

# 기하 및 재료 비선형을 고려한 셸 부재의 역학적 특성

## Mechanical Characteristics of Shell Members Considering the Geometrical and Material Nonlinearity

김기태\*  
Kim, Ki-Tae

박범희\*\*  
Park, Beom-Hee

김다진\*\*  
Kim, Da-Jin

한상을\*\*\*  
Han, Sang-Eul

### Abstract

This paper analyse the mechanical characteristics of geometrical and material nonlinearity behavior of cylindrical shell roofs subjected to a concentrated load. The shell elements were modeled using 'NISA2016' software as 3D general shell element and 3D composite shell element. The 3D shell element includes deformation due to bending, membrane, membrane-bending coupling and shear perpendicular to the grain effects is suited for modeling moderately thick or thin general shells and laminated composite shells. And The 3D composite shell element consists of a number of layers of perfectly bonded anisotropic and orthotropic materials. The purpose of this research is to analysis the load-deflection curves considering the combined geometric and material nonlinearity of cylindrical shells. In a shallowed cylindrical shell, snap-through curve can be found.

*Keywords : Geometrical and material nonlinear behavior, Cylindrical shell roofs, Load deflection curves*

## 1. 서론

원통형 셸은 원통 곡면에 대한 구조적인 장점과 가볍지만 높은 강성을 갖는 구조물을 만들 수 있는 재료적 측면에서의 장점이 있다. 이러한 이유에서 원통 셸의 형태는 구조 부재로써 곡물 창고, 스타디움과 같은 건축 구조물, 항공기, 선박, 기계 등 산업 전반에 걸쳐 다양한 분야에서 널리 사용되고 있다<sup>1)</sup>.

셸 부재는 셸의 형상, 경계 조건, 하중 등에 따라 아주 다양한 거동을 보이며, 특히 셸의 두께가 얇을 경우 거동의 특성이 매우 민감해진다. 셸 부재의 기하학적 특징은 평판과 달리 유한한 곡률 반경을 가진 곡면으로 이루어지고, 곡면의 형태는 매우 다양하다. 또한 셸의 스펠-높이비가 작을 경우에는 하중-변위 곡선에서 Snap-Back 혹은 Snap-Through 현상

이 발생할 수 있다. 셸 부재는 재료의 특성에 따라서 등방성 재료, 직교 이방성 재료, 이방성 재료 등으로 분류된다. 탄성 재료는 일정한 응력 한계까지 탄성적으로 거동하는 것으로 가정되고, 그 후에는 결합된 탄성 및 소성 거동이 발생한다. 재료의 항복 및 항복점 거동을 결정하기 위해서는 소성 이론이 포함되어야 하고, 재료의 비선형성을 고려한 비선형 해석이 수행되어야 하며, 변형이 큰 경우에는 기하 비선형을 고려해야 한다<sup>2)</sup>.

비선형 해석에는 기하 비선형 해석, 재료 비선형 해석, 기하 및 재료 합성 비선형 해석 등이 있다. 본 연구에서는 다양한 셸 부재의 기하 비선형 거동과 기하 및 재료의 합성 거동에 대하여 연구하고자 한다. 따라서 점진적으로 증가되는 하중 및 변위 곡선을 분석하여 기하 및 재료 비선형성에 대한 역학적 특성을 규명한다. 먼저 소성 이론과 이방성 셸의 이론에 대하여 고찰하고, 탄소성 유한 요소 해석을 위하여 정식화 한다. 또한 재료 비선형 해석을 위해서 적용된 재료의 항복 이론 및 경화 효과 등에 대해서 고려한다. 실험의 해석 변수는 재료의 두께, 탄성 계수, 경화 효과 등이며, 변수들이 미치는 기하 및 재료 비선형 거동에 대한 역학적 특성을 분석한다.

\* 주저자, 학생회원, 인하대학교 건축공학과, 통합과정  
Department of Architectural Engineering, Inha Univ.

\*\* 학생회원, 인하대학교 건축공학과, 석사과정  
Department of Architectural Engineering, Inha Univ.

\*\*\* 교신저자, 정회원, 인하대학교 건축공학과 교수, 공학박사  
Department of Architectural Engineering, Inha Univ.  
Tel: 070-8269-3656 Fax: 032-866-4624  
E-mail: hsang@inha.ac.kr

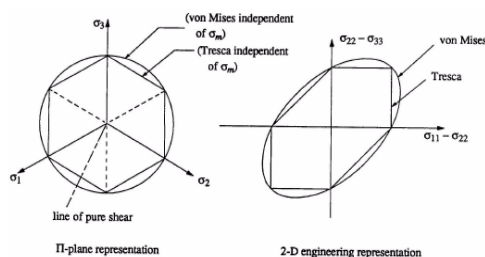
## 2. 비선형 이론 및 해석 방법

### 2.1 재료 비선형에 대한 소성 이론

#### 2.1.1 일반 소성 이론

탄성 재료는 일정한 응력 한계까지 탄성 거동하는 것으로 가정되고, 그 후에 결합된 탄성 및 소성 거동이 발생한다. 또한 재료의 항복 및 항복점 거동을 결정하기 위해서는 소성 이론을 포함해야 한다. 항복 기준은 가능한 모든 응력 상태에서 탄성의 한계와 소성의 시작을 정의하는 관계이므로 소성 변형 판단에 중요한 역할을 한다. 항복 기준 중 von Mises 항복 기준은 최대 비틀림 에너지 이론을 바탕으로 하여 물체 내에서 등가 응력이라 불리는 폰 미세스 응력(von Mises stress)의 최대값이 물체의 항복 응력에 도달하였을 때 파괴가 시작된다고 예측하는 이론이다. 이 이론은 물체 내부에 축적된 비틀림 에너지로 파괴를 예측하는 것이라는 관점에서 최대 전단 응력 이론과 차이가 있다<sup>2)</sup>.

최대 전단 응력 이론이라 불리는 Tresca의 항복 기준에서는 물체 내에 발생하는 최대 전단 응력이 물체가 견딜 수 있는 항복 응력(Yield stress)에 도달하였을 때 임의 물체의 파괴가 일어난다고 본다. 일례로 정사각형 물체의 윗면과 아랫면에 평행하지만 서로 반대 방향인 힘을 가하게 되면 물체의 형상이 찌그러지고 내부에 전단 응력이 발생하게 되는데, 이러한 현상에 착안하여 물체의 파괴를 예측하는 것이 바로 Tresca 이론이다. 대부분의 금속은 von Mises 기준이 Tresca 기준보다 정확도가 높다<sup>2)</sup>. von Mises 및 Tresca 항복 기준의 2차원 평면은 <Fig. 1>과 같다<sup>2)</sup>.



<Fig. 1> von Mises and Tresca yield criteria

경화 모델은 소성 변형 중에 항복 함수가 어떻게

변화하는지를 결정하는 것으로 굳지 않은 가정(완전 가소성)의 모델과 그 외 3가지 가공 경화 모델을 사용할 수 있다. 변형을 경화(Strain hardening)는 금속과 같은 재료가 외부로부터 하중을 받아 소성 변형이라고 불리는 영구적인 변형을 일으키는 것이다. 이는 금속 내 결정체들의 전이라 불리는 미끄러짐에 기인하며, 추가적인 소성 변형을 발생시키려면 이전보다 더 큰 하중이 필요하게 된다. 이러한 현상을 변형을 경화라고 하며, 재료의 강성을 증가시키는 결과를 초래한다<sup>3)</sup>.

변형을 경화를 나타내는 재료의 응력-변형률 선도는 소성 영역과 같이 일정한 기울기를 가지는 직선이 아니라 위로 볼록한 형상의 곡선으로 표현된다. 수학적으로는 응력( $\sigma$ ) =  $K(\text{변형률})^n$  형태의 멱함수로 표현되고, 여기서  $K$ 와  $n$ 은 각각 재료 고유의 물질 상수와 경화 지수를 의미한다. 변형률의 증가에 따라 재료의 강성이 감소하는 현상도 발생하는데, 이것을 변형률 연성화라고 한다<sup>3)</sup>.

본 연구에서는 2.1.1절의 기초 이론과 2.1.2절의 개선된 수식 및 조건을 기본 알고리즘으로 하는 시뮬레이션 프로그램인 NISA를 사용하였다.

#### 2.1.2. 이방성 탄소성 모델을 위한 Hill의 항복 조건<sup>2),4)</sup>

항복 조건은 식 (1)을 기준으로 소성 변형이 시작될 때의 응력 수준 또는 응력 강도 수준을 결정한다.

$$2f(\sigma_{ij}) = F(\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + G(\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + H(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 2L\sigma_{23}^2 + 2M\sigma_{31}^2 + 2N\sigma_{12}^2 - 1 = 0 \quad (1)$$

여기서,  $F, G, H, L, M, N$ 은 이방성의 현재 상태 특성 파라미터이고, 1, 2, 3은 3가지 주요 방향이다. 최종적으로 Hill의 이방성 항복 조건식은 식 (2)와 같다.

$$3f(\sigma) = M_{ij}\sigma_i\sigma_j - L_i\sigma_i - K = 0 \quad (2)$$

여기서  $M_{ij}, L_i$ 은 인장 및 압축 방향에 대한 강도의 차이와 항복 표면의 유효 크기를 표현하는 경화 매개 변수이며,  $\sigma_i$ 는 응력 텐서  $\sigma$ 의 벡터 형태이다.



$$\int_V \{d\sigma\}^T \{\delta(d\epsilon)\} dV = \int_S \{dT\}^T \{\delta(du)\} dS \quad (9)$$

$$+ \int_V \{dF\}^T \{\delta(du)\} dV$$

식 (7)에서 재료를 유한 요소로 이산화하고, 변위-변형률의 증분형 관계식에 의하여 식 (10)으로 간략화 시킨다.

$$d\epsilon = [A]du = [A][N]du^e = [B]du^e \quad (10)$$

여기서, 절점 변위는 체적 적분에 무관하다는 것으로부터 식 (11)로 나타낼 수 있다.

$$\int_V \{d\sigma\}^T \{\delta(d\epsilon)\} dV = \int_{V_e} ([D^{ep}][B]\{du^e\})^T [B]\delta(du^e) dV$$

$$= \{du^e\}^T \int_{V_e} [B]^T [D^{ep}][B] dV \delta(du^e) \quad (11)$$

식 (11)에서 표면력은 각 절점에 집중력으로 작용하는 것으로 하고, 물체력은 요소의 중심에 집중적으로 작용하는 것으로 하면 증분형 가상 일의 원리식에 의하여 식 (12)를 최종적으로 얻을 수 있다.

$$[K^e]\{du^e\} = \{dF_S^e\} + \{dF_V^e\} \quad (12)$$

여기서,

$$[K^e] = \int_{V_e} [B]^T [D^{ep}][B] dV$$

$$\{dF_S^e\} = \int_{S_e} [N]^T \{dT\} dS$$

$$\{dF_V^e\} = \int_{V_e} [N]^T \{dF\} dV$$

식 (12)는 1개의 요소  $e$ 에 대해서 각 절점에서의 절점 변위 증분과 절점력 증분 및 체적력 증분의 관계를 나타낸 것으로 요소의 강성 방정식(Element stiffness equation)이라고 하고, 행렬  $[K^e]$ 를 요소의 강성 행렬이라고 한다. 식 (12)를 유한개의 요소로 가정하여 절점 변위 증분과 절점력 증분을 구체적으로 구할 수 있게 된다. 정적 축약법(Static condensation method)을 유한개의 요소로 가정하

고 식 (12)에 적용시켜 기지의 절점력 증분의 열 행렬을  $\{dF_{sb}\}$ , 미지의 절점력 증분의 열 행렬을  $\{dF_{sb}\}$ , 기지의 절점 변위 증분의 열 행렬을  $\{du_a\}$ , 미지의 절점 변위 증분의 열 행렬을  $\{du_b\}$ 라 한다면 식 (13)과 같이 부분 행렬로 나타낼 수 있다.

$$\begin{bmatrix} K_{aa} & K_{ab} \\ K_{ba} & K_{bb} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} du_a \\ du_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} dF_{sa} \\ dF_{sb} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} dF_{Va} \\ dF_{Vb} \end{pmatrix} \quad (13)$$

식 (13)을 전개한 식 (14)와 식 (15)로부터 식 (16)과 같이 미지의 절점 변위 증분  $\{du_b\}$ 를 구할 수 있게 되며, 식 (15)와 식 (16)으로부터 미지의 절점력 증분  $\{dF_{sb}\}$ 에 대해서 식 (17)을 얻을 수 있다.

$$[K_{aa}]\{du_a\} + [K_{ab}]\{du_b\} = \{dF_{sa}\} + \{dF_{Va}\} \quad (14)$$

$$[K_{ba}]\{du_a\} + [K_{bb}]\{du_b\} = \{dF_{sb}\} + \{dF_{Vb}\} \quad (15)$$

$$\{du_b\} = [K_{bb}]^{-1} (\{dF_{sb}\} + \{dF_{Vb}\} - [K_{ba}]\{du_a\}) \quad (16)$$

$$\{dF_{sb}\} = [K_{bb}][K_{bb}]^{-1} (\{dF_{sb}\} + \{dF_{Vb}\} - [K_{ba}]\{du_a\})$$

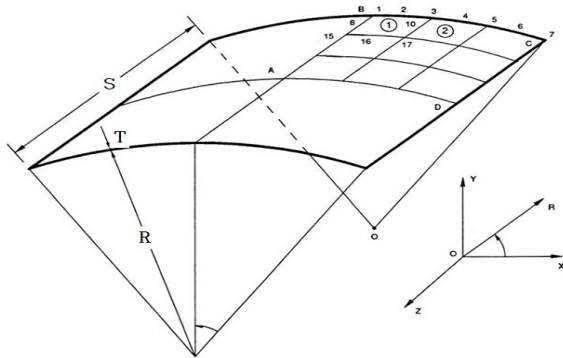
$$+ [K_{ba}]\{du_a\} - \{dF_{Vb}\} \quad (17)$$

해당 방정식을 풀면 현재  $t=t$ 시간에서의 전체 절점에 대해서 절점 변위 증분과 절점력 증분이 모두 구해진다. 즉 유한개의 요소 내에서 강성과 모든 절점에 대한 변위와 절점력의 증분을 구할 수 있게 된다. NISA2016 Software 또한 유한 요소의 해석을 기반으로 하였고, 본 해석에서는 기하 및 재료 비선형 거동을 동시에 고려한 해석을 진행하였다.

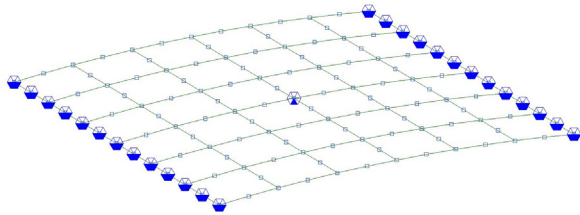
### 3. 원통 및 구형 셀의 비선형 해석

재료의 탄소성 거동을 규명하기 위하여 3가지 모델을 준비하였다. 첫 번째로 편평 원통 셀을 대상으로 기하 비선형만을 고려한 해석과 기하 및 재료 비선형을 모두 고려한 해석을 진행하여 비교하였으며, 두 번째와 세 번째로는 원통형 지붕 셀과 구형 셀을 대상으로 각각 기하 및 재료 비선형 해석을 진행한 후 앞선 결과들과 비교하였다. 자세한 내용은 다음과 같다.

### 3.1 편평 원통 셀의 기하 비선형 해석



<Fig. 2> Modeling information (Case 1 & 2)



<Fig. 3> Analytical modeling (Case 1 & 2)

기본적으로 상위 모델을 포함한 모든 모델은 셀의 중앙부에 집중 하중이 작용하는 것으로 가정하고, 그 점에서 변위 증분으로 비선형 해석을 수행하였다. 변위 증분의 수는 30등분이며, 증분당 허용되는 반복의 최대 수는 100, 적용된 오차는 0.0001이다.

기하 비선형 해석을 위해서 사용되는 모델은 <Fig. 2>와 같은 편평 원통 지붕이다. 경계 조건은 <Fig. 3>과 같이 두 모서리에 힌지 지점이 적용되며, 3차원 8절점 셀 요소를 사용하여 6×6으로 모델링 하였다. 해석 조건은 <Table 1> 및 <Table 2>와 같다. 본 해석은 NISA의 신뢰성 검증을 위하여 진행하였고, 여타 분석 결과의 거동과 동일한 양상을 보이므로 뒤에 따를 다른 해석 결과도 유의미한 것으로 보여진다<sup>2),4),8)</sup>. 또한 <Table 2>와 같이 각 Case마다 비교를 위해 중복 두께 T를 갖는다.

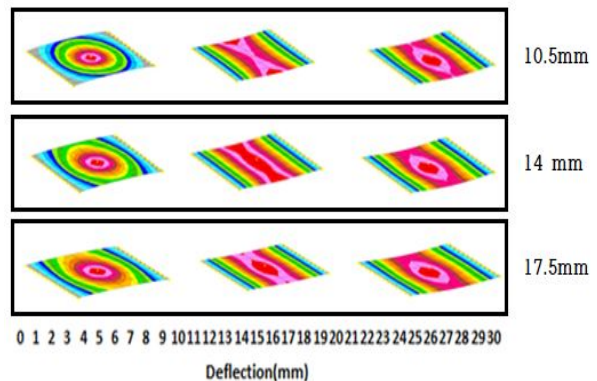
<Fig. 4>와 <Fig. 5>는 원통 셀의 해석 결과로 각각 두께를 10.5, 14, 17.5mm로 변화시키며 해석을 진행한 후 얻은 Deflection contour와 하중에 따른 변위 곡선을 나타낸 것이다.

<Table 1> Analysis condition

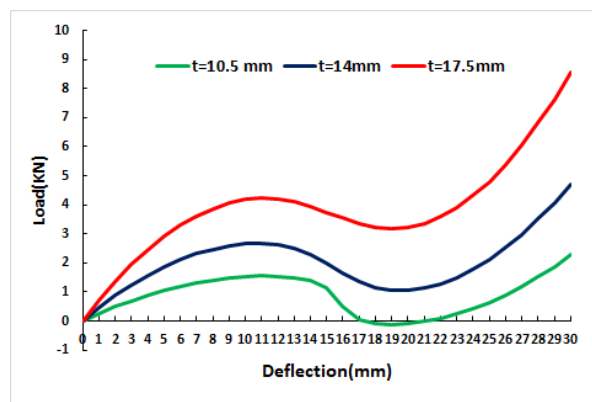
	Radius (R) (mm)	Width (S) (mm)	Modulus of elasticity (MPa)	
			Ex	Ey
Case 1	2,540	508	3,102	-
Case 2	2,540	508	42,000	21,000
Case 3	7,600	15,200	42,000	21,000
Case 4	$Z = \frac{4h}{L^2}(x^2 + y^2)$	6,000	42,000	21,000

<Table 2> Analysis Thickness

	Thickness (T) (mm)								
	10.5	14	17.5	21	24.5	28	56	70	84
Case 1	✓	✓	✓						
Case 2			✓	✓	✓	✓			
Case 3						✓	✓	✓	✓
Case 4						✓	✓	✓	✓



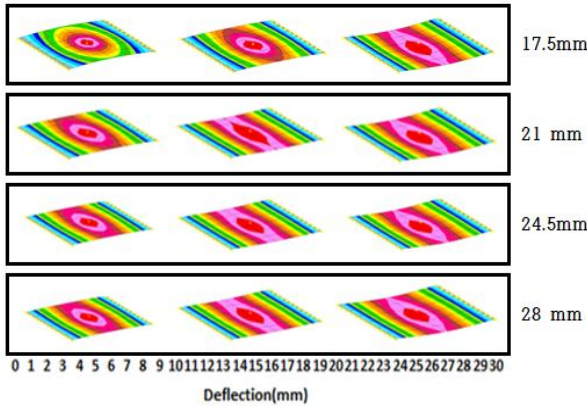
<Fig. 4> Deflection contour



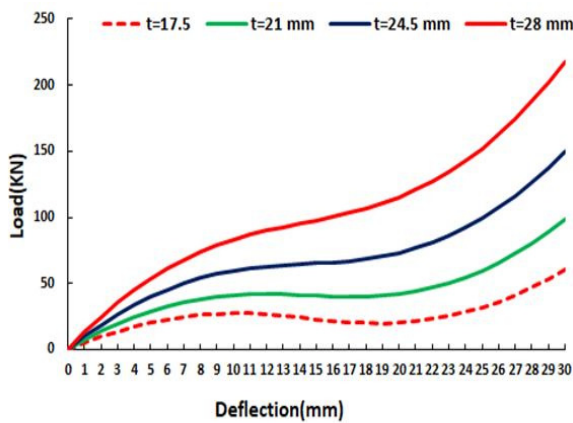
<Fig. 5> Load displacement curves  
(Elastic modulus=3,102MPa, Thickness=10.5, 14, 17.5mm)

### 3.2 편평 원통 셸의 기하 및 재료 비선형 해석

본 해석에서는 3.1절과 같은 편평 원통 셸의 모델에 대하여 기하 및 재료 비선형을 동시에 고려하여 해석을 진행하였다. 해석 조건은 <Table 1> 및 <Table 2>와 같다.



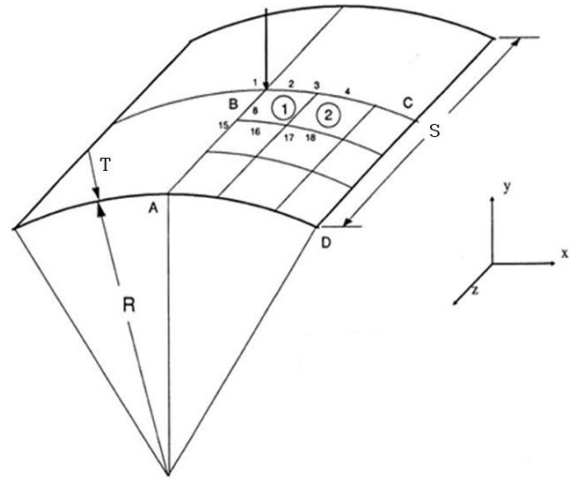
<Fig. 6> Deflection contour



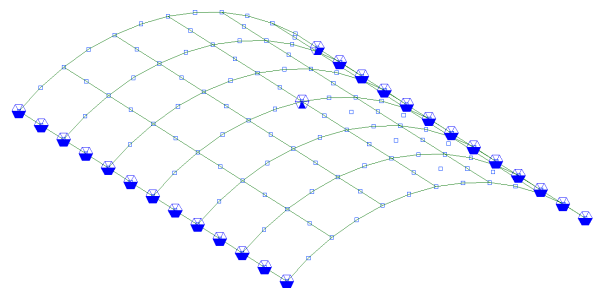
<Fig. 7> Load displacement curves  
(Elastic modulus:  $E_x=42,000\text{MPa}$ ,  $E_y=21,000\text{MPa}$ ,  
Thickness=17.5, 21, 24.5, 28mm)

<Fig. 6> 및 <Fig. 7>은 원통 셸의 해석 결과로 이전 해석에서 사용하였던 두께 17.5mm를 포함하여 21, 24.5, 28mm로 점차 변화시키며 해석을 진행한 후 얻은 Deflection contour와 하중에 따른 변위 곡선을 나타낸 것이다.

### 3.3 일반 원통 셸의 기하 및 재료 비선형 해석

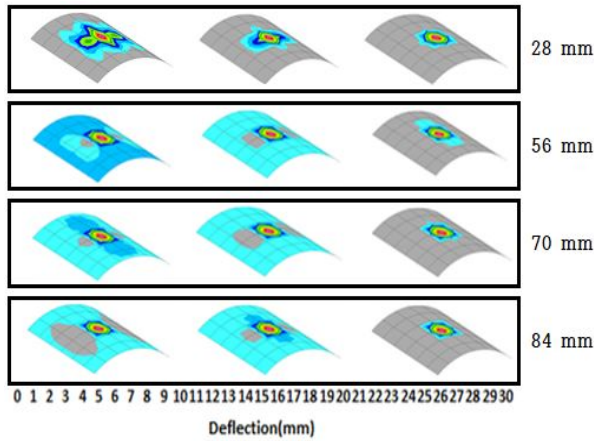


<Fig. 8> Modeling information (Case 3)

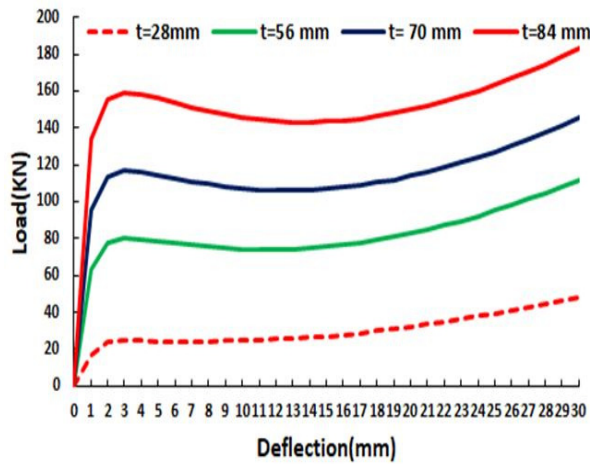


<Fig. 9> Analytical modeling (Case 3)

본 해석을 위해서 사용되는 모델은 <Fig. 8>과 같이 편평하지 않은 일반 원통 지붕으로 기하 및 재료 비선형을 동시에 고려하여 해석을 진행하였다. 경계 조건은 <Fig. 9>와 같이 S방향의 두 모서리에 힌지 지점이 적용되며, 3차원 8절점 쉘 요소를 사용하여 6×6으로 모델링 하였다. 해석 조건은 <Table 1> 및 <Table 2>와 같다. <Fig. 10>과 <Fig. 11>은 이전 해석에서 사용하였던 두께 28mm를 포함하여 56, 70, 84mm로 변화시키며 해석을 진행한 후 얻은 Deflection contour와 하중에 따른 변위 곡선을 나타낸 것이다.

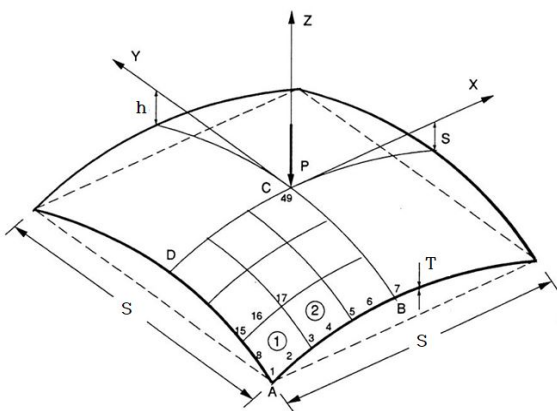


〈Fig. 10〉 Deflection contour

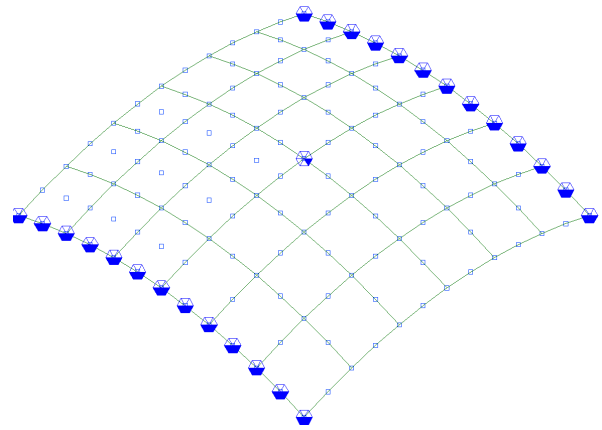


〈Fig. 11〉 Load displacement curves  
(Elastic modulus:  $E_x=42,000\text{MPa}$ ,  $E_y=21,000\text{MPa}$ ,  
Thickness=28, 56, 70, 84mm)

### 3.4 구형 셀의 기하 및 재료 비선형 해석

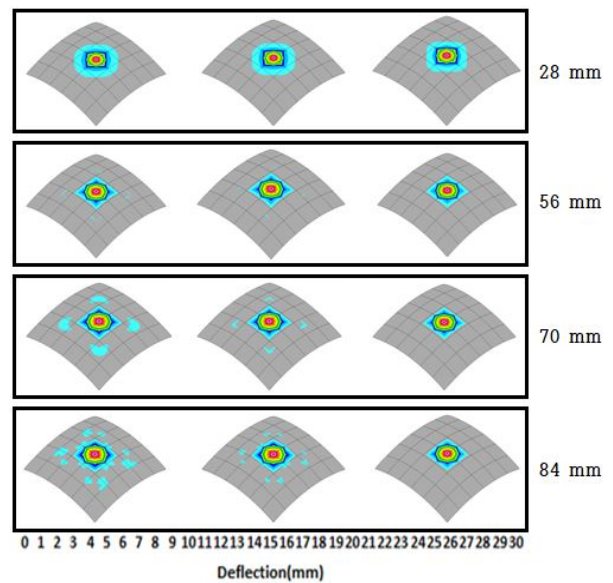


〈Fig. 12〉 Modeling information (Case 4)

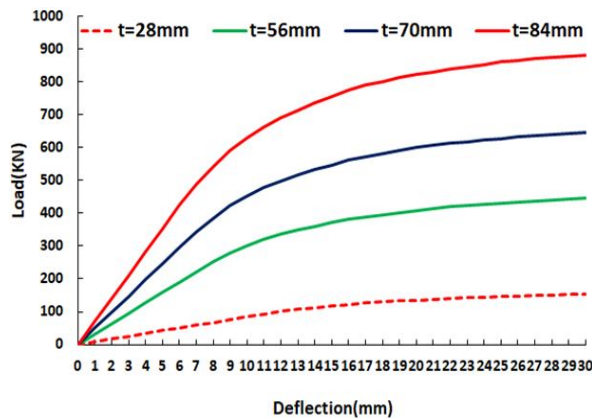


〈Fig. 13〉 Analytical modeling (Case 4)

본 해석을 위해서 사용되는 모델은 <Fig. 12>와 같은 구형 셀로 기하 및 재료 비선형을 동시에 고려하여 해석을 진행하였다. 경계 조건은 <Fig. 13>과 같이 S방향의 두 모서리에 힌지 지점이 적용되며, 3차원 8절점 셀 요소를 사용하여 6×6으로 모델링 하였다. 해석 조건은 <Table 1> 및 <Table 2>와 같다. <Fig. 14>와 <Fig. 15>는 구형 셀의 해석 결과로 두께는 3.3절과 동일하게 28, 56, 70, 84mm로 변화시키며 해석을 진행한 후 얻은 Deflection contour 와 하중에 따른 변위 곡선을 나타낸 것이다.



〈Fig. 14〉 Deflection contour



〈Fig. 15〉 Load displacement curves  
(Elastic modulus:  $E_x=42,000\text{MPa}$ ,  $E_y=21,000\text{MPa}$ ,  
Thickness=28, 56, 70, 84mm)

#### 4. 결론

본 연구에서는 재료의 탄소성 거동을 분석하기 위하여 편평 원통 셸, 일반 원통형 지붕 셸, 구형 셸의 3가지 모델을 준비하였다. 각각의 모델에서도 두께별로 세분화하였으며, 기하 및 재료의 비선형성을 동시에 고려한 뒤 해당 셸의 비선형 해석을 수행하였다. 해석 수행 결과를 정의하면 다음과 같다.

1) 중앙부 집중 하중을 받는 편평 원통 셸의 기하 비선형 해석에서는 Snap-Through 현상을 잘 파악할 수 있는 반면, 기하 및 재료 비선형을 동시에 고려한 편평 원통 셸의 해석에서는 Snap-Through 현상이 나타나지 않고 하중과 변형이 완만하게 진행되었다.

2) 중앙부 집중 하중을 받는 편평 원통 셸의 2가지 해석을 비교하였을 때, 기하 비선형 해석만 진행하였을 때보다 기하 및 재료 비선형을 고려했을 경우 Snap-Through 현상이 완만해진다.

3) 중앙부 집중 하중을 받는 일반 원통형 지붕 셸의 기하 및 재료 비선형 해석에서는 초기 최대 하중에 도달한 이후 하중이 거의 증가하지 않고 변형만 계속 진행되었다. 재료 비선형만을 고려한 경우에는 최대 하중이 생기는 위치까지의 하중-변위 곡선을 잘 파악할 수 있지만 하중의 증가 없이 변위가 증가하는 구간은 나타나지 않는다.

4) 중앙부 집중 하중을 받는 구형 셸의 경우에는

초기 최대 하중에 도달한 이후에도 하중의 증가가 있어야만 변형이 발생한다.

#### 감사의 글

본 연구는 국토교통부 도시건축연구사업의 연구비 지원 (18AUDP-B100343-04)에 의해 수행되었습니다.

#### References

1. Son, B. J., Ji, H. S., & Chang, S. Y., "A Study on Edge Reinforcement Effect of Cylindrical Shells with Composite Laminate", Journal of the Korean Society for Advanced Composite Structures, Vol.3, No.2, pp.47~54, 2012
2. NISA Software. (2005). NISA II User's Manual. Cranes Software International Ltd., USA.
3. MIDAS Information Technology Co. Ltd. Kinematic hardening rule [Web post]. Retrieved form [http://kor.midasuser.com/civil/tech\\_paper/keyword\\_view.asp?pg=12&sk=&bid=70&nCat=&nIndex=&sHtml=&idx=748](http://kor.midasuser.com/civil/tech_paper/keyword_view.asp?pg=12&sk=&bid=70&nCat=&nIndex=&sHtml=&idx=748)
4. Crisfield, M. A., "Non-Linear Finite Element Analysis of Solids and Structures: Advanced Topics", John Wiley & Sons Inc., pp.1~508, 1997.
5. Kim, Y. S., "Mechanics of plastic deformation and application", Sigmampress Inc., pp.1~648, 2014.
6. Han, S. E., & Lee, K. S., "A Study on The Nonlinear Elasto-Plastic Post Buckling Analysis of Spatial Structures", Journal of Architectural Institute of Korea, Vol.23, No.12, pp.59~68, 2007
7. Han, S. E., Kim, M. J., & Kang, N. W., "Dynamic Buckling Analysis of Lattice Dome Structures Considering Geometrical Non-linearity", Journal of Architectural Institute



of Korea, Vol.23, No.3, pp.3~10, 2009

8. Han, S. E., Kim, K. T., Kim, D. J., & Park, K. G., "The geometric and material nonlinear analysis of cylindrical shells by rise span ratio", International Journal of Latest Trends in Engineering and Technology, Vol.8, No.4-1, pp.74~80, 2017

- Received : June 26, 2018
- Revised : August 30, 2018
- Accepted : September 12, 2018