

곡률 커플링 접촉각에 따른 접촉 강성 및 굽힘 강성해석

유용훈¹ · 조용주¹ · 이동현² · 김영철^{2,*}

¹부산대학교 기계공학부, ²한국기계연구원 시스템다이내믹스 연구실

Analysis of Contact Stiffness and Bending Stiffness according to Contact Angle of Curvic Coupling

Yonghun Yu¹, Yongjoo Cho¹, Donghyun Lee² and Young-Cheol Kim^{2,*}

¹Graduate School, Dept. of Mechanical Engineering, Pusan National University

²Dept. of System Dynamics, Korea Institute of Machinery and Material

(Received November 31, 2017; Revised January 12, 2018; Accepted January 13, 2018)

Abstract – Coupling is a mechanical component that transmits rotational force by connecting two shafts. Curvic coupling is widely used in high-performance systems because of its excellent power transmission efficiency and easy machining. However, coupling applications change dynamic behavior by reducing the stiffness of an entire system. Contact surface stiffness is an important parameter that determines the dynamic behavior of a system. In addition, the roughness profile of a contact surface is the most important parameter for obtaining contact stiffness. In this study, we theoretically establish the process of contact and bending stiffness analysis by considering the rough surface contact at Curvic coupling. Surface roughness parameters are obtained from Nayak's random process, and the normal contact stiffness of a contact surface is calculated using the Greenwood and Williamson model in the elastic region and the Jackson and Green model in the elastic-plastic region. The shape of the Curvic coupling contact surface is obtained by modeling a machined shape through an actual machining tool. Based on this modeling, we find the maximum number of gear teeth that can be machined according to the contact angle. Curvic coupling stiffness is calculated by considering the contact angle, and the calculation process is divided into stick and slip conditions. Based on this process, we investigate the stiffness characteristics according to the contact angle.

Keywords – GW model(GW 모델), Curvic coupling(곡률 커플링), contact stiffness(접촉 강성), bending stiffness(굽힘 강성), surface roughness(표면 거칠기)

Nomenclature

A_a : Apparent contact area (m^2) (겉보기 접촉면적)
 A_n : Normal contact area of rough surfaces (m^2)
(거친 표면의 수직 접촉면적)
 A_{op} : The orthogonal projected contact area onto $x-y$ plane (m^2) ($x-y$ 평면에 정사영 된 겉보기 접촉면적)

A_r : Real contact area (m^2) (실접촉면적)
 B : Hardness factor $0.454 + 0.41\nu$ (경도 지수)
 d : Separation of rough surfaces (m) (간극)
 $D_{extrema}$: The number of extreme values per unit length (#/m) (단위 길이당 극 값의 수)
 D_{peak} : The number of peak values per unit length (#/m) (단위 길이당 피크 값의 수)
 D_{zero} : The number of zero values per unit length (#/m) (단위 길이당 영점의 수)
 E : Equivalent Yong's modulus, (GPa)
(상당 탄성계수) $\frac{1}{E} = \frac{1-\nu_1}{E_1} + \frac{1-\nu_2}{E_2}$

*Corresponding author: kyc@kimm.re.kr
Tel: +82-42-868-7877, Fax: +82-42-868-7098
https://orcid.org/0000-0002-7317-1658
© 2018, Korean Tribology Society

- F : Contact load of single asperity (N)
(돌기 하나의 접촉력)
- FF : Contact load of rough surfaces (N)
(거친 표면의 접촉력)
- G : The equivalent bending stiffness between discs
(N·m/rad) (굽힘 강성)
- H : Material hardness (Pa) (재료 경도)
- I_x : The cross sectional moment of inertia of contact surfaces (m^4) (극관성모멘트)
- K : Total contact stiffness (N/m) (전체 접촉 강성)
- k : Contact stiffness per unit area (N/m^3)
(단위 면적 당 접촉 강성)
- M : Moment (N·m) (모멘트)
- m : Moment of power spectral density
(파워 스펙트럼 밀도의 모멘트)
- N : Total number of the asperities (#)
(총 돌기의 개수)
- R : Average radius of asperity (m) (평균 돌기 반경)
- Δ : Displacement (m) (변위)
- α : Contact angle (rad) (접촉각)
- ε : Interference of single asperity (m) (간섭량)
- ε_c : Critical interference of single asperity (m)
(임계간섭량)
- η : Density of asperities on nominal contact area
(#/m²) (돌기의 공간밀도)
- μ : Friction coefficient (마찰계수)
- ν : Poisson's ratio (프아송비)
- θ : Tilting angle (rad) (틸팅각)
- σ : Stress (Pa) (응력)
- ξ : Standard deviation of roughness surface height
(거친 표면의 높이 표준편차)
- ξ_s : Standard deviation of distribution of asperities heights (돌기 높이의 표준편차)
- Superscripts
- * : Dimensionless value (무차원 값)
- Subscripts
- E : Elastic (탄성)
- $E-P$: Elastoplastic (탄소성)
- n : Normal direction of contact area
(접촉면 수직방향)
- p : Perpendicular direction of contact area
(접촉면 수평방향)
- t : Wheel grinder machining tool

(휠-그라인더 가공 툴)

i : Inner (안쪽)

o : Outer (바깥쪽)

1. 서 론

커플링(Coupling)의 주된 역할은 축과 축을 연결하여 회전력을 전달하는 것으로 이 중 물림 커플링(Claw coupling)은 회전력 전달을 더욱 원활히 수행하기 위하여 기어 이의 물림을 이용하는 형태이다. 물림 커플링은 기어 이의 형상에 따라 다양한 종류가 있는데 그 중 대표적인 곡물 커플링(Cubic coupling)은 기계 가공과 교체가 쉬울 뿐 아니라 동력전달 효율이 뛰어나 항공기, 터빈 등의 고성능 시스템에 많이 사용된다.

곡물 커플링은 구조 강도 측면에서 설계는 물림 이의 굽힘응력, 면압, 전단응력 등으로 평가된다. 하지만 커플링은 클러치(Clutch)와 달리 작동 중 분리가 되는 부품이 아니므로 구조적 강도는 다른 기계요소보다 다소 덜 중요하게 여겨진다. 구조적 강도 외에 곡물 커플링을 평가하는 중요한 부분은 곡물 커플링을 사용함으로 발생하는 동특성 변화를 예측하는 것이다. 이 동특성 변화는 곡물 커플링 접합 접촉면에서 강성의 영향으로 전체 시스템의 강성이 변하여 발생한다. 접촉면에서의 강성의 영향은 접촉면을 누르는 압력이 아주 높을 경우 무시할 수 있으나 이 경우 커플링의 구조적 강도한계를 넘어설 수 있다. 적절한 압력에서는 표면의 프로파일이 접촉면의 강성에 중요한 변수가 된다.

곡물 커플링의 접촉면의 강성을 계산하고자 하면 한 쌍의 거친 평판에 대한 접촉 현상을 이해해야 한다. 거친 표면 간의 접촉에 대한 연구는 Nayak[1, 2]이 거친 표면의 랜덤프로세스를 통해 표면 거칠기 프로파일로부터 표면의 특성을 나타내는 변수를 분석하는 방법을 개발하면서 시작되었다. Nayak의 연구로부터 Greenwood와 Williamson[3]는 랜덤프로세스로 도출된 변수 중 돌기밀도, 돌기평균 곡률반경, 돌기 높이 표준편차 세 가지 값을 이용하여 거친 두 표면의 접촉문제를 같은 반경을 가지는 여러 개의 구로 이루어진 면과 평면의 접촉으로 등가하는 방법으로 접근한 모델을 만들어 많은 연구자가 이를 GW 모델이라 부르며 활용하고 있다. 하지만 GW 모델은 돌기들의 탄성변형만을 고려한 것으로 탄소성 변형의 영향을 고려하기 위하여 많은 연구가 수행되었다. KE(Kogut & Etsion) 모델에서는 유한요소해석을 기반으로 탄소성 변형을 고려하

였다[4]. JG(Jackson&Green) 모델에서는 KE 모델보다 큰 간섭량을 가질 때 재료 물성을 고려하였으며[5], Li[6]는 JG 모델을 정확도를 잃지않고 단순하게 계산하는 방법을 제시하였다.

접촉각을 가지는 곡률 커플링의 강성을 계산하기 위해서는 접촉면에 수직 방향 외에도 수평 방향의 마찰력 역시 고려해야 하는데 수평 방향의 강성에 대한 연구는 Mildlin에 의해 수행되었다[7].

이러한 선행연구를 바탕으로 접촉 표면의 강성을 기계 부품에서 고려한 사례로는 가스터빈 로터에 적용하여 많은 연구가 진행되고 있다. 그중 접촉 표면의 강성을 고려하여 시스템의 동특성 결과를 도출하고 실험과 비교하여 그 유효성을 확인한 연구들이 있으며[8, 9], Gao 등[10]은 접촉각을 고려하여 곡률 커플링의 강성을 계산하였다. 하지만 Gao의 결과는 전체의 동특성 계산에 초점이 맞춰진 연구로 곡률 커플링의 접촉을 정확히 반영하였다고 보기 어렵다.

이와 관련된 국내 연구로는 추효준 등[11]이 실제 거친 표면을 3차원 표면 조도기를 통해 측정된 데이터로부터 접촉 및 피로수명 해석을 수행하여 접촉피로 수명을 수치해석적으로 예측한 결과가 있으며, 김태완 등[12]은 거친 표면의 돌기 방향성에 따른 탄성 유체 윤활해석을 수행하였다. 하지만 거친 표면의 접촉면에서 접촉 강성에 대한 연구는 아직 수행된 바가 없다.

본 연구에서는 곡률 커플링의 접촉면에서의 접촉 및 굽힘 강성해석을 수행하는 프로세스를 이론적으로 정립하였으며 이를 평면 커플링(Plane coupling)과 비교하였다. 이 과정에서 표면 프로파일로부터 GW모델에 필요한 표면 거칠기 변수들을 계산하였다. 강성해석을 수행하기 위해서는 탄성영역에서 GW 모델을 이용하였고, 탄소성 영역에서 확장된 GW 모델을 이용하여 각 영역을 구분하여 계산하였다. 또한, 작동조건에 따라 고착(Stick) 영역과 미끄러짐(Slip) 영역을 구분하여 식을 전개하였다. 곡률 커플링의 접촉면 형상은 실제 휠-그라인더 가공 톨에 의해 가공된 형상을 모델링하였으며[13], 이로부터 접촉각에 따라 최대 가공 가능한 기어 이수를 찾았다. 이를 바탕으로 접촉각에 따른 강성 특성을 살펴보았다.

2. 연구방법 및 내용

2-1. 거친 표면의 Random process(공간적 분포)

본 연구에서는 랜덤 프로세스 이론을 바탕으로 2차

원의 등방성 정규분포 특성을 가지는 거친 표면을 모델링한 Nayak의 연구 결과를 이용 하였다[1, 2]. GW 모델 접촉해석에 필요한 표면의 세가지 특성인 돌기 높이 분포의 표준편차 ξ , 평균 돌기 반경 R , 돌기의 공간 밀도 η 는 표면의 파워 스펙트럼 밀도의 모멘트로부터 구할 수 있다. Nayak에 의해 유도된 균질한 등방성 표면의 파워 스펙트럼 밀도의 모멘트는 식 (1)과 같다.

$$\begin{aligned} m_0 &= \xi^2 \\ m_2 &= (\pi\xi D_{zero})^2 \\ m_4 &= \pi^4 (\xi D_{zero} D_{extrema})^2 \end{aligned} \tag{1}$$

여기서, zeros D_{zero} 는 거친 표면 프로파일의 단위 길이당 영점(zero)을 지나는 점의 수이고 extrema (maxima and minina) $D_{extrema}$ 는 단위 길이당 극 값의 수이다.

2-1-1. 돌기 높이 분포의 표준편차, ξ

거친 표면 높이 분포의 표준편차 ξ 와 돌기 높이 분포의 표준편차 ξ_r 의 관계는 식 (2)와 같다.

$$\begin{aligned} \xi_a &= \left(1 - \frac{0.8968}{\beta}\right) m_0^{1/2} = \left(1 - \frac{0.8968}{\beta}\right) \xi_r \\ \text{where, } \beta &= \left(\frac{D_{extrema}}{D_{zero}}\right)^2 \end{aligned} \tag{2}$$

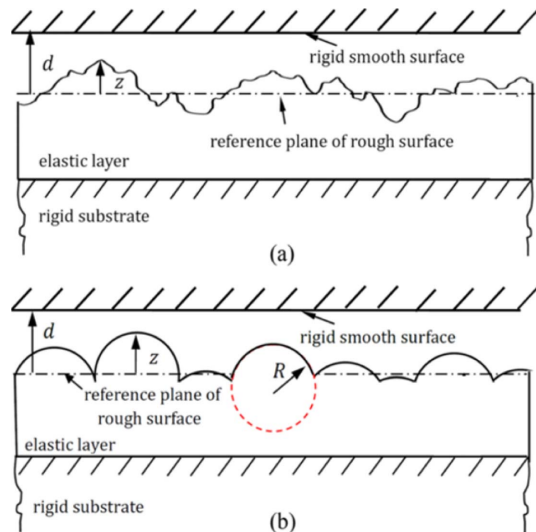


Fig. 1. Contact between a rigid smooth surface and a randomly rough elastic surface in (a) a real case and (b) a simplified model (GW model) [14].

돌기 높이 분포의 표준편차는 평판과 거친 표면 기준면 사이의 거리 d 를 결정하는 중요한 특성이 된다 (Fig. 1).

2-1-2. 평균 돌기 반경, R

GW모델에서 모든 돌기들은 동일한 곡률 반경을 가진다고 가정한다. 거친 평판에서 평균 돌기 반경 R 을 가진 수많은 돌기가 랜덤하게 분포되어 있다(Fig. 1).

$$R = \frac{3}{8} \sqrt{\frac{\pi}{m_4}} \tag{3}$$

2-1-3. 돌기의 공간 밀도, η

단위 면적 내에 돌기가 얼마나 분포하고 있는지를 나타낸다. 두 표면이 접촉할 때, 접촉 돌기 수를 결정하는 중요한 특성이 된다.

$$\eta = \frac{1}{6\pi\sqrt{3}} \cdot \frac{m_3}{m_2} \approx 1.2 D_{peak}^2 \tag{4}$$

2-2. Greenwood-Williamson 접촉 모델(GW model)

가공에 의해 형성된 금속의 표면을 육안으로 볼 때는 매우 매끄러운 것처럼 보이나 어떤 표면이든지 확대하여 보면 산과 골로 형성된 표면 거칠기를 가지고 있다. 이러한 거칠기 형상을 가진 두 물체가 접촉하여 하중이 가해질 때 외관상으로 이 접촉상태를 볼 때는 전체적으로 접촉이 일어나는 것 같으나 그 외관상 접촉면적을 미시적으로 살펴보면 Fig. 2에서 볼 수 있듯이 양 표면의 표면 거칠기(표면 돌기)와 파형으로 인해 많은 접합부에서 국부적인 접촉이 일어남을 알 수 있다. 이때 외관상으로 보았을 때의 접촉면적을 겉보기 접촉면적 A_a 이라 하고 실제로 접촉이 일어나는 면적을 실접촉면적 A_r 이라 하면, 일반적으로 $A_a \gg A_r$ 의 관계가 성립된다. 또한, 실접촉면적은 접촉 표면의 변형상태(탄성변형 또는 소성변형)에 관계없이 부가된 하중에 비례한다. 실접촉 면적율(A_r/A_a)은 낮은 하중에

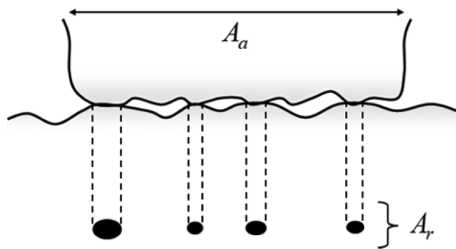


Fig. 2. Real contact area and apparent contact area.

서는 하중이 증가함에 따라 실접촉 면적율이 선형적으로 증가하지만 높은 하중에서는 돌기들의 탄성작용의 영향에 의해 선형적인 관계가 나타나지 않는다.

이러한 거친 표면의 접촉 특성은 접촉강성을 변화시킬 뿐 아니라 이로 인해 굽힘 강성이 변하게 된다. 로터 등의 동특성 해석 시 커플링의 강성을 계산하는 것은 해석의 입력 값이 되므로 동특성 해석을 정확히 수행하는 것만큼 중요하다.

2-2-1. 탄성 접촉 강성 (GW 모델)

두 개의 거친 표면의 접촉을 Fig. 1(a)와 같이 어떤 기준면 이상으로 z 의 높이를 갖는 거친 탄성면(rough elastic surface)과 경한 평판(rigid smooth surface)의 접촉으로 등가 한다. 이 거친 표면은 다시 한번 Fig. 1(b)와 같이 총 N 개의 동일한 곡률 반경 R 을 가지는 구형 돌기들로 구성된 탄성면과 경한 평판의 접촉으로 가정한다.

여기서 돌기의 높이 분포는 식 (5)와 같이 정규분포를 가진다고 가정한다.

$$\phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\xi_a} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{z}{\xi_a}\right)^2} \tag{5}$$

돌기의 높이가 z 와 $z+dz$ 사이에 존재할 확률은 돌기 높이의 분포함수 $\phi(z)$ 를 사용하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\phi(z)dz \tag{6}$$

참고로 무차원 정규분포는 식 (7)로 표현되며, 표준화 변수 $s = z/\xi_a$ 를 이용하면 식 (8)이 성립한다.

$$\phi^*(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}s^2} \tag{7}$$

$$\phi(z)dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\xi_a} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{z}{\xi_a}\right)^2} dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}s^2} = \phi^*(s)ds \tag{8}$$

각각의 돌기들은 Hertz 접촉 거동을 보인다고 가정하면 단위 면적당 접촉력은 식 (9)와 같이 나타낼 수 있다.

$$dF = \frac{4}{3} E' R^{1/2} u^{2/3} dn = \frac{4}{3} E' R^{1/2} (z-d)^{2/3} \phi(z)dz \tag{9}$$

따라서, d 보다 큰 돌기 높이 z 에 대해 접촉이 일어날 확률은 적분식 (10)으로 표현할 수 있고,

$$prob(z > d) = \int_d^\infty \phi(z)dz \tag{10}$$

접촉점의 수는 식 (11)이 된다.

$$n = N \int_0^c \phi(z) dz \quad (11)$$

마찬가지로 실제 접촉면적, 돌기 하나의 접촉력, 무차원 정규분포를 이용한 전체 접촉력, 단위 면적당 수직 접촉 강성은 각각 식 (12-15)와 같이 표현된다.

$$A_r = \pi N R \xi_a \int_0^c (z-d) \phi(z) dz \quad (12)$$

$$F_{nE} = \frac{4}{3} E' R^{1/2} \int_0^c (z-d)^{3/2} \phi(z) dz \quad (13)$$

$$FF_{nE} = \frac{4}{3} \eta A_n E' R^{1/2} \xi_a^{3/2} \int_0^c (s-h)^{3/2} \phi^*(s) ds \quad (14)$$

where, $h = d / \xi_a$

$$k_{nE} = 2\eta E' R^{1/2} \xi_a^{1/2} \int_0^c (s-h)^{1/2} \phi^*(s) ds \quad (15)$$

2-2-2. 탄소성 접촉 강성

헤르츠 식에 의해 하나의 돌기의 탄성변형에 의한 접촉력 F_{nE} 은 식 (13) 간섭량 ε 과 관련된 식인 식 (16)과 같이 나타낼 수 있다[8].

$$F_{nE} = \frac{4}{3} E' R^{1/2} \varepsilon^{3/2} \quad (16)$$

간섭량 ε 가 커져 임계 간섭량 ε_c 를 넘어서면, 응력이 재료의 항복응력을 넘어서며 소성변형이 발생한다. Kogut and Etsion에 의한 유한요소해석에 의하면, 탄소성변형 영역에서의 접촉력은 다음과 같이 표현된다[3].

$$\begin{aligned} F_{nE-P} &= F_{nE} \times 1.03 (\varepsilon / \varepsilon_c)^{0.425} \quad \text{at } \varepsilon_c \leq \varepsilon \leq 6\varepsilon_c \\ F_{nE-P} &= F_{nE} \times 1.40 (\varepsilon / \varepsilon_c)^{0.263} \quad \text{at } 6\varepsilon_c \leq \varepsilon \leq 110\varepsilon_c \end{aligned} \quad (17)$$

여기서, 임계간섭량은

$$\varepsilon_c = \left(\frac{\pi B H}{2E} \right)^2 R \quad (18)$$

이며, B 와 H 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} B &= 0.454 + 0.41\nu \\ H &: \text{material hardness [Pa]} \end{aligned} \quad (19)$$

110 ε_c 이상의 간섭량에 대해서는 Jackson and Green 이 제시한 모델을 사용한다. 이 JG 모델은 탄소성 변형에서 완전소성 변형까지의 범위에 대해 표현하고 있다.

L. Li에 의해 단순화된 JG모델에 의한 간섭량-접촉력 관계식은 다음과 같다[4].

$$F_{sJG} = F_{nE} \times 4.6C(v) \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_c} \right) \quad (20)$$

$$\text{where, } C(v) = \frac{8.88 - 10.13(v^2 + 0.089)}{6.82 - 7.83(v^2 + 0.586)}$$

이와 같이 간섭량 ε 과 접촉력의 관계식은 간섭량 ε 의 크기에 따라 다르며, 각 간섭량 구간에 따른 접촉력 모델과 돌기 높이의 확률분포를 고려하면, 미소 표면에서의 전체 접촉력 및 접촉강성은 다음과 같다[8].

$$\begin{aligned} FF_{nE-P} &= \frac{4}{3} \eta A_n E' \xi_a^{3/2} \left[\begin{aligned} &\delta^{-1.5} \int_h^{h+\delta} (s-h)^{1.5} \phi^*(s) ds \\ &+ 1.03 \delta^{-1.425} \int_{h+\delta}^{h+6\delta} (s-h)^{1.425} \phi^*(s) ds \\ &+ 1.40 \delta^{-1.263} \int_{h+6\delta}^{h+110\delta} (s-h)^{1.263} \phi^*(s) ds \\ &+ 4.6C(v) \int_{h+110\delta}^c (s-h) \phi^*(s) ds \end{aligned} \right] \quad (21) \end{aligned}$$

where, $\delta = \varepsilon_c / \sigma$

$$\begin{aligned} k_{nE-P} &= \frac{4}{3} \eta E' R^{1/2} \xi_a^{1/2} \left[\begin{aligned} &1.5 \delta^{-0.5} \int_h^{h+\delta} (s-h)^{0.5} \phi^*(s) ds \\ &+ 1.03 \times 1.425 \delta^{-0.425} \int_{h+\delta}^{h+6\delta} (s-h)^{0.425} \phi^*(s) ds \\ &+ 1.40 \times 1.263 \delta^{-0.263} \int_{h+6\delta}^{h+110\delta} (s-h)^{0.263} \phi^*(s) ds \\ &+ 4.6C(v) \int_{h+110\delta}^c \phi^*(s) ds \end{aligned} \right] \quad (22) \end{aligned}$$

2-3. 접촉 및 굽힘강성 (평면 커플링 모델)

2-3-1. 접촉 강성

평면 커플링 모델은 접촉면에 수직으로 하중이 작용하여 전체 모델의 수직 방향(z 방향)과 접촉면의 수직 방향(n 방향)이 같으므로 GW모델을 그대로 적용할 수 있다.

2-3-2. 굽힘 강성

평면 커플링 모델에서 접촉면에 작용하는 수직 응력을 σ_n 이라 하면, 미소 면적에 작용하는 힘은 식 (23)과 같다.

$$\begin{aligned} dF_n &= \sigma_n dA_n \\ &= k_n \Delta_z dA_n = k_n \theta y dA_n \\ \therefore F_z &= F_n \end{aligned} \quad (23)$$

그러므로 미소영역에 대한 모멘트는 식 (24)와 같으며 전체 모멘트는 식 (25)가 된다.

$$dM = ydF_n = k_n \theta y^2 dA_n \quad (24)$$

$$M = k\theta \int y^2 dA_n = k_n I_x \theta \quad (25)$$

그러므로 굽힘 강성은 식 (26)와 같이 정의된다.

$$G = k_n I_x \quad (26)$$

2-4. 접촉 및 굽힘강성 (곡률 커플링 모델)

2-4-1. 접촉면적 및 극관성모멘트

곡률 커플링은 Figs. 3-5에서 볼 수 있듯이 Convex와 Concave가 하나의 쌍을 이루어 접촉하게 된다. 여기서 접촉면의 형상은 휠-그라인더(Wheel-grinder)가 지나간 경로를 따라 만들어 지고 이는 원뿔의 일부 면이 된다. Fig. 6에서 볼 수 있듯이 가

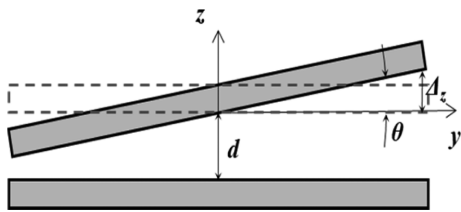


Fig. 3. Gap, displacement and tilting angle.



Fig. 4. Curvic coupling teeth (Concave and Convex).

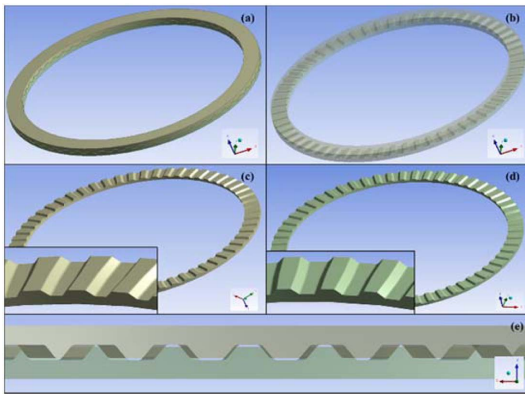


Fig. 5. Curvic coupling contact (a) Total solid view (b) Total shaded exterior view (c) Concave (d) Convex (e) x-z plane view.

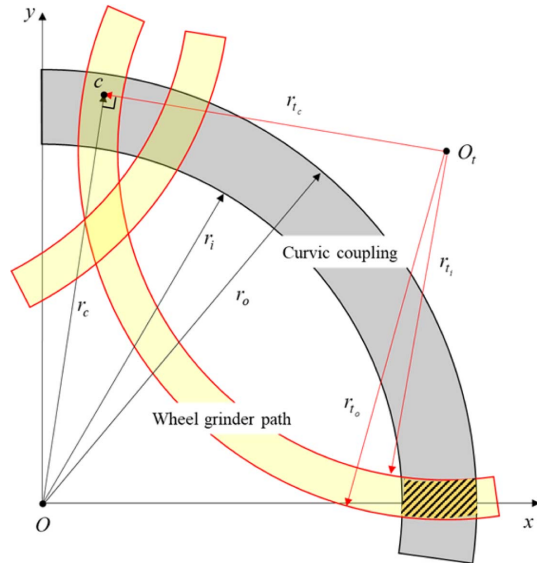


Fig. 6. Curvic coupling teeth and Wheel grinder path.

공 틀이 그리는 경로의 반경 r_c 를 가지는 중심원은 $x-y$ 평면 내 임의의 c 점에서 수직으로 만난다. 곡률 커플링 형상을 결정하는 중요요소는 c 점에서부터 모델 중심 O 점 까지 거리 r_c 와 c 점에서 가공 톨 중심 O_i 점 까지 거리 r_i 가 있다. 또한, 압력각 α 기어 이 수 n_g 와 가공 톨이 접촉 면을 가공하는 폭 $b(=r_o-r_i)$ 로부터 곡률 커플링 형상이 결정된다. Fig. 6에 기어 이 접촉면 하나에 대한 정사영된 접촉면을 빗금으로 표시하였다. 하나의 기어 이는 두 개의 접촉면을 가지고 있고, 전체 기어 이 수 만큼 굽해주면 정사영 된 접촉면적 A_{op} 를 구할 수 있다. A_{op} 가 구해지면 식 (27)로부터 수직 접촉면적 A_n 을 구할 수 있다.

$$A_n = A_{op} / \sin \alpha \quad (27)$$

곡률 커플링 모델의 극관성모멘트는 A_{op} 로 정의 된 영역에서 식 (28)을 이용하여 구할 수 있다.

$$I_x = \int_{A_{op}} y^2 dA_{op} \quad (28)$$

2-4-2. 접촉 강성

곡률 커플링 모델은 접촉면이 전체 모델의 수직 하중 F_z 에 경사각을 가지고 있으므로 접촉면의 수직 하중과 수평하중을 모두 고려해야 한다. 경사각으로 인한 변위와 압력의 접촉면 수직방향 및 수평방향, 전체모델 수직방향 (z 방향)의 관계를 Fig. 7에 도시

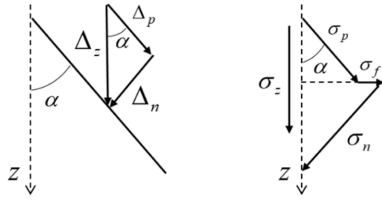


Fig. 7. The direction of displacements and stresses.

하였다.

z 축 변위 Δz 가 있을 때, 접촉면 수직 변위 Δ_n 와 수평 변위 Δ_p 의 관계는 다음과 같다.

$$\Delta_n = \Delta_z \sin \alpha \quad (29)$$

$$\Delta_p = \Delta_z \cos \alpha = \Delta_n / \tan \alpha \quad (30)$$

한편, GW 모델로부터 단위면적 당 접촉강성 k_n 을 탄성일 경우 식 (15) 탄소성일 경우 식 (22)로 구할 수 있으며, 식 (29)로부터 접촉면에 작용하는 접촉압력을 계산할 수 있다.

$$\sigma_n = k_n \Delta_n \quad (31)$$

한편, x - y 평면 상에 작용하는 응력 σ_p 는 z 축 방향으로 회전력을 발생시키지만 곡률 커플링 접촉에서 기어 이 하나의 두 개의 접촉면에서 서로 반대 방향의 회전력이 발생하므로 이는 상쇄된다.

수평응력 σ_p 는 no-slip영역과 slip영역으로 나누어서 구할 수 있다. Mindlin은 no-slip 조건에서 Hertz 구 모델에서의 접촉강성과 수평강성의 관계를 식 (32)와 같음을 밝혔다.

$$\frac{k_p}{k_n} = \frac{2(1-\nu)}{2-\nu} \quad (32)$$

Slip 조건에서는 마찰력 이상의 힘이 발생하지 않는다. 그러므로 수평응력은 식 (33)과 같다.

$$\begin{aligned} \sigma_p &= k_p \Delta_p & \text{at } \sigma_t \leq \mu \sigma_n \\ \sigma_p &= \mu \sigma_p = \mu k_p \Delta_p \end{aligned} \quad (33)$$

경사각을 고려하여 z 방향 응력은 식 (34)가 되며,

$$\sigma_z = \sigma_n \sin \alpha + \sigma_p \cos \alpha \quad (34)$$

전체 모델 하중 F_z 와 단위면적 당 접촉 수직 강성 및 전체 수직 접촉강성은 각각 식 (35-37)과 같이 나타낼 수 있다.

$$F_z = \sigma_z A_n = (\sigma_n \sin \alpha + \sigma_p \cos \alpha) A_n \quad (35)$$

$$k_z = \frac{d\sigma_z}{d\Delta_z} = \begin{cases} k_n \sin^2 \alpha + k_p \cos^2 \alpha & \text{at no-slip} \\ k_n \sin \alpha (\sin \alpha + \mu \cos \alpha) & \text{at slip} \end{cases} \quad (36)$$

$$K_z = k_z A_n \quad (37)$$

2-4-3. 굽힘 강성

곡률 커플링 모델에서 접촉면에 작용하는 수직방향 응력은 σ_z 이고, 미소 면적에 작용하는 힘은 식 (38)과 같다.

$$\begin{aligned} dF_z &= \sigma_z dA_n = (k_n \Delta_n \sin \alpha + \sigma_p \cos \alpha) \frac{dA_{op}}{\sin \alpha} \\ &= (k_n \Delta \sin^2 \alpha + \sigma_p \cos \alpha) \frac{dA_{op}}{\sin \alpha} \\ &= \left(k_n \Delta \sin \alpha + \sigma_p \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \right) dA_{op} \end{aligned} \quad (38)$$

이로부터 미소 모멘트 및 전체 모멘트는 각각 다음과 같다.

$$\begin{aligned} dM &= y dF = y \left(k_n \Delta \sin \alpha + \sigma_p \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \right) dA_{op} \\ \text{at no-slip} \\ &= y \left(k_n \Delta \sin \alpha + k_p \Delta_p \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \right) dA_{op} \\ &= y \Delta \left(k_n \sin \alpha + k_p \frac{\cos^2 \alpha}{\sin \alpha} \right) dA_{op} \\ &= y^2 \theta \left(k_n \sin \alpha + k_p \frac{\cos^2 \alpha}{\sin \alpha} \right) dA_{op} \\ \text{at slip} \\ &= y \left(k_n \Delta \sin \alpha + \mu k_n \Delta_n \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \right) dA_{op} \\ &= y \Delta \left(k_n \sin \alpha + \mu k_n \sin \alpha \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \right) dA_{op} \\ &= k_n y^2 \theta (\sin \alpha + \mu \cos \alpha) dA_{op} \end{aligned} \quad (39)$$

$$\begin{aligned} \text{at no-slip} \\ M &= \left(k_n \sin \alpha + \frac{k_p \cos^2 \alpha}{\sin \alpha} \right) \int_{A_{op}} y^2 dA_{op} \theta \\ \text{at slip} \\ M &= k_n (\sin \alpha + \mu \cos \alpha) \int_{A_{op}} y^2 dA_{op} \theta \end{aligned} \quad (40)$$

그러므로 굽힘 강성은 식 (41)과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned} \text{at no-slip} \\ G_{eq} &= \left(k_n \sin \alpha + \frac{k_p \cos^2 \alpha}{\sin \alpha} \right) \int_{A_{op}} y^2 dA_{op} \\ \text{at slip} \\ G_{eq} &= k_n (\sin \alpha + \mu \cos \alpha) \int_{A_{op}} y^2 dA_{op} \end{aligned} \quad (41)$$

3. 결과 및 고찰

3-1. 표면 파라미터 분석 결과

표면 파라미터 값을 도출하기 위해 실제 Tie bolt fastened rotor에 사용되는 커플링의 접촉 표면을 3d 표면 거칠기 측정기를 통해 측정하였다. 1차 형상오차(shape error)와 2차 형상오차(waviness)의 필터링은 ISO 필터링 규격을 따라 진행하였다[15]. 접촉표면의 거칠기는 Fig. 8과 같으며, 이로부터 계산된 표면 파라미터 결과는 Table 1과 같다.

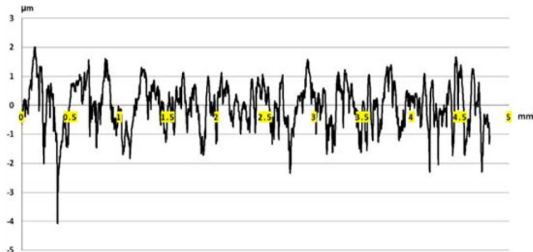


Fig. 8. Roughness analysis result of contact surface.

Table 1. Surface parameters

Properties	Value
D_{zero} (#/m)	33,337
$D_{extrema}$ (#/m)	224,607
ξ (μm)	0.549
R (μm)	11.59
η (10^7 #/m ²)	1525.0
ξ_a (μm)	0.761

Table 2. Analysis condition

Type	Properties	Value
Material	Young's modulus (GPa)	201
	Poisson's ratio	0.3
	Material hardness (HV)	300
Operating condition	F (N)	50,000
	μ	0.2
Shape	r_i (mm)	180
	r_o (mm)	200
	Addendum (mm)	2
	Dedendum (mm)	2

3-2. 접촉각에 따른 커플링 접촉 강성 및 굽힘 강성 해석결과

3-2-1. 커플링 최대 기어 이수

Table 2에 해석 모델의 재료물성, 작동조건, 커플링 유효 단면 형상을 나타내었다. 곡률 커플링은 가공 조건과 접촉각에 따라 기하학적 조건에 의해 커플링 유효 단면 내에 최대로 가공할 수 있는 기어 이수가 다르다. Table 2에 표현된 해석 조건 중 어덴덤(Addendum) 및

Table 3. Machining condition of Curvic coupling

Properties	Value
r_c (mm)	190
r_t (mm)	200

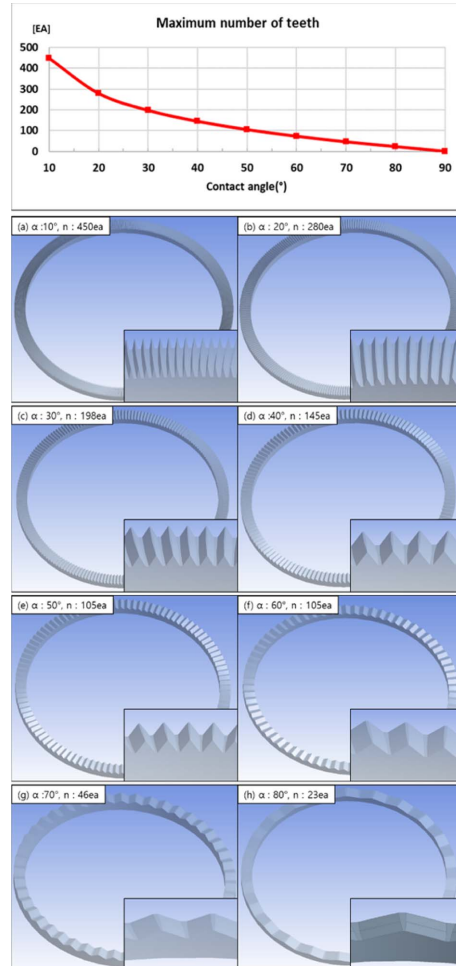


Fig. 9. Maximum number of teeth and tooth shape with contact angle.

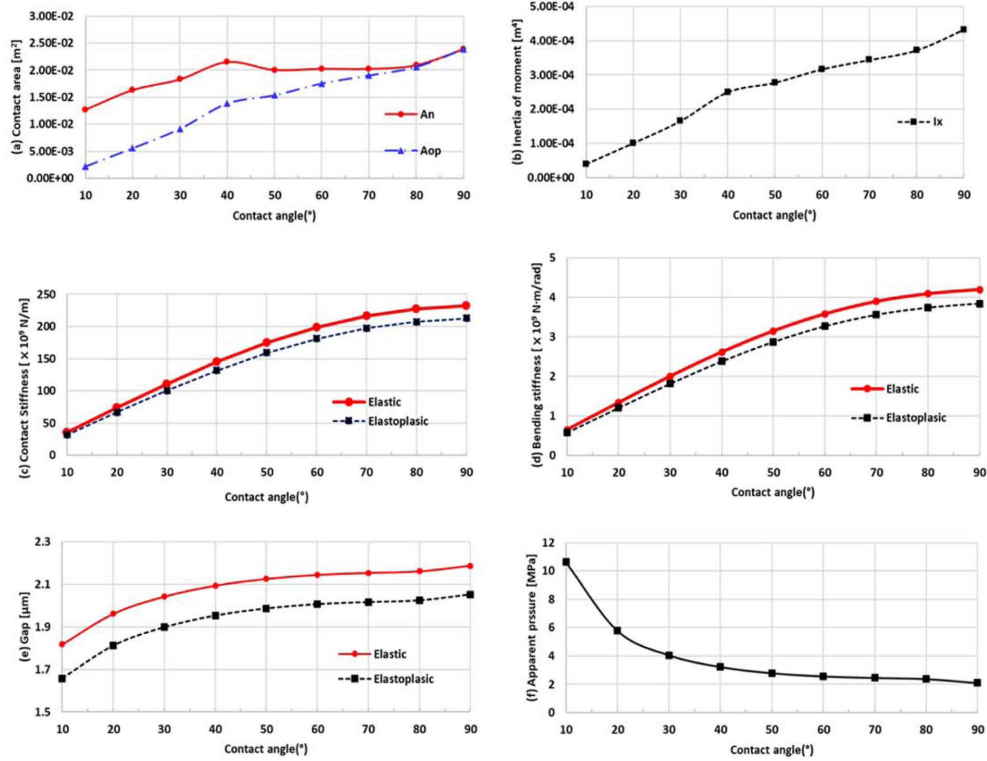


Fig. 10. Analysis results with contact angle.

디텐덤(Dedendum)은 그 합이 접촉부의 높이를 의미하여 대부분 제한된 값을 가지고 있으므로 곡률 커플링 형상 설계변수가 아닌 설계조건이 된다. 반면, Table 3에 표현된 가공 조건인 r_c , r_i 와 접촉각은 곡률 커플링 형상을 결정하는 설계변수이다. 여기서 접촉각이 가장 큰 영향을 미치는 설계변수 이므로 임의의 r_c 와 r_i 에 대하여 접촉각의 변화에 따라 가공할 수 있는 최대 기어 이수를 형상 모델링을 수행하여 계산하였으며 이를 Fig. 9에 표현하였다. 접촉각이 증가할수록 최대 이수가 급격히 감소하며 접촉각이 작을 때 곡률 커플링은 날카로운 이를 가지는 것에 비해 접촉각이 커지면 이가 무디어지는 것을 확인 할 수 있다. 여기서, 접촉각 90°는 평평한 접촉면으로 평면 커플링 모델을 의미한다.

3-2-2. 접촉 강성 및 굽힘 강성

접촉각에 따른 해석 결과를 Fig. 10에 도시하였다. 두 가지 다른 모델을 비교하면 접촉각의 영향으로 곡률 커플링 모델이 평면 커플링 모델보다 작은 강성을

가진다. 곡률 커플링 모델은 Fig. 9에서 볼 수 있듯이 접촉각이 감소할수록 전체적으로 커플링 유효 단면 내에서 기어 이빨 및 이뿌리에 의해 생성되는 접촉하지 않는 불필요한 부분이 차지하는 면적이 증가하여 유효 수직 접촉면적이 감소하므로 극관성모멘트와 접촉 및 굽힘 강성 모두 감소하게 된다. 접촉각이 가장 작은 10°의 경우 평면 커플링 모델에 비해 곡률 커플링 모델의 강성이 약 15%로 감소하였다. 해석방법에 따라서는 탄소성 영역에서 강성 값이 탄성 영역에서 강성 값보다 작았다. 접촉각이 커질수록 해석방법에 따른 강성 차이가 크며 평면 커플링 모델에서 약 90%로 그 차이가 가장 크게 나타났다(Fig. 10(a)-(d)).

Fig. 10(e)에 접촉각에 따른 접촉면의 간극을 나타냈다. 평면 커플링 모델에서 하중이 커질수록 접촉강성이 커지며 간극은 작아지게 되지만 곡률 커플링 모델에서는 수직방향 접촉강성이 작아지더라도 Fig. 10(f)에서 볼 수 있듯이 접촉면의 압력이 커지게 되므로 간극이 줄어드는 것을 확인할 수 있다. 또한, Slip현상은 접촉각 70° 이하인 영역에서 발생하였다.

4. 결 론

본 연구에서는 Nayak의 거친 표면의 랜덤 프로세서를 바탕으로 표면 파라미터를 계산하고 이를 GW 모델에 적용하여 거친 표면의 강성 해석을 수행하였다. 해석 시 탄성영역과 탄소성 영역으로 구분하여 계산을 수행하였다. 접촉각을 가지는 곡률 커플링의 경우 가공 틀에 의해 가공된 실제 형상을 기반으로 유효 접촉면을 계산하였으며, 접촉면에서의 미끄러짐을 고려하여 강성을 예측하는 기법을 개발하였다. 이로부터 평면 커플링 모델과 곡률 커플링 모델의 강성 해석 결과를 비교하였으며, 곡률 커플링 가장 중요한 설계변수인 접촉각에 따른 강성 변화 또한 살펴보았다.

본 연구에서 개발한 강성 해석 절차를 이용하여 도출된 결과는 다음과 같다.

1. 형상 모델링을 통해 곡률 커플링에서 접촉각에 따라 가공할 수 있는 최대 기어 이수를 찾았다. 접촉각이 작을수록 가공 가능한 기어 이수가 증가하여 기어 이끝 및 이뿌리에 의해 생성되는 접촉하지 않는 불필요한 부분이 차지하는 면적이 증가하여 유효 수직 접촉면적이 감소한다.

2. 접촉각에 의해 평면 커플링 모델이 곡률 커플링 모델 보다 큰 강성을 가지며 접촉각이 작아질수록 강성이 감소하고 압력이 증가하며 두 표면사이의 간극이 감소하므로 이를 고려하여 커플링을 설계할 수 있다.

Acknowledgements

이 논문은 (주)두산중공업의 대형가스터빈 기술개발 사업 지원으로 수행되었으며, 협력에 감사드립니다.

References

- [1] Nayak, P. Ranganath., "Some aspects of surface roughness measurement", *Wear*, Vol. 26, No. 2, pp. 165-174, 1973.
- [2] Greenwood, J. A., Williamson, J. B. P., "Contact of nominally flat surfaces", *Proceedings of the Royal Society of London. A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, Vol. 295, No. 1442, The Royal Society, 1966.
- [3] Kogut, L., Etsion, I., "Elastic-plastic contact analysis of a sphere and a rigid flat", *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 69, No. 5, pp. 657-662, 2002.
- [4] Jackson, R. L., Green, I., "A finite element study of elasto-plastic hemispherical contact against a rigid flat", *Journal of Tribology*, Vol. 127, pp. 343-354, 2005.
- [5] Li, L., Etsion, I., Talke, F. E., "Contact area and static friction of rough surfaces with high plasticity Index", *Journal of Tribology*, Vol. 132, No. 3, 031401, pp. 1-10, 2010.
- [6] Mindlin, R. D., "Compliance of elastic bodies in contact", *J. of Appl. Mech.*, Vol. 16, pp. 259-268, 1949.
- [7] Yuan, Q., et al., "Analysis of dynamic characteristics of gas turbine rotor considering contact effects and pre-tightening force", *ASME Turbo Expo*, pp. 983-988, 2008.
- [8] Peng, H., et al., "Rotor dynamic analysis of tie-bolt fastened rotor based on elastic-plastic contact", *ASME 2011 Turbo Expo: Turbine Technical Conference and Exposition*. American Society of Mechanical Engineers, pp. 365-373, 2011.
- [9] Yuan, S., et al., "Study on the equivalent stiffness of heavy-duty gas turbines composite rotor with curvic couplings and spindle tie-bolts", *ASME 2011 Power Conference*, pp. 567-576, 2011.
- [10] Gao, J., et al., "Effects of bending moments and pretightening forces on the flexural stiffness of contact interfaces in rod-fastened rotors", *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, Vol. 134, No.10:102503, 2012.
- [11] Chu, H. J., et al., "The contact fatigue life analysis of rough surfaces", *J. Korean Soc. Tribol. Lubr. Eng.*, Vol. 21, No. 3, pp. 136-141, 2005.
- [12] Kim, T. W., Cho, Y. J., "EHL Analysis for rough surface with directional roughness", *J. Korean Soc. Tribol. Lubr. Eng.*, Vol. 25, No. 5, pp. 342-347, 2009.
- [13] WORKS, Gleason, ROCHESTER, N. Y., *Curvic Coupling Design*. Gleason Works, 1973.
- [14] Zhang, Wei, et al., "Adhesive contact on randomly rough surfaces based on the double-Hertz model", *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 81, No. 5, 051008, 2014.
- [15] ISO 4288, "Geometrical Product Specifications (GPS) - Surface texture: Profile method. Rules and procedures for the assessment of surface texture. International", British Standards Institute, London, 1996.