East Asian Math. J.
Vol. 34 (2018), No. 2, pp. 219-238
http://dx.doi.org/10.7858/eamj.2018.016

Pappus가 보인 일반각의 3등분문제 해결의 재조명과 시각화

The reinterpretation and the visualization of Pappus' methods for trisecting the angle

김 향 숙* · 김 양 · 박 진 석

ABSTRACT. The purpose of this paper is to reinterpret and visualize Pappus' methods for trisecting the angle by utilizing the Nicomedes' conchoid and Apollonius' symptom of a hyperbola.
In particular, we reinterpret the Pappus' three results which are the methods of hyperbola and circle, the trisection of the arc and focus and directrix of the hyperbola by 3 steps(analysis, construction, and proof) in the current middle school curriculum of Mathematics. Moreover, we visualize the construction of an hyperbola which is represented by means of an eccentricity.

I. 연구의 필요성 및 목적

고대 그리스인들은 정오각형의 작도[1]에 이어 정다각형의 작도에 힘을 쏟은 것으로 보이며, 그 과정에서 각의 3등분문제가 자연스럽게 대두된 듯하다. 실제로 수학사에서 전해 온 정구각형(나아가 변의 개수가 9의 배수인 정다각형)의 작도문제 해결과정만 보더라도 각의 3등분문

Received January 2, 2018; Revised February 22, 2018; Accepted February 28, 2018.
* 본 논문은 2017 학년도 인제대학교 학술연구조성비 보조에 의한 것임
2010 Mathematics Subject Classification : 97D40, 94B27
Keywords: Trisection of angle, Reinterpretation, Visualization, Construction, Conchoid, Hyperbola

1) 작도는 -눈금이 없는 자와 컴퍼스만을 사용하는- 고전적 의미의 작도, 일명 Euclid 작도를 말한다. 그러나 여기서는 앞으로 특별한 단서가 없는 한, 곡선 등을 이용하는 작도와 구별하지 않고 두 가지 모두를 작도라 부르기로 한다.

제를, 비록 당시에는 '기계적인 방법'이라고 외면당했던, '곡선을 이용한 방법'으로 체계적으로 해결함으로써 원래의 문제를 간결하게 해결하고 있다[2].

각의 3등분문제에 대해서는 Pappus[3] 가 Nicomedes[4] 의 'conchoid[5]'를 이용한 'neusis construction[6]'을 선보인 이래, 여러 가지 곡선을 이용한 많은 연구결과들이 전해지고 있지만, 그 중에서도 특히 쌍곡선에 관한 Apollonius의 symptom을 이용하여 보인 Pappus의 방법은 시대를 뛰어넘는 획기적인 접근방법이며, 이 결과는 훗날 원뿔곡선을 이용한 방법만이 '기하적인 방법'이라 칭송한 중세 이슬람 기하학자들의 발전적이고 뛰어난 업적들이 나오는데 모태가 되지 않았을까 추측이 갈 정도이다. 그러나 수학사에 의하면 각의 3등분문제에 대해서만은 화려한 고대 그리스의 결과들이 중세 이슬람세계로 그다지 잘 전달되지 않은 것으로 알려져 있다.

각의 3등분문제를 해결하기 위하여 고대 그리스에서 중세 이슬람에 이르기까지 원뿔곡선에 관한 Apollonius의 symptoms ([2, 3, 4, 9])로부터 유도되는 원뿔곡선의 초등기하적인 성질들은 다채롭게 활용되고 있다. Pappus는 쌍곡선의 점근선에 대한 성질을 활용한 반면에 중세 이슬람에서는 쌍곡선의 직경과 그에 대응되는 종선에 대한 성질([5, 9])을 주로 활용한 점이 특이하다. 다만 쌍곡선에 관한 이와 같은 성질은 모두 Apollonius의 저서 『conics』([9])를 통해 습득했을 것으로 여겨지나, 실제로는 도형의 성질에만 의존하고 있기 때문에 도형의 성질을 활용한 내용들을 모두 확인해 본다는 것은 꽤나 번잡하며 시간이 필요할 것이다. 따라서 쌍곡선의 방정식을 이용하여 좌표평면에서 보다 간략하고 명쾌하게 도형의 성질들을 확인할 수도 있을 것이다(cf. [5]).

현행 중등수학은 물론 고등수학에서는 거의 방정식으로 표현된 원뿔곡선만을 취급하고 있기 때문에 원뿔곡선은 좌표가 설정된 평면, 즉 좌표평면을 먼저 생각하게 한다. 물론 활용도가 높은 원뿔곡선의 기본성질은 원뿔곡선의 표준형을 이용하여 간결하면서도 손쉽게 얻을 수 있음을 익히 알고 있다. 그러나 원뿔곡선에 관한 Apollonius의 symptoms를 이용하여 좌표를 도입하지 않고서도 원뿔곡선을 평면위에 필요에 따라 얼마든지 구현할 수 있음을 이해한다는 것은 비단 일반각의 3등분문제 뿐만이 아니라 실생활에서 만날지도 모를 많은 문제 해결에도 도움이 될 것으로 예상된다.

본 논문은 Nicomedes 의 'conchoid'를 이용한 방법을 출발점으로 Pappus의 원뿔곡선을 이용한 발전적인 결과까지를 가능한 한 중등수학 입장에서 재조명하고, 특히 중등수학에서 다루고

---

2) 일반각의 3등분이 대수적으로는 불가능함이 1836년에 Wantzel에 의해 밝혀졌다.

3) Pappus of Alexandria (c.290 - c.350)는 저서 『Collection』에서 원뿔곡선을 활용한 각의 3등분문제 해결방법을 3가지 보였으나, 그 중 2가지는 중세 이슬람으로 전해지지 못했다([8]).

4) Nicomedes (c.280 B.C. - c.210 B.C.); 고대 그리스 수학자이며 'On conchoid lines'을 저술하였다.

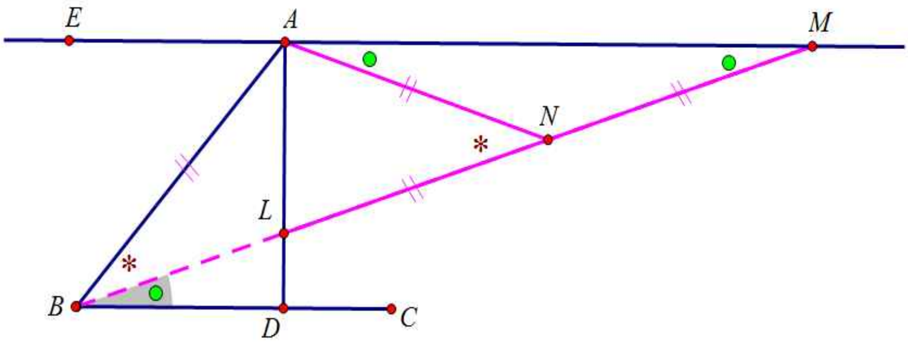
5) 'conchoid'는 B.C. 3세기 후반에 Nicomedes가 입방배적문제를 해결하기 위해 찾아낸 곡선으로 잘 알려져 있다.

6) marked ruler를 사용한 작도를 일컫는다.

있는 초등기하의 기본 성질만으로도 동적기하소프트웨어를 활용하여 일반각의 3등분선을 구현할 수 있음을 보이고자 한다. 실제로 동적기하소프트웨어를 사용하여 학생들이 교과서에서 배운 수학적 개념, 원리 및 내용을 그림으로 그려보고, 그려진 그림에서 조건을 바꾸어 다양한 장면을 구현해 보는 조작 및 탐구 활동은 학생들이 어려워하는 추상적인 수학내용을 구체화시켜서 이해하도록 하는데 도움을 줄 것이다. 따라서 예각의 3등분 문제만을 다루고 있는 Pappus의 결과를 둔각인 경우에도 적용가능한지에 대한 답을 찾기 위해 공학적 도구를 사용한 자기 주도적 체험 활동으로 학생들이 스스로 새로운 지식을 발견하고 구성하며 수학적 내용을 구체화해 가는 과정은 수학적 문제해결, 추론, 창의 융합, 태도 및 실천 등의 수학교과 역량을 함양하는데 도움을 주는 새로운 실험・발견・수학적 체험의 한 장을 제공할 것이라 기대한다.

II. 연구내용

아래의 [그림 2.1]처럼 $\angle ABC$가 주어졌을 때, 이 각의 3등분선을 어떻게 찾을 것인가?



[그림 2.1]

우리는 이제 위의 [그림 2.1]처럼 $\overline{BM}$ 을 찾으면 될 것이다.

먼저 점 A에서 변 BC에 내린 수선의 발을 D라 하고, 또 점 A를 지나는 변 BC의 평행선 EA를 긋는다. 여기서 만약 점 B를 지나는 반직선으로, 직선 AD, EA와 만나는 점을 각각 L, M이라 할 때

$$\overline{LM} = 2\overline{AB} \quad \cdots\cdots\cdots \quad (2.1)$$

를 만족하는 것을 그을 수 있다면, 등식

$$\angle LBC = \frac{1}{3}\angle ABC$$

임을 얻을 수 있다.

실제로 선분 LM의 중점을 위 [그림 2.1]과 같이 N이라 하면 $\triangle ALM$은 직각삼각형이고, $\triangle ANM$과 $\triangle ABN$은 둘 다 이등변삼각형이므로

$$\angle ABC = \angle ABL + \angle LBC = 2\angle LBC + \angle LBC = 3\angle LBC$$

이다.

이제 남은 문제는

"어떻게 조건 (2.1)을 만족하도록 점 B를 지나는 반직선을 그을 수 있을까?"

이다.

이 문제에 대해서 Pappus는 여러 가지 곡선, 예컨대 Nicomedes의 'conchoid' 및 쌍곡선과 원을 이용하여 획기적이면서도 명쾌한 해답을 자신의 저서인 『Collection, Book Ⅳ』에 수록하였다([10, 12]).

본 논문에서는 Pappus가 일반각의 3등분문제에 관해 제시한 해법을 소개할 것이다. 더욱이 그 같은 해결 방법을 가급적 중등수학에서 다루고 있는 초등기하적인 기본성질과 용어를 사용하여 재조명함은 물론이고 나아가 동적기하프로그램으로 Pappus의 생각을 시각화하여 나타냄에 있어서 그 작도 방법을 학습 자료로 이용이 가능하도록 보다 구체적으로 제시하고자 한다. 특히 제시된 작도 방법은 동적기하프로그램 중 하나인 GSP를 사용할 것이며, 이는 다른 프로그램에도 적용이 가능한 방법으로 생각한다.

Ⅲ. 연구결과

Pappus가 보인 Nicomedes의 'conchoid'를 이용한 방법, Apollonius의 원뿔곡선에 관한 symptoms를 이용한 세 가지 방법(쌍곡선과 원을 이용한 방법, 원호의 3등분을 이용한 방법, 쌍곡선의 초점과 준선을 이용한 방법)을 재해석하여 제시할 것이다.

1. Pappus의 conchoid를 이용한 방법

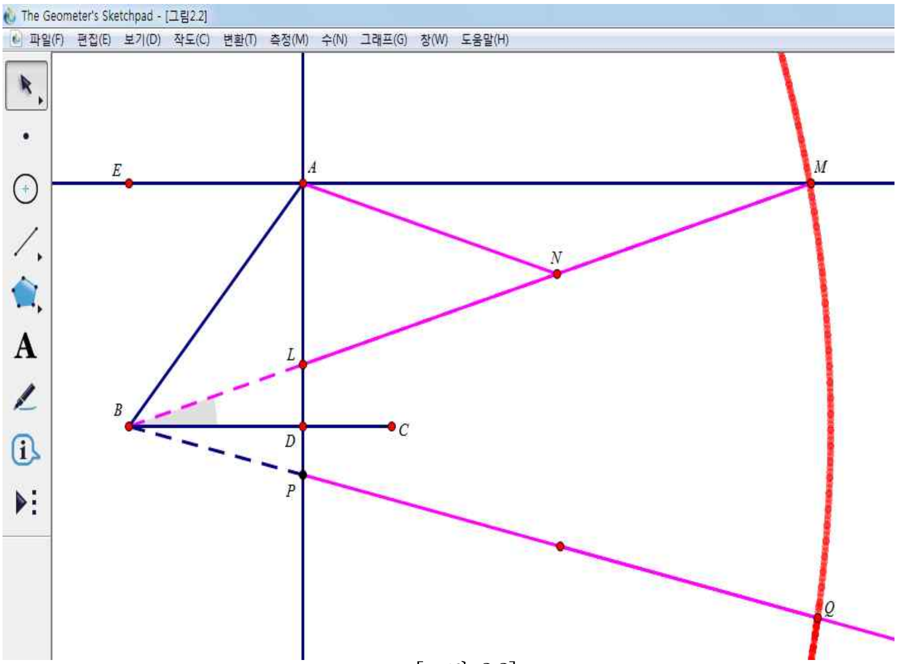
Pappus는 Nicomedes가 입방배적문제([4, 7, 8, 11, 12])를 위해 그린 'conchoid'를 'marked ruler'를 이용하여 나타냄으로써 해결했다([10])[7]. 실제로 'marked ruler' 대신에 동적기하프로그램(GSP)을 사용하여 Pappus의 아이디어를 아래와 같이 간결하게 재현할 수 있을 것이다. 그 작도 과정을 소개한다.

$\boxed{\text{작도 방법 ([그림 2.2] 참조)}}$

먼저 직선 AD 위에 놓여있는 점 P를 임의로 잡은 후, 반직선 BP 상에서

$$\overline{PQ} = 2\overline{AB}$$

를 만족하는 점 Q를 택한다. 이때 점 P에는 메뉴판에서 『[보기(D)]』를 선택한 후 『점에 애니메이션 주기(A)』를 명령하고, 점 Q에는 메뉴판에서 『[보기(D)]』를 선택한 후 『점의 흔적 남기기(T)』를 명령하여 실행하면 우리에게 필요한 'conchoid'를 얻을 수 있으며, 이 'conchoid'와 직선 EA의 교점 M이 조건 (2.1)을 만족한다.



[그림 2.2]

2. Pappus의 쌍곡선을 이용한 방법

앞에서도 언급했듯이 Pappus는 『Collection, Book Ⅳ』에 각의 3등분선 작도에 관한 일련

7) 앞으로 'marked ruler'를 이용한 작도를 'neusis construction' 또는 간단히 'neusis'로 표기하기로 한다.

의 방법들을 제시하고 있다. 지금부터 그 중 앞에서 소개한 Nicomedes의 ‘conchoid’를 이용한 ‘neusis construction’ 이외의 원뿔곡선을 이용 놀랄 방법에 대해 소개하고자 한다.

이미 살펴보았듯이 $\angle ABC$ 의 3등분선의 작도문제는 조건 (2.1)을 만족하는 선분 BM 의 작도문제로 귀착됨을 알고 있다. Pappus가 이 선분 BM (또는 LM)을 원뿔곡선을 이용하여 찾은 세 가지 방법을 고찰해 보기로 한다. 세 가지 방법 즉, 쌍곡선과 원을 이용한 방법, 원호의 3등분을 이용한 방법, 쌍곡선의 초점과 준선을 이용한 방법을 찾았다.

1) 쌍곡선과 원을 이용한 방법

먼저 원과 쌍곡선을 이용하여 Pappus는 어떻게 선분 BM (또는 LM)을 작도하였는지 살펴보고, 다음으로 그 작도 과정에 따라 동적기하프로그램(GSP)을 이용하여 각의 3등분선 작도를 구현해보기로 한다. Pappus가 원뿔곡선을 이용하여 찾은 각의 3등분선 작도 방법 세 가지 즉, 쌍곡선과 원을 이용한 방법, 원호의 3등분을 이용한 방법, 쌍곡선의 초점과 준선을 이용한 방법을 고찰하는 내용을 보다 간결, 명료하게 전개하기 위해서 ‘작도의 완전해’라 알려져 있는 4단계

해석[8], 작도, 증명, 음미

중에서 음미 단계는 생략하고 앞의 3단계만으로 나누어 서술한다. 즉, 쌍곡선과 원을 이용한 Pappus의 각의 3등분선 작도 문제를 ‘(1)해석 (2)작도 (3)증명’ 순서로 재해석하고 시각화하여 제시한다.

(1) 해석

아래의 [그림 2.3]처럼 직사각형 $ABCD$ 와 선분 EF 가 주어졌다고 한다. 이때 반직선 AD 와는 점 F 에서 만나고 변 DC 와는 점 E 에서 만나는, 점 B 를 지나는 반직선으로

$$\overline{BF} = \overline{BE} + \overline{EF}$$

를 만족하는 것을 [그림 2.3]처럼 그렸다고 하자. 여기서 평행사변형 $ECGF$ 를 만들면 직사각형 $ABCD$ 의 넓이는 가로, 세로를 각각 $\overline{AF}$, $\overline{EC}$ 로 하는 직사각형의 넓이와 같으므로

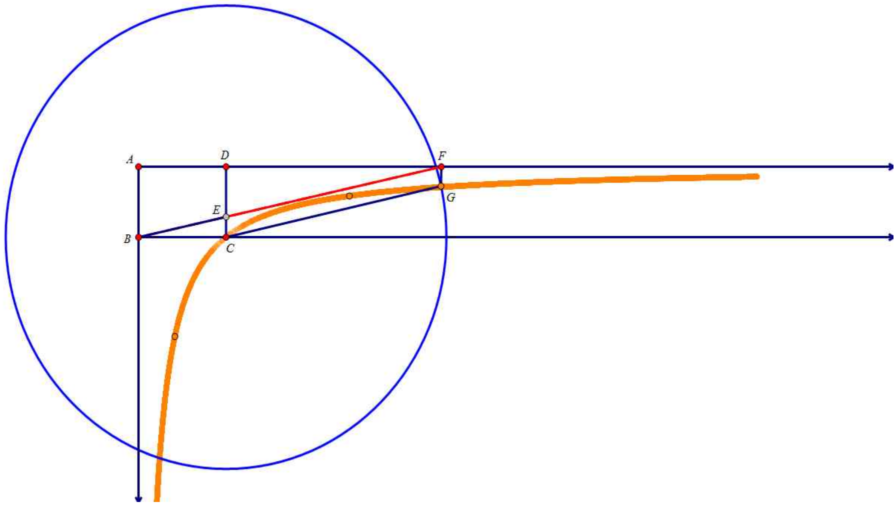
$$\overline{AD} \cdot \overline{DC} = \overline{AF} \cdot \overline{EC}$$

8) 고대 그리스인들의 문제해법의 상습적인 수단으로, 문제가 풀렸다고 가정해서 그 해법을 탐구하는 의미의 것이며, 이를 ‘해석’이라 불렀다. 그러나 Euclid의 『원론』에는 이 ‘해석’ 부분은 없고 ‘작도’와 ‘증명’만 보이고 있는 것으로 알려져 있다.

이다. 그런데 $\overline{EC} = \overline{FG}$ 이므로

$$\overline{FG} \cdot \overline{FA} = \overline{DC} \cdot \overline{DA}$$

가 성립한다. 따라서 점 G는 점 C를 지나고 직선 AD와 AB를 점근선으로 하는 쌍곡선 위에 놓여있다([9, Proposition 34, p. 59]).



[그림 2.3]

한편 점 G는 점 C를 중심으로 반지름의 길이가 $\overline{EF}$인 원위에도 놓여있으므로, 이 원과 위의 쌍곡선의 교점으로 G를 찾음으로써 필요한 반직선을 얻을 수 있다.

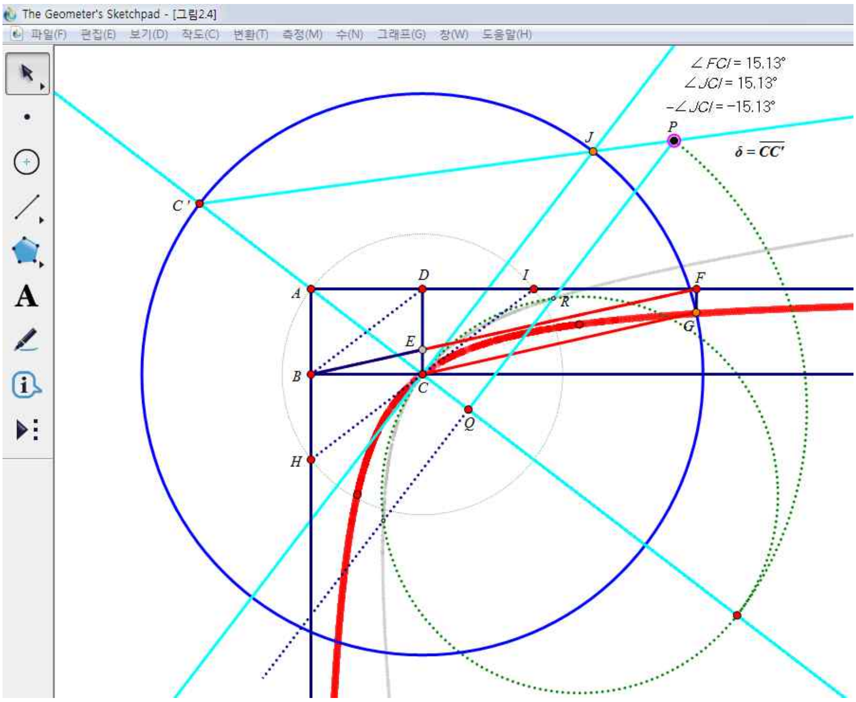
(2) 작도

여기서는 동적기하프로그램(GSP)으로 점 C를 지나고 직선 AD와 AB를 점근선으로 하는 쌍곡선을 작도하는 방법에 대해서만 설명하고 나머지 작도 과정은 생략하기로 한다.

먼저 점 A를 중심으로 점 C를 $180°$ 회전시킨 점 C'을 잡는다. 다음으로 점 C를 지나는 대각선 BD의 평행선이 직선 AB, AD와 만나는 점을 차례로 H, I라 한다. 이때

$$\overline{HI}^2 = \delta \cdot \overline{CC'}$$

을 만족하는 상수 δ를 직각삼각형에 관한 Euclid의 정리를 활용하여 찾는다. 이 경우의 $\delta = \overline{CC'}$ 임을 쉽게 알 수 있다.



[그림 2.4]

이제 점 C 에서 세운 직선 AC 의 수선위에서

$$\delta = \overline{CJ}$$

를 만족하는 점 J 를 잡은 후, 반직선 $C'J$ 위에 놓여있는 점 P 를 임의로 택한다. 다시 점 P 에서 직선 $C'C$ 에 내린 수선의 발을 Q 라 하여, 지름은

$$\overline{CQ} + \overline{QP}$$

이고 중심은 직선 $C'C$ 위에 놓여있는 반원을 그려 수선 PQ 와의 교점 R 을 잡는다[9]. 여기서 점 Q 를 중심으로 점 R 을 $\angle JCI$ 만큼 회전시킨 점 T 에 메뉴판에서 『[보기(D)]』를 선택한 후 『점의 흔적 남기기(T)』를 명령하고, 점 P 에는 메뉴판에서 『[보기(D)]』를 선택

9) 여기서 점 P 에는 메뉴판에서 『[보기(D)]』를 선택한 후 『점에 애니메이션 주기(A)』를 명령하고, 점 R 에는 메뉴판에서 『[보기(D)]』를 선택한 후 『점의 흔적 남기기(T)』를 명령하여 실행하면 점 C 를 지나는 쌍곡선을 얻을 수 있으나(위의 [그림 2.4]에서 굵은 선이 아닌 가는 선으로 표시된 쌍곡선), 직선 AD 와 AB 가 이 쌍곡선의 점근선은 아니다.

한 후 『점에 애니메이션 주기(A)』를 명령하여 실행하면, 우리가 찾는 쌍곡선을 얻을 수 있다(위의 [그림 2.4]에서 굵은 선으로 표시된 쌍곡선). 실제로 이 쌍곡선은 상수 δ 를 매개변수로 직선 CC' 을 직경으로 하며, 직선 AD 와 AB 를 점근선으로 갖는 쌍곡선임을 [9, Proposition 31, p. 56]로부터 알 수 있다.

(3) **증명**

점 G 를 지나고 직선 CD 에 평행인 직선이 반직선 AD 와 만나는 점을 F 라 하고, 선분 BF 와 CD 의 교점을 E 라 하면

$$\overline{FG} \cdot \overline{FA} = \overline{DC} \cdot \overline{DA}$$

가 성립한다([9, Proposition 34, p. 59]). 그런데

$$\overline{EC} \cdot \overline{FA} = \overline{DC} \cdot \overline{DA}$$

도 성립하므로 $\overline{EC} = \overline{FG}$ & $\overline{EC} // \overline{FG}$ 이다. 따라서 사각형 $ECGF$ 는 평행사변형이며, 더욱이

$$\overline{BF} = \overline{BE} + \overline{CG}$$

이다. ◆

2) 원호의 3등분을 이용한 방법

Pappus 가 생각한 두 번째 방법은 주어진 원의 한 호를, 쌍곡선에 관한 Apollonius 의 symptom을 이용해서, 3등분하는 것이다([12]).

Pappus의 두 번째 방법의 이해를 돕기 위해서 먼저 아래와 같은 보조정리[10]를 준비한다. 그런데 뒤의 '3)' 에서 서술할 Pappus의 세 번째 방법은 이 보조정리의 식 (2.3)으로부터 얻어진 것으로 예상된다.

보조정리 $\angle G = 2\angle A$ 인 $\triangle AGB$ 의 꼭짓점 B 에서 대변 AG 에 내린 수선의 발을

---

10) 이 보조정리는 다음에 소개하는 Pappus의 두 번째 해석과 세 번째 해석의 이해를 돕기 위해 편의상 준비한 것으로 Pappus 자신이 기술한 것은 아니다.

D 라 하고, $\overline{HG} = \dfrac{1}{3}\overline{AG}$ 를 만족하는 $\overline{AG}$ 상의 점 H 를 잡으면 등식

$$\overline{BD}^2 = 3\,\overline{AD}\cdot\overline{DH} \qquad \cdots\cdots\cdots \qquad (2.2)$$

가 성립한다. 또, $\angle G$ 의 이등분선과 $\overline{AB}$ 의 교점을 K 라 하고, $\overline{AG}$ 의 중점을 E 라 하면 $\overline{KE} \perp \overline{AG}$ 이고

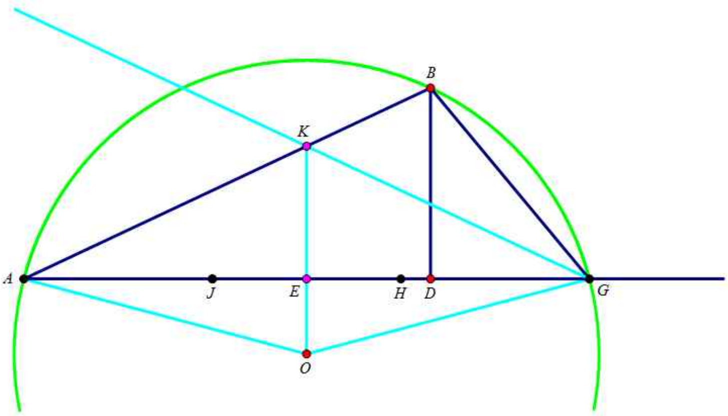
$$\overline{BG} = 2\,\overline{ED} \qquad \cdots\cdots\cdots \qquad (2.3)$$

이다.

보조정리의 증명 편의상 등식 (2.3)부터 보이기로 한다. 아래의 [그림 2.5]에서 $\overline{KG}$ 는 $\angle G$ 의 이등분선이므로

$$\overline{AG} : \overline{BG} = \overline{AK} : \overline{KB} \text{ (내각의 이등분선 정리)}, \quad \overline{KE} \perp \overline{AG}$$

이다.



[그림 2.5]

한편 $\overline{KE} \,//\, \overline{BD}$ 이므로

$$\overline{AE} : \overline{ED} = \overline{AK} : \overline{KB}$$

이다. 따라서

$$\overline{AE} : \overline{ED} = \overline{AG} : \overline{BG}$$

이며, $\overline{AG} = 2\overline{AE}$이므로 (2.3)이 성립한다.

다음으로 $\overline{AG}$의 남은 3등분점을 [그림 2.5]에서처럼 J라 하면 점 E는 $\overline{AG}$의 중점이므로

$$2\overline{EH} = \overline{JH} = \overline{HG}$$

이다. 직각삼각형 BDG에 Pythagoras 정리를 적용하고 (2.3)을 이용하여

$$\begin{aligned}\overline{BD}^2 &= \overline{BG}^2 - \overline{DG}^2 = 4\overline{ED}^2 - \overline{DG}^2 \\ &= (2\overline{ED} + \overline{DG})(2\overline{ED} - \overline{DG}) \\ &= \overline{AD} \cdot (2\overline{ED} - \overline{DG})\end{aligned}$$

를 얻을 수 있다. 그런데

$$2\overline{ED} - \overline{DG} = 2(\overline{EH} + \overline{HD}) - (\overline{HG} - \overline{HD}) = 3\overline{HD}$$

이므로 등식 (2.2)도 성립한다. ◆

지금부터 원호의 3등분선을 이용하여 Pappus가 보인 각의 3등분선 작도문제를 '(1)해석 (2)작도 (3)증명' 의 세 단계로 나누어 재해석하고 시각화하여 제시한다.

(1) 해석

주어진 $\angle AOG$에 대해서, 꼭짓점 O를 중심으로 하는 $\widehat{AG}$를 [그림 2.6]처럼 생각한다. 이때 $\angle AOG$의 3등분선이 $\widehat{AG}$와 만나는 교점을 B라 하고, 또 점 B에서 현 AG상에 내린 수선의 발을 D라 하면([그림 2.6] 참조).

$$\angle AGB = 2\angle BAG$$

이므로 위의 보조정리가 성립한다. 다시 말해서 $\widehat{AG}$의 현 AG상에 놓여있는 점 H로서

$$\overline{AH} = 2\,\overline{HG}$$

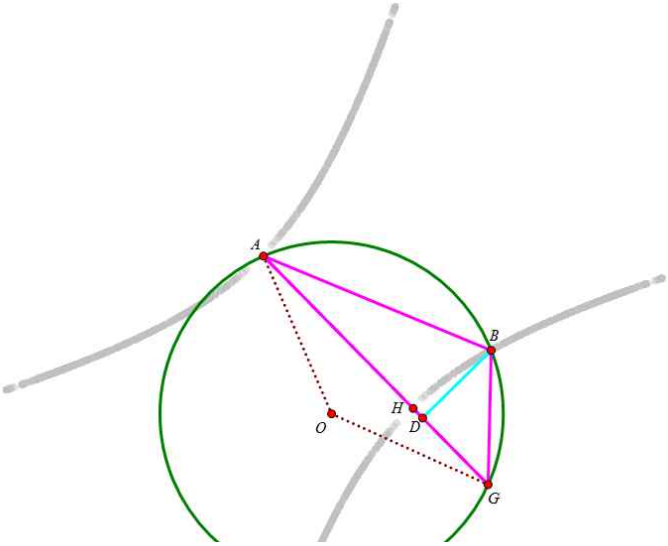
를 만족하는 것을 잡으면 등식 (2.2)로부터

$$\overline{BD}^2 : \overline{AD} \cdot \overline{DH} = 3\,\overline{AH} : \overline{AH}$$

가 성립하므로 점 B 는

점 H 를 꼭짓점 ; $\overline{AH}$ 를 횡단변 ; $3\,\overline{AH}$ 를 매개변수

인 쌍곡선위에 놓여있다([9, Proposition 8, p. 19 & Proposition 25, p.44]).



[그림 2.6]

(2) **작도**

동적기하프로그램(GSP)을 이용하여

점 H 를 꼭짓점 ; $\overline{AH}$ 를 횡단변 ; $3\,\overline{AH}$ 를 매개변수

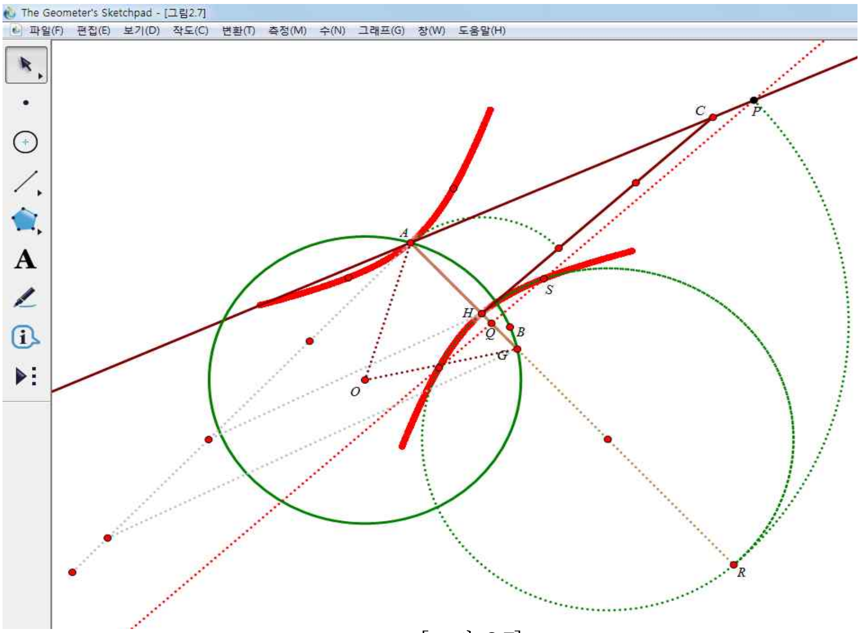
로 하는 쌍곡선을 다음과 같이 그릴 수 있다.

먼저 현 AG 의 3등분점 H, 즉 $\overline{AH} = 2\,\overline{HG}$ 를 만족하는 점 H 를 잡아, 점 H 에서 세

운 $\overline{AG}$의 수선 상에

$$\overline{HC} = 3\overline{AH}$$

를 만족하는 점 C를 택한다. 이때 반직선 AC위에서 임의로 점 P를 잡아, 점 P에서 현 AG에 내린 수선의 발 Q를 중심으로 하고 반지름의 길이를 $\overline{PQ}$로 하는 원을 그려 현 AG의 연장선과 만나는 점 R을 택한다. 여기서 $\overline{HR}$을 지름으로 하는 원을 그려 수선 PQ와의 교점 S를 잡아, 점 S에는 메뉴판에서 『[보기(D)]』를 선택한 후 『점의 흔적 남기기(T)』를 명령하고, 점 P에는 메뉴판에서 『[보기(D)]』를 선택한 후 『점에 애니메이션 주기(A)』를 명령하여 실행하면, 우리가 찾는 쌍곡선을 얻을 수 있다([그림 2.7] 참조).



[그림 2.7]

(3) 증명

먼저 아래의 [그림 2.8]에서처럼 현 AG의 중점 E에서 세운 $\overline{AG}$의 수직이등분선이 $\overline{AB}$와 만나는 점을 K라 한다. 이때

$$\begin{aligned}\overline{BD}^2 &= \overline{BG}^2 - \overline{DG}^2,\\ 3\overline{AD}\cdot\overline{DH} &= \overline{AD}\cdot\{2(\overline{EH}+\overline{HD}) - (\overline{HG}-\overline{HD})\}\\ &= \overline{AD}\cdot(2\overline{ED}-\overline{DG})\end{aligned}$$

$$= (2\overline{ED} + \overline{DG})(2\overline{ED} - \overline{DG})$$
$$= 4\overline{ED}^2 - \overline{DG}^2$$

이므로

$$\overline{BG} = 2\overline{ED}$$

이다. 한편 $\overline{KE} // \overline{BD}$ 이므로

$$\overline{AK} : \overline{KB} = \overline{AE} : \overline{ED}.$$

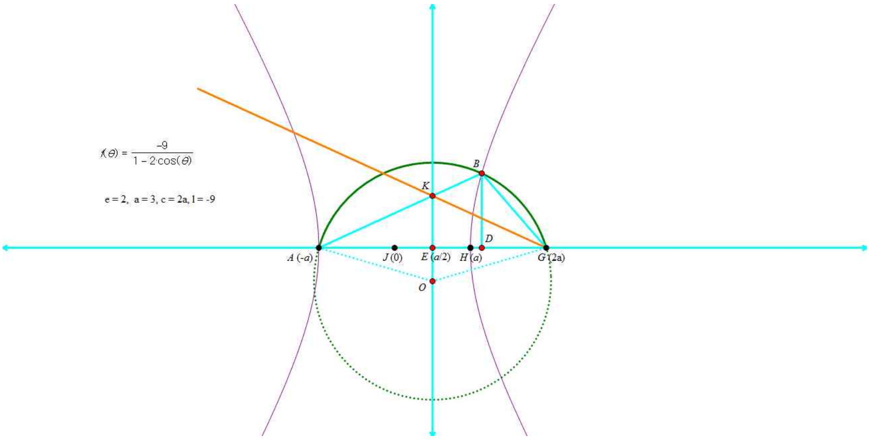
그런데 $\overline{AG} = 2\overline{AE}$, $\overline{BG} = 2\overline{ED}$ 이므로

$$\overline{AG} : \overline{BG} = \overline{AK} : \overline{KB}$$

가 성립하며, 이는 직선 GK 가 $\angle AGB$ 의 이등분선임을 말하고 있다[11]. 따라서

$$\angle BGA = 2\angle BAG$$

이다. 그러므로 $\angle AOB = 2\angle BOG$ 이며, 이로부터 선분 OB 는 원호 $\widehat{ABG}$ 를 3등분함을 알 수 있다.



[그림 2.8]

11) 내각, 외각의 이등분선 정리를 활용 하였다.

참고 $a := \overline{HG}$ 라 두면 이 쌍곡선의 매개변수 δ 는

$$\delta = 3\overline{AH} = 6a$$ 12)

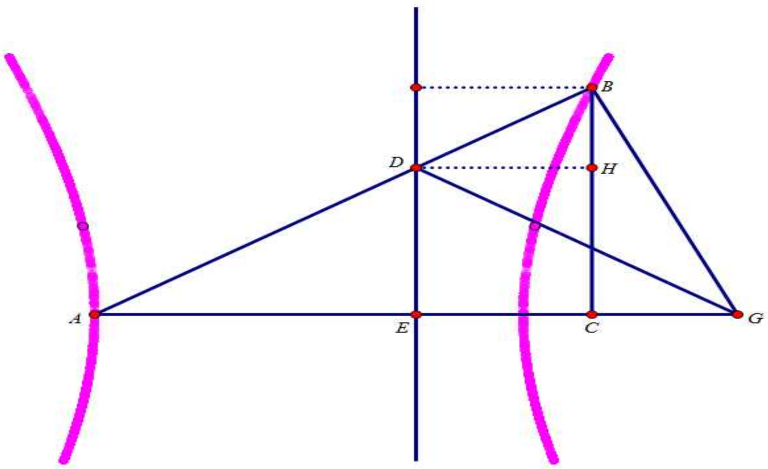
이므로, [그림 2.8]에서처럼 직선 AG 를 x 축, $\overline{AG}$ 의 수직이등분선을 y 축으로 하는 직교좌표축에서의 이 쌍곡선의 표준형은

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{3a^2} = 1$$

이다([2]). 따라서 초점의 좌표는 $(2a,\ 0)$, $(-2a,\ 0)$ 이고 이심률 $e = 2$ 이며, 더욱이 초점 $(2a,\ 0)$ 의 준선의 방정식은 $x = \dfrac{a}{2}$ 이다([5]).

3) 쌍곡선의 초점과 준선을 이용한 방법

Pappus는 원호의 3등분을 위해 사용한 쌍곡선을, 초점과 준선에 각각 이르는 거리의 비가 일정한 점의 자취로 얻음으로써 Apollonius의 symptom을 이용한 앞서의 방법과는 다른 또 하나의 방법을 제시했다([10]).



[그림 2.9]

12) 쌍곡선의 표준형 $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ 의 매개변수 $\delta = \dfrac{2b^2}{a}$ 이다([1]).

지금부터 쌍곡선의 초점과 준선을 이용하여 Pappus가 보인 각의 3등분선 작도문제를 ‘(1)해석 (2)작도 (3)증명’ 의 세 단계로 나누어 재해석하고 시각화하여 제시한다.

(1) **해석**

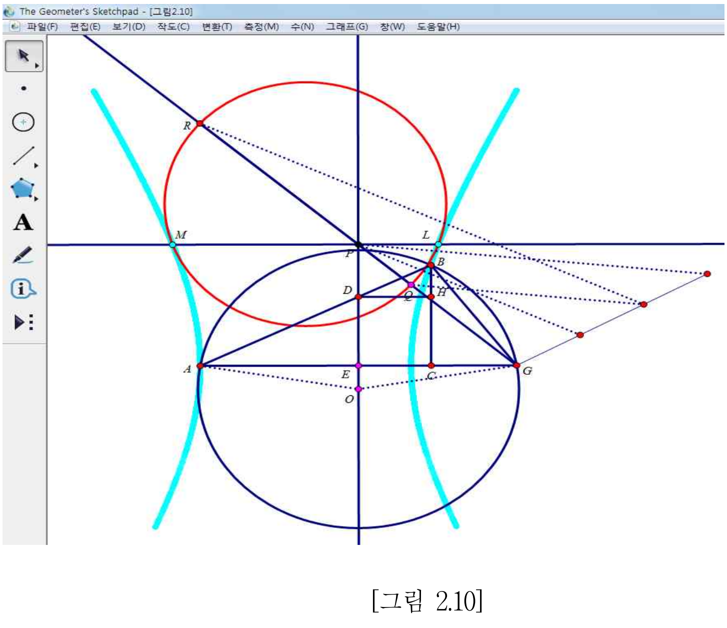
$\triangle AGB$ 에서 $\angle AGB = 2\angle BAG$ 라 한다. 아래의 [그림 2.9]처럼 $\angle AGB$ 의 이등분선이 변 AB 와 만나는 점을 D 라 하고, 점 D 와 B 에서 변 AG 에 각각 내린 수선의 발을 차례로 E, C 라 하면

$$\overline{BG} = 2\,\overline{CE}$$

이다((2.3) 참조). 그러므로 꼭짓점 B 는 초점 G 와 준선 DE 에 각각 이르는 거리의 비가 $2:1$ 인 쌍곡선위에 놓여있다[13]([그림 2.9] 참조).

(2) **작도**([5])

먼저 변 AG 의 수직이등분선상에서 점 P 를 임의로 택해, 선분 GP 를 $2:1$ 로 내분하는 점 Q 와 외분하는 점 R 을 잡아 $\overline{QR}$ 을 지름으로 하는 Apollonius′ circle 을 만들어, 점 P 에서 세운, $\overline{AG}$ 의 수직이등분선의, 수선과의 교점을 L, M 이라 한다.



[그림 2.10]

13) Pappus 는 주어진 점(초점, focus)에 이르는 거리와 주어진 직선(준선, directrix)에 이르는 거리의 비가 일정한 점의 자취는 원뿔곡선이며, 특히 이 비의 일정 값을 e라 할 때 $e=1$, $e>1$, $e<1$ 에 따라 차례로 포물선, 쌍곡선, 타원임을 증명하여 자신의 저서 『Collection, Ⅶ』에 실었다([10]).

여기서 점 L, M 에는 메뉴판에서 『[보기(D)]』를 선택한 후 『점의 흔적 남기기(T)』를 명령하고, 점 P 에는 메뉴판에서 『[보기(D)]』를 선택한 후 『점에 애니메이션 주기(A)』를 명령하여 실행하면

점 G 를 초점 ; $\overline{AG}$ 의 수직이등분선을 준선

으로 하는 쌍곡선으로, 더욱이 초점과 준선에 각각 이르는 거리의 비가 $2 : 1$ 인 것을 얻을 수 있다. 이때 이 쌍곡선과 원 O 의 교점이 우리가 찾는 점 B 이다([그림 2.10] 참조).

(3) 증명

[그림 2.9]에서처럼 변 AG 의 수직이등분선을 DE 라 하면 $\overline{AE} = \overline{EG}$ 이다. 또, 점 D 에서 $\overline{BC}$ 에 내린 수선의 발을 H 라 하면

$$\triangle BDH \backsim \triangle DAE$$

이므로

$$\overline{AD} : \overline{DB} = \overline{AE} : \overline{DH}$$

가 성립한다. 그런데 $\overline{AG} = 2\overline{AE}$, $\overline{BG} = 2\overline{DH}$ 이므로

$$\overline{AD} : \overline{DB} = \overline{AG} : \overline{BG}$$

이며, 이는 $\overline{GD}$ 가 $\angle AGB$ 의 이등분선임을, 즉

$$\angle BGA = 2\angle BAG$$

임을 말하고 있다.

Ⅳ. 결론 및 제언

본 논문에서 소개한 Pappus 의 일반각의 3등분선 작도문제에 관한 연구결과들은 그의 업적의 일부에 지나지 않으며, 주로 참고문헌 [8, 10, 11, 12] 중에서 간명하면서도 효율성이 높다고

생각되는 방법들을 엄선하여 고찰하고 배열하였으며, 작도방법을 보임에 있어서도 가급적 중등수학에서 소개하고 있는 초등기하적인 성질을 활용함으로써 교육현장에서의 활용성은 물론이고 교과내용의 역사 발생적 의미와 필연성의 한 사례를 보여줄 수 있을 것으로 생각한다.

2015 개정 수학과 교육과정에서는

"학생들은 수학과제 탐구 능력을 신장하는 것과 더불어 문제 해결, 추론, 창의·융합, 의사소통, 정보 처리, 태도 및 실천의 6가지 수학 교과 역량을 길러야 한다."

라고 제시하고 있다([1]). Pappus가 보인 일반각의 3등분문제 해결을 위해 이 결과들을 2015 개정 수학과 교육과정에서 강조하는 6가지 수학교과 역량과 연관지어볼 수 있을 것이다.

문제 해결을 위해 먼저 올바른 해석(추론)을 함으로써 3등분선의 작도 방법으로, Apollonius의 쌍곡선에 관한 symptom과 기존의 여러 정리(정보 처리)를 적절히 융합한, 독창(창의)적인 것을 찾아(창의 융합) 그 방법이 옳음을 주장(문제해결)하고 있다. 더욱이 Pappus는 그와 같은 자신의 결과를 저서 『Collection』에 수록함으로써(실천 및 태도) 각의 3등분문제와 연관된 다른 문제(예를 들어, 정구각형의 작도문제 등)에 직•간접적인 해결 방법을 제시하고 있을 뿐만이 아니라 2000여년의 세월이 지난 오늘날의 우리와도 동적기하프로그램을 이용한 시각화를 통해 의사소통을 하고 있다.

앞으로도 그러하겠지만 수학자들의 주옥같은 논문 한편 한편이 바로 수학과제 탐구 능력 신장 및 6가지 수학 교과 역량 강화를 가져올 수 있는 수학적 산물이라 해도 과언이 아니다. 그러나 중등수학에서는 교과내용의 한계점을 고려하지 않을 수 없으므로, 오히려 수학사를 통해 알려진 것 중에 중등수학의 교과내용 범위를 크게 벗어나지 않는 적합한 정리를 중등수학 교육과정에 맞게 재조명하여 제시하는 것도 "수학과제 탐구"의 새롭고 창의적인 지도 방법의 하나로 기대된다. 즉 본 논문에서 제시한 수학자 Pappus의 연구결과를 현행 교육과정에 부합하는 내용으로 재해석하고 그의 생각을 공학 도구를 사용하여 시각화하는 과정은 복잡하고 전문화되어 가는 미래 사회에서 학생들이 사회 구성원의 역할을 성공적으로 수행할 수 있고, 개인의 잠재력과 재능을 발현할 수 있으며, 수학의 필요성과 유용성을 이해하고, 수학 학습의 즐거움을 느끼며, 수학에 대한 흥미와 자신감을 기를 수 있는 수학교과 역량을 키울 수 있다는 점에서 의미가 있다.

특히 본 논문에서는 일반각의 3등분선 작도문제에 관한 Pappus의 주요 해법을 살펴보았으며, 그 과정에서 동적기하프로그램을 이용한 쌍곡선의 작도를 구체적으로 활용하였다. 강조하고 싶은 것은 Pappus가 제시한 방법을 확인하는 과정도 중요하지만, 구체적 조작과 활동을 통해 학생들은 직접 동적기하프로그램으로 구현해 보는 과정에서 알아야만 하는 초등기하적인 기본성질의 중요성과 아름다움을 스스로 체험할 수 있다는 점이다. 어떤 문제해결을 위해 먼저 그 문제에 제시된 조건에 맞는 적합한 그림을 그려본다는 것은 문제해결의 접근방향의 예상·실험·발견을 가능케 한다는 것은 누구도 부인하지 않을 것이다. 또, 교육과정을 통해 습득

한 도형에 관한 기본성질을 활용해서, 좌표평면상이 아니더라도, 동적기하프로그램을 통해 구현할 수 있다는 것을 체험해 볼 수 있는 경험은 수학의 유용성과 실용성을 느낄 수 있는 체험수학·실험수학의 한 장을 제공할 것이다.

참 고 문 헌

[1] 교육부, 수학과 교육과정, 교육부 고시 제2015-74호 [별책8].

[2] 김향숙 · 박진석 · 하형수, 이차곡선을 활용한 정칠각형에 관한 Abū Sahl의 작도법의 GSP를 통한 재조명, 한국수학교육학회지 시리즈 A 제 50 권 제 2 호(2011), 233-246.

[3] 김향숙 · 박진석 · 하형수, 원뿔곡선에 관한 Apollonius의 Symptoms 재조명과 시각화, 한국수학교육학회지 시리즈 A 제 52 권 제 1 호(2013), 83-95.

[4] 김향숙 · 박진석 · 이은경 · 이재돈 · 하형수, 중세 이슬람이 보인 입방배적문제 해결방법들의 재조명과 시각화, East Asian Mathematical J. 30(2014), 181-203.

[5] 박진석 · 김향숙, 해석기하학개론[제 2 판], 경문사, 2011.

[6] 박진석 · 김향숙, 수학사와 함께 떠나는 수학여행[제 1 판 2 쇄], 경문사, 2017 (2015년 세종도서 우수학술도서).

[7] 하형수, 원뿔曲線을 활용한 作圖不能問題의 再解析과 視覺化, 인제대학교 박사학위논문, 2017.

[8] Berggren, J. L., Episodes in the Mathematics of Medieval Islam, Springer-Verlag, New York, 1986.

[9] Heath, T. L., Apollonius of Perga : Treatise on conic sections-The conics of Apollonius, Cambridge : at the university press, 1896.

[10] Hogendijk, J. P., On the trisection of an angle and the construction of a regular nonagon by means of conic sections in medieval Islamic geometry, the 2nd International Symposium of the History of Arabic Science, to be held in Aleppo, Syria, 1979.

[11] Knorr, W., Textual Studies in ancient and medieval geometry, Birkhäuser, Basel/Boston, 1990.

[12] Sinclair, Nathalie M., Mathematical applications of conic sections in problem solving in ancient Greece and medieval Islam, Simon Fraser Univ. 1995.

Kim, Hyang Sook
Department of Applied Mathematics
& Institute of Natural Science
Inje University
Gimhae, 621-749 Korea

E-mail : mathkim@inje.ac.kr

Kim, Yang
Department of Applied Mathematics
Inje University
Gimhae, 621-749 Korea
E-mail : kimyang67@nate.com

Pak, Jin Suk
An Emeritus Professor
Kyungpook National University
Daegu, 609-736 Korea
E-mail : jspak@knu.ac.kr