스템을 최초로 준비하는 것은 양자정보처리의 필수불가결한 요소이다. 그러나 일반적으로 양자시스템이 양자얽힘을 포함하는지 판별하는 것은 매우 어려운 문제로 알려져 있다^[3,9]. 현재까지는 2차원 힐베르트 공간에서 기술된 두 시스템의 양자얽힘에 대해 알려져 있다.

본 논문은 임의의 고차원에 존재하는 두 양자시스템에 대해 양자얽힘을 포함하는 지 여부를 판별하는 방법을 논한다. 특별히 두 순수상태가 확률적으로 혼합된 경우에 대해 양자얽힘을 판별할 수 있는 방법을 제시한다. 일반적으로 혼합상태의 제곱의 대각합은 1보다 작다. 순수상태의 제곱의 대각합은 1이다. 양자얽힘 단조함수의 한 종류인 양자 동시성 함수(concurrence)의 하한값의 계산을 통해 양자얽힘의 판별 방법을 제안한다.

본 논문은 다음과 같이 구성되어 있다. 단원 II에서 양자얽힘의 검증에 대한 소개와 방법들을 논한다. 단원 III에서 양자 동시성 함수의 하한값을 제시한다. 이 하한값을 벨-대각화 상태 및 2-계수 양자상태에 적용한다. 단원 IV에서 본 결과에 대한 활용과 응용들을 논한다.

II. 양자얽힘 판별 문제

2.1. 분리가능성 문제

주어진 양자상태가 양자얽힘을 포함하는지 혹은 포함하지 않는지 판별하는 것은 양자정보처리를 실제로 수행하기 위해 매우 중요하다. 이를, 분리가능성 문제(the separability

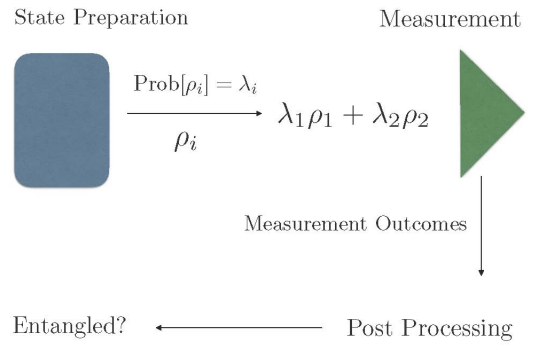


Fig. 1. Scenario of entanglement detection.

problem)라고 한다[9]. 이 문제는 현존하는 컴퓨터에서 실제적인 유한시간 내에 쉽게 답을 내리기 어려운 판별문제로 알려져 있다. 현대 전산학의 계산복잡도 이론을 통해 분리가능성 문제는 어려운 문제로 분류되어 있다.

분리가능성 문제는 작용소 대수 분야의 양의 변환(positive maps)의 구조를 밝혀내는 문제와 동치인데^[10], 이 문제는 작용소 대수에서 난제로 알려져 있다. 양자정보처리의 연구에서 작용소 대수의 기술들은 양자상태가 얽힘을 포함하는지 혹은 포함하지 않는지 판별하는 데에 많이 활용되어 왔다. 그 결과로서, 2차원의 두 개의 양자시스템에 대해, 양자얽힘의 포함여부 판별은 부분-전치(partial transpose)라 불리는 방법을 통해 완전히 해결할 수 있다^[10,11].

일반적으로, 고차원의 두 양자시스템에 대해 양자얽힘 포함 여부를 판별하는 방법에 대해서는 알려진 바가 거의 없다. 고차원의 두 양자 시스템의 양자얽힘 판별에 대해서는 부분-전치 방법을 활용할 수 있으나, 부분-전치 방법으로 검증되지 않는 얽힌 양자상태들은 실제로 충분한 공간을 차지한다. 이러한 부분-전치 방법으로 검증되지 않는 얽힌 양자상태들을 구별하는 양의 변환들이 존재하는데, 작용소 대수에서 Choi's Map^[12] 등이 알려져 있으며 양자정보이론에서는 Breuer-Hall Map^[13,14] 등과 같이 새로운 양의 변환을 구현해 내기도 했다^[15]. 그러나 이렇게 알려진 방법들은 특정 종류의 얽힌 상태들을 구별하므로 일반적으로 적용되기에는 그 한계가 자명하다.

2.2. 양자얽힘측도

양자얽힘의 포함을 판별하기 위한 또 다른 방법으로서 양자얽힘측도 함수(entanglement measure)를 계산하는 방법이 있다. 양자얽힘측도 함수는 임의의 양자상태들을 [0,1]의 구간으로 변환하는 사상이다. 이 함수는 다음의 조건들을 만족한다^[16].

- 조건 1. (단조성) 양자얽힘을 생성하지 않는 변환들의 합성에 대해 증가하지 않는다.
- 조건 2. 분리가능한 양자상태들을 0의 값에 대응하고 얽힌 상태들에 대해 양의 값을 대응한다.
- 조건 3. 함수의 최대값은 1이다.

위의 조건 1에서, 양자얽힘을 생성하지 않는 변환들은 국소 변환-고전통신(Local Operations and Classical Communication, LOCC)로 알려져 있다. 위의 세 가지 조건 외에 조작적 의미에 따른 조건을 추가하면 양자얽힘측도 함수를 구성할 수 있다. 예를 들어, 조작적 의미에 따라, 증류가능한 양자얽힘(distillable entanglement)^[17], 물입 양자얽힘(squashed entanglement)^[18] 등이 알려져 있으며, 이 둘은 모두 양자얽힘의 보안성과 매우 깊은 관련성을 지닌다.

양자상태 분리가능성 판별 문제에 대한 접근으로서, 임의의 양자상태에 대해, 양자측도함수의 계산이 한 방법이다. 계산값이 양수 [0]인 경우 얽힌상태 [분리가능한 상태] 임을 의미한다. 그러나 일반적으로 양자얽힘측도 함수는 조작적 의미에 따라 정의되므로 실제로 계산의 용이함을 목적으로 정의되지 않는다. 양자얽힘측도 함수의 계산에 대해 일반적인 접근이 알려져 있지 않다.

위의 세 가지 조건만을 만족할 경우 양자얽힘 단조 함수(entanglement monotone) 라고 한다^[6]. 양자얽힘 단조 함수의 경우에도 계산값이 양이라는 것과 주어진 양자상태가 양자얽힘을 포함하는 것은 서로 동치이다. 위의 조건들을 만족하는 양자얽힘 단조함수의 직접 계산을 통해 양자상태 분리가능성 문제에 접근할 수 있다.

2.3. 양자 동시성 함수

흥미롭게도, 양자얽힘측도 함수들 중 생성 양자얽힘(entanglement of formation)^[19]의 경우, 양자 동시성 함수(concurrence)와 새논 엔트로피의 합성함수로 표현된다. 여기서 동시성 함수는 2.2의 세 가지 조건을 만족하며 따라서 양자얽힘 단조 함수이다. 동시성 함수는 2차원의 두 개의 양자시스템에 대해서 계산방법이 알려져 있다. 이 경우, 동시성 함수를 직접 계산함으로써 그 결과가 0인지 혹은 양수인지 구별을 통해 양자얽힘 포함여부의 판별이 가능하다. 이후, 동시성 함수를 고차원으로 확장하려는 다양한 시도들이 있었다^[20-22]. 그러나 모든 확장 방법들이 고차원에서 조건 2를 만족하는 것은 아니므로, 양자얽힘 단조함수로 기술될 수 없었다.

기존의 확장 방법들을 포괄하며 가장 일반적인 양자 동시성 함수는 [22]에서 제안되었으며 2.2의 세 가지 조건들을 모두 만족하여 고차원에서 양자얽힘 단조함수이다. 시스템

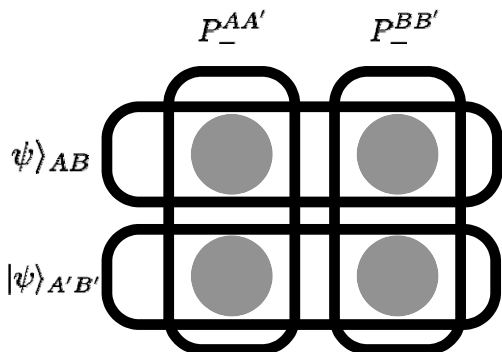


Fig. 2. Schemes of computing concurrence.

A와 B를 고차원의 양자 시스템이라고 하자. 양자상태의 동시성 함수 c를 계산하기 위해서는 가상의 복사본 A'B'이 필요하다. 그림 2에서 표현한 것과 같이 두 개의 동일한 상태에 대해서 비대칭공간으로의 사상(P)을 각각 AA' 공간과 BB'공간에서 취한다. 그리고 사상 P에 대한 기대치를 계산하는데, 정규화를 위해 루트를 취하면, 최종적으로 양자 동시성 함수는 다음과 같이 얻을 수 있다^[22]:

$$c(|\psi_{AB}\rangle) = \sqrt{[\langle \psi_{AB} | \langle \psi_{A'B'} | X | \psi_{AB}\rangle | \psi_{A'B'} \rangle]} \tag{6}$$

$$X = 4P_{-}^{AA'} \otimes P_{-}^{BB'}$$

순수상태에 대해서 정의된 양자 동시성 함수는 2.2의 세 가지 조건을 만족하며 계산가능하다.

순수상태에 대해 정의된 양자 동시성 함수는 볼록화 과정(convex-roof construction)을 통해 2.2의 세 가지 조건을 유지하며 혼합상태들에 대한 양자얽힘 단조함수로 확장 가능하다. 따라서 임의의 혼합상태들에 대해서 다음과 같이 양자 동시성 함수를 정의할 수 있다:

$$c(\rho_{AB}) = \inf_{\{p_i, |\psi_i\rangle\}} \sum_i p_i c(|\psi_i\rangle_{AB}) \tag{7}$$

위의 식에서 하한값은 주어진 혼합상태의 모든 가능한 순수상태분해에 대해서 최소화를 통해 얻어진다. 위의 혼합상태에 대한 양자 동시성 함수는 비선형 함수에 해당하며 이에 대한 최적화는 실제로 매우 어렵다^[23].

다음 단원에서는 위의 양자 동시성 함수의 하한을 구하는 식을 제안한다. 하한값이 양수인 경우, 양자 동시성 함수의 값 역시 양수임을 의미하므로 얽힌 양자상태임을 판별할 수 있다.

III. 하한을 통한 양자얽힘 판별 방법

양자 동시성 함수의 정의에서 비대칭공간 으로의 사상들의 개수는 d차원에서 d(d-1)/2개이다. 예를 들어, 2차원의 경우 1개의 사상만이 존재한다. 이 경우, 양자 동시성 함수는 선형 함수로 결정된다. 2차원의 경우 양자 동시성 함수 및 생성 양자얽힘 등의 양자얽힘측도의 계산이 용이했던 것은 모두 비대칭 공간으로의 사상이 1개만 존재했기 때문이다. 또한 이 때 생성 양자얽힘의 양자얽힘측도로 쉽게 연결되었다. 그러나 고차원의 경우 비대칭공간으로의 사상이 2개 이상 존재하며 동시성 함수는 비선형함수로 주어지 어려운 최적화 문제로 변형된다. 또한, 동시성 함수와 양자얽힘측도와의 관계도 더 이상 단순하지 않다^[24].

3.1. 양자 동시성 함수 하한의 프로그램

고차원에서 양자 동시성 함수의 하한값은 일반적으로 각 사상들의 조합을 최적화하여 얻을 수 있다. 이 방법을 순수상태 근사법이라고 부르며, 그 하한값을 얻는 과정은 다음과 요약할 수 있다^[23,25].

1. 주어진 상태의 임의의 가능한 분해를 다음과 같이 정의한다.

$$\rho = \sum_i \lambda_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i| \quad (8)$$

2. 이 상태에 대해 다음의 행렬을 구성한다.

$$T_{i,j}^{l,m} = \sqrt{\lambda_i \lambda_j} \langle \psi_l | 4P_{-}^{AA'} \otimes P_{-}^{BB'} | \psi_i \rangle | \psi_j \rangle \quad (9)$$

$$\tau = [\tau_{ij}], \quad \tau_{ij} = \sum_{l,m} z_{l,m} T_{i,j}^{l,m} \quad (10)$$

여기서 (l, m) 은 임의대로 지정한 특정값이다. z 는 정규화 된 벡터이며 벡터의 원소값들은 이후에 최적화 과정을 통해 결정된다.

3. 위에서 얻은 행렬(τ)의 곱을 계산하고 고유값들은 구한다:

$$\{\Lambda_i : \Lambda_i \geq \Lambda_{i+1}\} = \text{eig}(\tau\tau^\dagger) \quad (11)$$

여기서 고유 값들은 서류 내림차순으로 정렬되어 있다($i = 0, \dots, d-1$).

4. 앞에서 구한 고유값으로부터 동시성 함수의 하한값은 다음과 같다:

$$c(\rho) \geq c_L(\rho) = 2\sqrt{\Lambda_0} - \sum_j \sqrt{\Lambda_j} \quad (12)$$

여기서 하한값이 양수이면 동시성 함수의 값 또한 양수이므로 양자얽힘의 포함을 판별할 수 있다.

예제: 벨-대각화 상태^[25]

동시성 함수의 하한값을 얻는 방법은 고차원에서 벨-대각화 상태에 적용되었다. 2차원에서 정의된 벨 상태들은 고차원에서 다음과 같이 일반화할 수 있다.

위에서 모든 첨자는 0부터 $d-1$ 의 값이다. 바일 연산자들(Weyl Operators)을 활용한 국소연산-고전통신(LOCC) 방법을 통해 임의의 양자상태는 다음과 같은 벨-대각화 상태로 변환 가능하다:

$$\begin{aligned} \rho^{\otimes N} &\xrightarrow{\text{Weyl symmetrization}} \\ \tilde{\rho} &= \sum_{m,n} \lambda_{m,n} |\Phi_{m,n}\rangle\langle\Phi_{m,n}| \\ |\Phi_{m,n}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_k \exp\left[\frac{2\pi i}{d} kn\right] |k\rangle |k+m\rangle \end{aligned} \quad (13)$$

국소연산-고전통신의 연산에 의해 양자얽힘은 증가하지 않으므로, 벨-대각화된 상태가 양자얽힘을 포함한다면, 최초의

상태는 얽힌 상태이다.

벨-대각화된 상태에 대한 양자 동시성 함수의 하한값은 알려져 있으며 3.1.의 단계 4에서 얻는 고유값은 다음과 같다^[25]:

$$\Lambda_\eta = \frac{d}{2(d-1)} \mu_\eta (\mu_0 (1 - \frac{2}{d}) \delta_{\eta,0} + \frac{1}{d^2} \mu_{d-\eta}) \quad (14)$$

위의 식에서 첨자 η 는 2차원의 벡터로 표현되는데 각각의 원소는 $0, \dots, d-1$ 의 값이다. 위의 식을 이용하여, 벨-대각화 상태의 동시성 함수의 하한을 계산할 수 있다^[25].

3.2. 2-계수 양자상태

2계수 양자상태(rank-2 quantum state)는 두 개의 순수상태가 확률적으로 혼합된 상태를 의미한다. 양자시스템을 상태 1로 준비하고자 할 때, 주변 환경의 잡음으로 원하지 않는 상태 2로 준비되는 경우가 있다. 양자얽힘은 양자정보처리에 유용하므로 상태 1은 얽힌상태라고 가정하자. 잡음에 해당하는 상태 2로 인해 양자얽힘은 줄어들거나 사라질 수 있다. 주변 환경의 잡음이 확률적으로 발생하므로, 최종상태는 다음과 같이 표현되며,

$$\rho = \lambda_1 |\psi_1\rangle\langle\psi_1| + \lambda_2 |\psi_2\rangle\langle\psi_2| \quad (15)$$

여기서 계수는 각각 양자상태가 준비되는 최종 확률을 의미한다.

이제 그림 1에 보여진 바와 같이, 양자상태가 양자얽힘을 포함하는 지 여부를 측정결과를 통해 판별하고자 한다. 양자 메모리(quantum memory)가 있는 경우 집단측정(collective measurement)를 사용하는 것이 가능하나, 현재 기술로 구현 가능한 측정 방법인 개별측정방식(individual measurement)를 가정하자. 이 상태에 대한 양자얽힘 여부를 동시성 함수의 하한을 통해 판별할 수 있다. 이 하한값은 개별측정을 통해 실험적으로 구현이 가능하다^[28].

앞선 3.1절의 양자 동시성 함수의 하한값 구하는 과정을 통해 하한값에 대한 공식을 유도할 수 있다. 2-계수의 양자 상태이므로 3.1절의 단계 3에서 두 개의 고유값이 주어진다. 다소 긴 유도과정을 통해 두 고유값을 다음과 같이 얻을 수 있다:

$$\Lambda_{\pm} = 2^{-1} \left(\sum_{i,j=1,2} |\tau_{ij}|^2 \pm \sqrt{K} \right) \quad (16)$$

여기서 K 는 다음과 같다:

$$K = \left(\sum_{i,j=1,2} (-1)^i |\tau_{ij}|^2 \right)^2 + 4|\tau_{11}\tau_{21}^* + \tau_{22}\tau_{12}^*|^2 \quad (17)$$

타우행렬의 11원소는 상태 1의 동시성 함수, 22원소는 상태 2의 동시성 함수에 대응한다. 위의 고유값들을 활용하여, 2-계수 양자상태에 대한 동시성 함수의 하한은 다음과 같다.

$$c_L(\rho) = \sqrt{\Lambda_+} - \sqrt{\Lambda_-} \tag{18}$$

$$= 2^{-1/2} \left(\sqrt{\sum_{i,j} |\tau_{i,j}|^2 + \sqrt{K}} - \sqrt{\sum_{i,j} |\tau_{i,j}|^2 - \sqrt{K}} \right)$$

위의 하한값이 양수이면 2-계수 양자상태의 양자얽힘 척도함수인 동시성함수가 양수이므로, 얽힌 양자상태이다. 즉, 두 고유값이 같은 값이 아니면 양자얽힘을 포함한 상태이다. 두 고유값이 같지 않을 조건은 K 가 양수($K > 0$)의 조건과 동치이다.

3.3. 하한값의 적용 - 예제

앞선 절에서 얻은 2계수 양자상태에서 하한값을 적용해 보자. 상태 1이 얽힌 상태이고 상태 2가 분리가능한 상태일 때, 모든 확률에 대해서 2-계수 양자상태를 고려하자. 다음의 정리가 알려져 있다.

정리^[26]. 두 순수상태의 혼합(2-계수 양자상태)에서, 한 상태가 양자얽힘을 포함하고 다른 상태가 분리가능한 경우를 고려하자. 분리가능한 상태가 섞여 있을 확률을 q 라고 할 때, 2-계수 양자상태는 q 가 1이 아닌 모든값에 대해서 양자얽힘을 포함한다.

동시성 함수의 하한값을 이용하여 위의 정리를 다시 유도할 수 있다. 2-계수 양자상태에서 상태 1이 얽힌상태이고 다른 상태 2는 분리가능하고 q 의 확률로 혼합되어 있다고 하자. 이 경우, 동시성 함수의 하한값의 계산에서 다음을 얻을 수 있다.

$$\tau_{11} = c(|\psi_1\rangle) \tag{19}$$

$$\tau_{12} = \tau_{21} = \tau_{22} = 0 \tag{20}$$

따라서 $K > 0$ 이므로 동시성 함수의 하한값은 언제나 양수이다. 그러므로, 2-계수 양자상태는 q 가 1인 아닌 값에서 얽힘을 포함하고 있다.

논문 [27]에서 ZCE상태라 불리는 2-계수 양자상태를 고려했다. 이 상태는 이 상태는 2차원과 4차원의 시스템들로 이루어진 복합시스템이며, 다음의 두 상태가 확률적으로 혼합되어 있다:

$$|\psi_1\rangle = q_1|00\rangle + q_6|11\rangle \tag{21}$$

$$|\psi_2\rangle = q_1|03\rangle + q_6e^{i\phi}|14\rangle \tag{22}$$

논문 [27]에서는 동시성 함수를 일반화하는 방법 중 하나인 [20]에서 제시된 동시성 함수의 계산방법을 ZCE 상태에 적용하여, 양자얽힘을 포함한 상태에 대해 동시성 함수값 0을 얻었다. 따라서 [20]에서 정의된 동시성 함수는 양자얽힘 단

조함수로서 적절하지 않다. 위의 ZCE상태는 논문[20]의 양자 동시성함수 계산의 방법이 적절하지 않음을 보여주는 좋은 예이다.

그러나 3.1의 하한값 구하는 방법에서 $(l,m) = (1,1)$ 로 고정 한 후 하한값을 전개하면 다음을 얻는다:

$$\tau_{11} = c(|\psi_1\rangle) > 0 \tag{23}$$

$$\tau_{22} = c(|\psi_2\rangle) = 0 \tag{24}$$

위로부터 $K > 0$ 이므로, 양자 동시성 함수의 하한값은 양수이고, 따라서 ZCE 상태는 모든 혼합확률에 대해서 양자얽힘을 포함하고 있다.

정리. 모든 확률적 혼합에 대해 ZCE 상태는 양자얽힘을 포함한다.

이 결과는 논문 [20]에서 제시된 양자 동시성 함수를 일반화 방법이 양자얽힘 단조함수의 성질을 유지하는 데에 실패했음을 의미한다. 또한, 위의 결과로부터 논문 [22]에서 제안된 양자 동시성 함수의 확장방법이 양자얽힘 단조함수의 성질을 잘 유지한다는 것을 보여준다.

위의 3.2에서 얻은 결과는 임의의 2-계수 양자상태에 대한 동시성 함수의 하한값에 일반적으로 적용가능하다. 양자얽힘의 판별을 위해서는 $K > 0$ 혹은 $K = 0$ 의 계산이 필요하며, 주어진 양자상태의 얽힘 조건과 $K > 0$ 의 조건은 서로 동치이다.

3.4. 하한값 검증의 실제 구현

양자 동시성 함수는 실제로 초기 상태의 두 개의 복사본에 대한 특정 측정가능연산자(observable)의 기대치이다. 논문 [28]에서 이 측정가능연산자를 두 개의 복사본을 통해 직접 구현했다. 양자 동시성 함수의 하한값은 두 개의 복사본 중 한 개의 복사본에 대한 측정가능연산자의 기대치이다. 따라서 실험적 구현이 더욱 용이하며 구현가능하다. 이에 대한 수치적 분석이 존재하며, 향후 실험적 구현으로 얻어질 것으로 기대된다.

IV. 결 론

고차원의 양자상태들에 대해 양자얽힘의 포함을 판별하는 문제는 일반적으로 매우 어려운 문제이며 접근할 수 있는 방법들도 알려진 바가 거의 없다. 부분-전치의 방법을 통해 양자얽힘을 판별하는 방법은 3차원 이상의 양자시스템에서 매우 제한적이다. 가능한 방법 중 하나는 양자얽힘 척도함수 혹은 양자얽힘 단조함수를 양자상태에 대해 직접 계산하여 그 결과가 0인지 혹은 양수인지를 통해 양자얽힘 포함을 판별하는 것이다. 그 값이 0이라면 분리가능한 상태이고, 양의 값이라면 양자얽힘을 포함한 상태이다. 그러나 대부분의 경우 양자얽힘 척도함수들을 직접 계산할 수 있는 방법은 알려

져 있지 않다.

본 연구에서는 양자얽힘 단조함수 중 하나인 양자 동시성 함수의 계산 방법을 제시하고 일반적인 하한값을 보였다. 이 하한값은 벨-대각화 상태 및 2-계수 양자상태에 대해 엄격한 하한값이다. 또한, 논문 [20]의 방법으로 동시성 함수를 계산하여 양자얽힘 판별에 실패한 ZCE 양자상태에 대해서, 본 논문의 하한값을 적용하여 양자얽힘 판별이 가능함을 보였다. 이 하한값은 실제 측정가능연산자에 대응하며 현존하는 양자광학 장비를 이용하여 구현가능하다. 향후, 본 연구결과 의 하한값을 좀 더 복잡한 다계수의 양자상태에 대해 근사를 하는 것은 양자얽힘 판별의 한 방법으로 매우 흥미롭고 실제 적으로 응용성 있는 결과를 얻는 연구방향이다. 또한, 본 연구의 하한값이 실제 양자정보응용에서 구현되어 양자얽힘을 직접 검증하는 데에 활용될 것을 기대한다.

감사의 글

이 논문은 한국연구재단 지원으로 수행되었습니다(NRF-2017R1E1A1A03069961).

References

1. J. Bae, "Designing quantum information processing via structural physical approximations," *Rep. Prog. Phys.* **80**, 10 (2017).
2. R. F. Werner, "Quantum states with Einstein-Podolsky-Rosen correlations admitting a hidden-variable model," *Phys. Rev. A* **40**, 4277 (1988).
3. R. Horodecki, P. Horodecki, M. Horodecki, and K. Horodecki, "Quantum entanglement," *Rev. Mod. Phys.* **81**, 865 (2009).
4. O. Gühne and G. Toth, "Entanglement detection," *Phys. Rep.* **474**, 1 (2009).
5. M. Curty, M. Lewenstein, and N. Lutkenhaus, "Entanglement as precondition for secure quantum key distribution," *Phys. Rev. Lett.* **92**, 217903 (2004).
6. A. Acin and N. Gisin, "Quantum correlations and secret bits," *Phys. Rev. Lett.* **94**, 020501 (2005).
7. R. Raussendorf and H. Briegel, "A one-way quantum computer," *Phys. Rev. Lett.* **86**, 5188 (2001).
8. G. Smith and J. Yard, "Quantum communication with zero-capacity channels," *Sci.* **321**, 1812-1816 (2008).
9. L. Gurvits, "Classical deterministic complexity of edmonds problem and quantum entanglement," in *Proc. 35th Annual ACM Symposium on Theory of Computing (USA, Jun. 2003)*, pp. 10-19.
10. M. Horodecki, P. Horodecki, and R. Horodecki, "Separability of mixed states: necessary and sufficient conditions," *Phys. Lett. A* **223**, 1-8 (1996).
11. A. Peres, "Separability Criterion for Density Matrices," *Phys. Rev. Lett.* **77**, 1413-1415 (1996).
12. M.-D. Choi, "Some assorted inequalities for positive linear maps on C*-algebras," *J. Operator Theory*, **4**, 271-285 (1980).
13. H.-P. Breuer, "Optimal Entanglement Criterion for Mixed Quantum States," *Phys. Rev. Lett.* **97**, 080501 (2006).
14. W. Hall, "A new criterion for indecomposability of positive maps," *J. Phys. A* **39**, 14119 (2006).
15. J. Korbicz, M. Almeida, J. Bae, M. Lewenstein, and A. Acin, "Structural approximations to positive maps and entanglement breaking channels," *Phys. Rev. A* **78**, 062105 (2008).
16. G. Vidal, "Entanglement Monotone," *J. Mod. Opt.* **47**, 355 (2000).
17. C. Bennett, D. DiVincenzo, J. Smolin, and W. Wootters "Mixed State Entanglement and Quantum Error Correction". *Phys. Rev. A* **54** 3824-3851 (1996).
18. M. Christand and A. Winter, "Squashed entanglement - an additive entanglement measure," *J. Maths. Phys.* **45**, 829 (2003).
19. W. Wootters, "Entanglement of formation of an arbitrary state of two qubits," *Phys. Rev. Lett.* **80**, 2245-2248 (1998).
20. A. Uhlmann, "Fidelity and concurrence of conjugated states," *Phys. Rev. A* **62**, 032307 (2000).
21. P. Rungta and C. M. Caves, "Concurrence-based entanglement measures for isotropic states," *Phys. Rev. A* **67**, 012307 (2003).
22. F. Mintert, M. Kus, and A. Buchleitner, "Concurrence of mixed bipartite quantum states in arbitrary dimensions," *Phys. Rev. Lett.* **92**, 167902 (2004).
23. F. Mintert, A. R. R. Carvalho, M. Kus, and A. Buchleitner, "Measures and dynamics of entangled states," **415**, 207-259 (2005).
24. K. Vollbrecht and R. F. Werner, "Entanglement measures under symmetry," *Phys. Rev. A* **64**, 062307 (2001).
25. J. Bae, M. Tiersch, S. Sauer, F. de Melo, F. Mintert, B. Hiesmayr, and A. Buchleitner, "Detection and typicality of bound entangled states," *Phys. Rev. A* **80**, 022317 (2009).
26. P. Horodecki, J. Smolin, B. M. Terhal, and A. V. Thapliyal, "Rank two bipartite bound entangled states do not exist," *Theor. Comput. Sci.* **292**, 589-596 (2003).
27. L. Cattaneo and D. D'Alessandro, "Generalized concurrences do not provide necessary and sufficient conditions for entanglement detection," *Quant. Inf. Com.* **9**, 66-180 (2009).
28. S. P. Walborn, P. H. Souto Ribeiro, L. Davidovich, F. Mintert, and A. Buchleitner, "Experimental determination of entanglement with a single measurement," *Nat.* **440**, 1022-1024 (2006).