

# LQ 제어와 근의 이동범위를 이용한 조단 블록을 갖는 중근을 두 실근으로 이동시키는 극배치 방법

박민호  
충남도립대학교 전기전자과

## Pole Placement Method to Move a Equal Poles with Jordan Block to Two Real Poles Using LQ Control and Pole's Moving-Range

Minho Park

Electrical & Electronics Engineering, Chungnam State University

**요 약 문:** 일반적으로 비선형 시스템은 1차와 2차 시스템의 곱의 형태로 선형화되며, 시스템의 근은 1차 시스템의 근과 2차 시스템의 중근, 서로 다른 두 실근, 복소근으로 구성된다. 그리고 LQ(Linear Quadratic) 제어는 성능지수함수를 최소화하는 제어법칙을 설계하는 방법으로 시스템의 안정성을 보장하는 장점과 가중행렬 조정으로 시스템의 근의 위치를 조정하는 극배치 기능이 있다. 가중행렬에 의해 LQ 제어는 시스템의 근의 위치를 임의로 이동시킬 수 있지만 시행착오 방법으로 가중행렬을 설정하는 어려움이 있다. 이것은 해밀토니안(Hamiltonian) 시스템의 특성방정식을 이용하여 해결 할 수 있다. 또한 제어가중행렬이 상수의 대칭행렬이면 제어법칙을 반복적으로 적용하여 시스템의 여러 근을 원하는 페루프 근으로 이동시킬 수 있다. 이 논문은 해밀토니안 시스템의 특성방정식을 이용하여 조단 블록을 갖는 시스템의 중근을 두 실근으로 이동시키는 상태가중행렬과 제어법칙을 계산하는 방법을 제시한다. 삼각함수로 표현된 상태가중행렬로 해밀토니안 시스템의 특성방정식을 구한다. 그리고 이동된 두 실근이 특성방정식의 근이라는 조건에서 중근과 상태가중행렬의 관계식( $\rho, \theta$ )을 유도한다. 상태가중행렬이 양의 반한정행렬이 될 조건에서 중근의 이동범위를 구한다. 그리하여 이동범위에서 선택한 두 실근을 관계식에 대입하여 상태가중행렬과 제어법칙을 계산한다. 제안한 방법을 간단한 3차 시스템의 예제에 적용해본다.

**Abstract** If a general nonlinear system is linearized by the successive multiplication of the 1st and 2nd order systems, then there are four types of poles in this linearized system: the pole of the 1st order system and the equal poles, two distinct real poles, and complex conjugate pair of poles of the 2nd order system. Linear Quadratic (LQ) control is a method of designing a control law that minimizes the quadratic performance index. It has the advantage of ensuring the stability of the system and the pole placement of the root of the system by weighted matrix adjustment. LQ control by the weighted matrix can move the position of the pole of the system arbitrarily, but it is difficult to set the weighting matrix by the trial and error method. This problem can be solved using the characteristic equations of the Hamiltonian system, and if the control weighting matrix is a symmetric matrix of constants, it is possible to move several poles of the system to the desired closed loop poles by applying the control law repeatedly. The paper presents a method of calculating the state weighting matrix and the control law for moving the equal poles with Jordan blocks to two real poles using the characteristic equation of the Hamiltonian system. We express this characteristic equation with a state weighting matrix by means of a trigonometric function, and we derive the relation function ( $\rho, \theta$ ) between the equal poles and the state weighting matrix under the condition that the two real poles are the roots of the characteristic equation. Then, we obtain the moving-range of the two real poles under the condition that the state weighting matrix becomes a positive semi-definite matrix. We calculate the state weighting matrix and the control law by substituting the two real roots selected in the moving-range into the relational function. As an example, we apply the proposed method to a simple example 3rd order system.

**Keywords :** Pole Placement, LQ Control, Hamiltonian, Jordan Block, Pole's Moving-Range

\*Corresponding Author : Minho Park (Chungnam State Univ.)

Tel: +82-11-9575-3264 email: minhinf@gmail.com

Received September 4, 2017

Revised (1st December 26, 2017, 2nd January 16, 2018)

Accepted February 2, 2018

Published February 28, 2018

## 1. 서론

제어기 설계 목적은 시스템을 안정화하면서 출력이 설계조건을 만족하도록 시스템의 응답특성을 개선하는 것이다. 여러방법 중에서 LQ(Linear Quadratic) 제어는 시스템의 상태방정식을 만족하면서 상태가중행렬과 제어가중행렬로 표현되는 성능지수함수를 최소화하는 제어법칙을 설계하는 방법이고, 시스템 근의 극배치 기능과 이득여유((6,∞)[dB])와 위상여유(60도 이상)의 안정성을 보장하는 특징이 있다[1]. 제어법칙은 리카티(Riccati) 방정식의 해로 표현되며, 가중행렬 조정으로 극점을 변경할 수 있다. 그렇지만 원하는 극점을 얻기 위해 시행착오 방법으로 가중행렬을 선택하는 어려움이 있다. 따라서 해밀토니안(Hamiltonian) 시스템의 특성방정식을 이용하여 이 문제를 해결하려는 연구들이 있었다[2~4]. 1972년에 Solheim[2]은 해밀토니안 시스템의 특성방정식을 이용하여 근과 가중행렬의 관계식을 유도하는 방법을 제시하고 대각행렬 형태의 상태가중행렬과 제어가중행렬을 이용하여 시스템의 실근을 이동시키는 상태가중행렬을 계산하였다. 또한 시스템의 복소근에 대한 방법도 제시하였지만 제한조건으로 적용에 한계가 있었다. 1995년에 Ochi 등[3]은 상태가중행렬 변화에 따른 해밀토니안 시스템 특성방정식 근의 변화를 테일러(Taylor) 급수로 근과 가중행렬의 관계를 유도하였다. 이 방법은 계산양이 많다는 단점이 있다. 2001년에 Fujinaka 등[4]은 대각행렬 형태의 제어가중행렬과 삼각함수로 나타낸 상태가중행렬을 이용하여 근과 가중행렬의 관계식을 유도하고 이 관계식을 이용하여 시스템의 복소근을 페루프 복소근으로 이동시키는 상태가중행렬 계산법을 제시하였다. 그러나 시스템의 다른 근에 대해서는 다루지 않았다. 2005년에 박민호 등[5]은 Fujinaka가 제시한 상태가중행렬을 사용하여 근과 상태가중행렬의 관계식을 유도하고, 근의 이동범위를 좌표평면에 나타내는 방법을 제시하였다. 이 방법으로 시스템의 복소근을 원하는 페루프의 복소근으로 이동시켰다. 2007년에는 시스템의 복소근을 페루프의 서로 다른 두 실근으로 이동시키는 방법[6]과 2009년에는 시스템의 서로 다른 두 실근을 페루프의 복소근으로 이동시키는 방법[7]을 제시하였다. 그러나 시스템이 중근을 가지면 대각행렬에 조단 블록이 생겨 기존 방식을 적용할 수 없었다. 본 논문은 박민호의 연구에서 다루지 않은 조단 블록을 가지는 중근을 페루

프의 두 실근으로 이동시키는 LQ 제어에 관한 것이다. 2장에서는 LQ 제어의 기본개념, 제어법칙의 특징, 근과 상태가중행렬의 관계식, 중근의 이동범위에 대해 알아보고, 3장에서는 간단한 예제 시스템에 제시한 방법을 적용해본다. 마지막으로 4장에서 결론을 맺는다.

## 2. 제어이론

### 2.1 LQ 제어

비선형 시스템은 1차와 2차 시스템의 다중 급의 형태로 선형화되며,  $n$ 차 SISO(Single Input Single Output) 시스템을 상태방정식으로 표현하면

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (1)$$

이 된다. 여기서 상태변수  $x$ 는  $n \times 1$  행렬, 제어입력  $u$ 는  $1 \times 1$  행렬,  $A$ 는  $n \times n$ ,  $B$ 는  $n \times 1$  인 시스템 행렬이다. 이를 블록다이어그램으로 표현하면

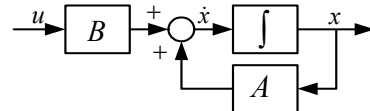


Fig. 1. Block diagram of linear system

과 같다. LQ 제어는 식 (1)의 방정식을 만족시키면서 식 (2)의 성능지수함수를 최소화하는 제어입력을 설계하는 것이다.

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (x^T Q x + u^T R u) dt \quad (2)$$

여기서 상태가중행렬  $Q$ 는  $n \times n$ 인 양의 반한정대칭행렬이고, 제어가중행렬  $R$ 은  $1 \times 1$ 인 양의 한정대칭행렬이다.  $R = \text{diag}(r_{11}^{-1})$ 으로 정의하면  $r_{11}$ 은 양수가 되어야 한다[8]. 그런데 상태방정식을 제한 조건으로 하고 성능지수함수를 최소화하는 제어입력은 제한조건 없이 라그랑지(Lagrange) 곱수( $\lambda_L$ )로 표현되는 성능지수함수

$$J_{\lambda} = \int_0^{\infty} (H - \lambda_L^T \dot{x}) dt \quad (3)$$

을 최소화하는 것과 같다. 여기서

$$H = \frac{1}{2} (x^T Q x + u^T R u) + \lambda_L^T (A x + B u) \text{ 이다.}$$

식 (3)의 성능지수함수를 최소화하는 제어입력은

$$u = -Kx = -R^{-1}B^T P x \quad (4)$$

이다. 여기서 제어법칙  $K$ 는  $1 \times n$  행렬이다. 식 (4)의 행렬  $P$ 는  $Q$ 와  $R$ 을 변수로 하는

$$PA + A^T P + Q - PBR^{-1}B^T P = 0 \quad (5)$$

의 리카티 방정식해이고, 식 (5)는 시스템이 제어가능하면 식 (6)의 해밀토니안 시스템에서 얻어진다.

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -V \\ -Q & -A^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \lambda \end{bmatrix} = F \begin{bmatrix} x \\ \lambda \end{bmatrix} \quad (6)$$

여기서  $V = BR^{-1}B^T$ 이다.

그래서 제어법칙은 가중행렬  $Q$ 와  $R$ 에 의해 결정되므로 LQ 제어는 가중행렬의 선택 문제가 된다[1].

### 2.2 제어법칙과 상태가중행렬

제어가중행렬  $R$ 이 상수의 대각행렬이면 제어법칙을 반복적으로 적용할 수 있고, [그림 2]는 그 과정을 나타낸 것이다.

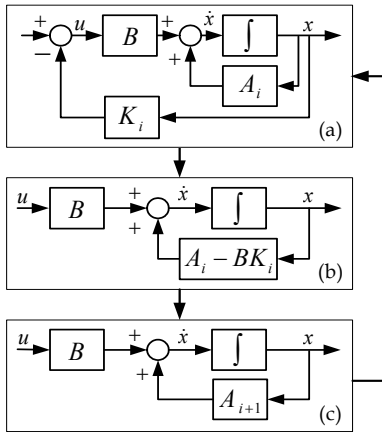


Fig. 2. Step-by-step process of LQ control

첫 번째 단계( $i=1$ )로 (a)는 시스템( $A_1$ )에 LQ 제어의 제어법칙

$$K_1 = R^{-1}B^T P_1 \quad (7)$$

을 적용한 것이다. 여기서  $P_1$ 은

$$P_1 A_1 + A_1^T P_1 + Q_1 - P_1 B R^{-1} B^T P_1 = 0 \quad (8)$$

의 리카티 방정식의 해이다. 그리고 (a)의 블록선도를 단순화하면 (b)가 되고,

$$A_2 = A_1 - BK_1 \quad (9)$$

에 의해 (c)가 된다. 두 번째 단계( $i=2$ )로  $A_2$ 에 또 다른 LQ 제어를 적용하면 다시 (a)가 되며, 적용된 제어법칙  $K_2$ 는

$$K_2 = R^{-1}B^T P_2 \quad (10)$$

이 된다. 그리고  $P_2$ 는 식 (11)에서 얻어진다.

$$P_2 A_2 + A_2^T P_2 + Q_2 - P_2 B R^{-1} B^T P_2 = 0 \quad (11)$$

LQ 제어를 두 번 적용하여 얻은 최종의 제어법칙은

$$\begin{aligned} K_1 + K_2 &= R^{-1}B^T P_1 + R^{-1}B^T P_2 \\ &= R^{-1}B^T (P_1 + P_2) \end{aligned} \quad (12)$$

가 된다. 식 (12)의  $P_1 + P_2$ 를 구하는 리카티 방정식은 식 (8)과 식 (11)을 더하여 얻어지는 방정식

$$\begin{aligned} (P_1 + P_2)A_1 + A_1^T(P_1 + P_2) + (Q_1 + Q_2) \\ - (P_1 + P_2)BR^{-1}B^T(P_1 + P_2) = 0 \end{aligned} \quad (13)$$

이 된다. 또한 상태가중행렬도 합의 형태인  $Q_1 + Q_2$ 가 된다. 이와 같은 방법으로  $k$ 번 반복하면 최종적으로 얻어지는 상태가중행렬과 제어법칙은 각 단계에서 적용한 값의 합으로 표현된다[2].

$$Q = \sum_{i=1}^k Q_i, \quad K = \sum_{i=1}^k K_i \quad (14)$$

그런데 식 (1)의 시스템이 가지는  $n$ 개의 근을

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \quad (15)$$

라 하면,  $\lambda_i (i=1, \dots, n)$ 는 1차 시스템의 근과 2차 시스템에서 얻어지는 서로 다른 두 실근, 복소근, 중근의 4 가지 종류 중에서 하나가 된다. [그림 2]의 방법으로 한 종류씩 시스템의 근  $\lambda_i$ 를 폐루프의 근으로 이동시키면 원하는 모든 근을 극배치 할 수 있다.

### 2.3 A의 대각행렬

시스템에 따라  $A$ 의 형태는 다양하지만

$$x = Tz \quad (16)$$

의 변환행렬( $T$ )에 의해 일정한 형태의 대각행렬  $\Lambda (= T^{-1}AT)$ 로 변환되며  $\Lambda$ 의 형태는 시스템 근의 종류에 따라 몇 가지 행태로 나누어진다[2]. 그리고 변환행렬로 근의 위치를 임의로 변경할 수 있어서 이동시킬 중근이  $\lambda_1$ 과  $\lambda_2$ 가 되도록 설정할 수 있다.

$\lambda_1$ 과  $\lambda_2$ 가 중근( $\lambda_d$ )이고, 중근의 고유벡터가 1개이면 대각행렬은 조단 블록을 갖는

$$A_{dj} = \begin{bmatrix} \lambda_d & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_d & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \quad (17)$$

의 형태, 고유벡터가 2개이면

$$A_{dd} = \text{diag}(\lambda_d, \lambda_d, \dots, \lambda_n) \quad (18)$$

의 형태가 된다[2]. 그런데 고유벡터가 2개인 경우는 서로 다른 두 실근의 방법으로 근을 이동시킬 수 있다[7]. 변환행렬에 의해 시스템의 상태방정식과 해밀토니안 시스템은

$$\dot{z} = Az + \tilde{B}u \quad (19)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{z} \\ \dot{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -\tilde{V} \\ -\tilde{Q} & -A^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ \lambda \end{bmatrix} = \tilde{F} \begin{bmatrix} z \\ \lambda \end{bmatrix} \quad (20)$$

으로 변환된다. 여기서 기호( $\tilde{\cdot}$ )는 대각행렬화된 시스템과 변수를 나타내고  $\tilde{Q} = T^T Q T$ ,  $\tilde{B} = T^{-1} B$ ,

$$\tilde{V} = \tilde{B} R^{-1} \tilde{B}^T = \begin{bmatrix} \tilde{v}_{11} & \tilde{v}_{12} & \cdots & \tilde{v}_{1n} \\ \tilde{v}_{12} & \tilde{v}_{22} & \cdots & \tilde{v}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{v}_{1n} & \tilde{v}_{2n} & \cdots & \tilde{v}_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{이다. 그리고}$$

해밀토니안 시스템의 근은 s평면의 좌반면과 우반면에 각각  $n$ 개씩 위치하며 허수축에 대칭이다[2,9].

## 2.4 조단 블록을 갖는 중근과 상태가중행렬의 관계식(두 실근으로 이동)

조단 블록을 갖는 중근( $\lambda_d$ )이 LQ 제어에 의해 폐루프의 두 실근( $r_1, r_2$ )으로 이동한다고 가정하면 해밀토니안 시스템의 대칭성에 의해  $\lambda_d^2 \neq r_1^2$ ,  $\lambda_d^2 \neq r_2^2$ 의 조건이 얻어진다. 그리고 대각행렬  $A_{dj}$ 와 관계된 상태가중행렬을

$$\tilde{Q}_{dj} = \begin{bmatrix} \tilde{q}_{11} & \tilde{q}_{12} & 0 & \cdots & 0 \\ \tilde{q}_{12} & \tilde{q}_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad (21)$$

로 정의하면, 3개의 미지수( $\tilde{q}_{11}$ ,  $\tilde{q}_{12}$ ,  $\tilde{q}_{22}$ )는

$$\begin{aligned} \tilde{q}_{11} &= \rho \cos^2 \theta \\ \tilde{q}_{12} &= \rho \cos \theta \sin \theta \\ \tilde{q}_{22} &= \rho \sin^2 \theta \end{aligned} \quad (22)$$

의 삼각함수에 의해 2개의 미지수( $\rho$ ,  $\theta$ )로 표현된다 [4~7]. 여기서  $\theta$ 의 범위는  $-\pi \leq \theta < \pi$ 이다.

식 (20)에  $\tilde{Q}_{dj}$ 를 대입하여 정리하면

$$|sI - \tilde{F}| = \begin{vmatrix} s - \lambda_d & -1 & \tilde{v}_{11} & \tilde{v}_{12} \\ 0 & s - \lambda_d & \tilde{v}_{12} & \tilde{v}_{22} \\ \tilde{q}_{11} & \tilde{q}_{12} & s + \lambda_d & 0 \\ \tilde{q}_{12} & \tilde{q}_{22} & -1 & s + \lambda_d \end{vmatrix} \quad (23)$$

$$\times \prod_{i=3}^n (s + \lambda_i)(s - \lambda_i) = 0$$

이 되고,  $\tilde{V}$ 를 수식으로 표현하면

$$\begin{aligned} \tilde{v}_{11} &= r_{11} \tilde{b}_{11}^2, \quad \tilde{v}_{22} = r_{11} \tilde{b}_{21}^2 \\ \tilde{v}_{12} &= \tilde{v}_{21} = r_{11} \tilde{b}_{11} \tilde{b}_{21} \end{aligned} \quad (24)$$

가 된다. 더구나 시스템이 제어가능하면  $\tilde{B}$ 의 요소  $\tilde{b}_{11}$ ,  $\tilde{b}_{12}$ 는 0이 될 수 없다. 따라서  $\tilde{v}_{11} > 0$ ,  $\tilde{v}_{22} > 0$ 과  $\tilde{v}_{11} \tilde{v}_{22} - \tilde{v}_{12}^2 = 0$ 의 결과가 얻어진다. 한편 두 실근( $r_1, r_2$ )이 식 (23)의 해라는 조건에서 중근과 가중행렬의 관계식( $\rho$ ,  $\theta$ )이 유도된다[10].

첫 번째 관계식  $\rho$ 는

$$\rho = \frac{\rho_{dnum4}}{\rho_{dden4}} = \frac{\rho_{dnum5}}{\rho_{dden5}} \quad (25)$$

이다. 여기서  $\rho_{dnum4} = e_{d44}$ ,  $\rho_{dnum5} = e_{d54}$ ,

$$\rho_{dden4} = e_{d41} \cos^2 \theta + e_{d42} \cos \theta \sin \theta + e_{d43} \sin^2 \theta,$$

$$\rho_{dden5} = e_{d51} \cos^2 \theta + e_{d52} \cos \theta \sin \theta + e_{d53} \sin^2 \theta,$$

$$e_{d41} = \tilde{v}_{11}, \quad e_{d42} = 2\tilde{v}_{12}, \quad e_{d43} = \tilde{v}_{22},$$

$$e_{d44} = r_1^2 + r_2^2 - 2\lambda_d^2, \quad e_{d51} = \lambda_d^2 \tilde{v}_{11} - 2\lambda_d \tilde{v}_{12} + \tilde{v}_{22}$$

$$e_{d52} = 2(\lambda_d^2 \tilde{v}_{12} - \lambda_d \tilde{v}_{22}), \quad e_{d53} = \lambda_d^2 \tilde{v}_{22},$$

$e_{d54} = r_1^2 r_2^2 - \lambda_d^4$ 이다. 변수  $e$ 의 첨자( $dxy$ ) 중에서  $d$ 는 중근(double),  $x=4$ 이면 관계식  $\rho$ 의 첫 번째 식,  $x=5$ 이면 두 번째 식을 표시하고  $y$ 는 각 변수의 일련 번호이다.

그런데 식 (25)의 분모가 0이 되면 계산이 불가능하다. 그래서 분모가 어떤 값을 가지는지 확인이 필요하다.

$\rho_{dden4}$ 를 구성하는  $e_{d41} \cos^2 \theta$ 와  $e_{d43} \sin^2 \theta$ 는  $\tilde{v}_{11} > 0$ 와  $\tilde{v}_{22} > 0$ 에 의해

$$e_{d41} \cos^2 \theta \geq 0, \quad e_{d43} \sin^2 \theta \geq 0 \quad (26)$$

이 되고,  $e_{d41} \cos^2 \theta$ 와  $e_{d43} \sin^2 \theta$ 의 산술평균-기하평균

부등식 관계에  $\tilde{v}_{11} \tilde{v}_{22} - \tilde{v}_{12}^2 = 0$ 을 적용하면

$$e_{d41}\cos^2\theta + e_{d43}\sin^2\theta \geq 2\sqrt{e_{d41}e_{d43}\cos^2\theta\sin^2\theta} = \sqrt{e_{d42}^2\cos^2\theta\sin^2\theta} \quad (27)$$

이 얻어진다. 제곱근을 풀고 이항하여 정리하면

$$0 \leq e_{d41}\cos^2\theta + e_{d42}\cos\theta\sin\theta + e_{d43}\sin^2\theta \leq 2(e_{d41}\cos^2\theta + e_{d43}\sin^2\theta) \quad (28)$$

이 되어  $\rho_{dden4} \geq 0$ 이 된다.

또한  $e_{d51}$ 의  $\lambda_d^2\tilde{v}_{11} \geq 0$ 와  $\tilde{v}_{22} > 0$ 이라서  $\lambda_d^2\tilde{v}_{11}$ 와  $\tilde{v}_{22}$ 에 같은 방법을 적용하면

$$\lambda_d^2\tilde{v}_{11} + \tilde{v}_{22} \geq 2\sqrt{\lambda_d^2\tilde{v}_{11}\tilde{v}_{22}} = 2\sqrt{\lambda_d^2\tilde{v}_{12}^2} \quad (29)$$

가 된다. 제곱근을 풀고 이항하여 정리하면

$$0 \leq \lambda_d^2\tilde{v}_{11} - 2\lambda_d\tilde{v}_{12} + \tilde{v}_{22} \leq 2(\lambda_d^2\tilde{v}_{11} + \tilde{v}_{22}) \quad (30)$$

이 되어  $e_{d51} \geq 0$ 된다. 또한  $e_{d53} = \lambda_d^2\tilde{v}_{22} > 0$ 이 되어 분모  $\rho_{dden5}$ 를 구성하는  $e_{d51}\cos^2\theta$ 와  $e_{d53}\sin^2\theta$ 는

$$e_{d51}\cos^2\theta \geq 0, e_{d53}\sin^2\theta \geq 0 \quad (31)$$

이 된다.  $e_{d51}\cos^2\theta$ 와  $e_{d53}\sin^2\theta$ 의 산술평균-기하평균 부등식 관계에  $\tilde{v}_{11}\tilde{v}_{22} - \tilde{v}_{12}^2 = 0$ 을 적용하면

$$\frac{e_{d51}\cos^2\theta + e_{d53}\sin^2\theta}{2\sqrt{e_{d51}e_{d53}\cos^2\theta\sin^2\theta}} = \sqrt{e_{d52}^2\cos^2\theta\sin^2\theta} \quad (32)$$

가 된다. 제곱근을 풀고 이항하여 정리하면

$$0 \leq e_{d51}\cos^2\theta + e_{d52}\cos\theta\sin\theta + e_{d53}\sin^2\theta \leq 2(e_{d51}\cos^2\theta + e_{d53}\sin^2\theta) \quad (33)$$

이 되어  $\rho_{dden5} \geq 0$ 이 된다.

또한 2차 함수의 특성을 이용하여 분모의 최소값을 구하기 위해 식 (25)를 하나의 식으로 정리하면

$$e_{d61}\cos^2\theta + e_{d62}\cos\theta\sin\theta + e_{d63}\sin^2\theta = 0 \quad (34)$$

가 된다. 여기서  $e_{d61} = e_{d44}e_{d51} - e_{d54}e_{d41}$ ,

$e_{d62} = e_{d44}e_{d52} - e_{d54}e_{d42}$ ,  $e_{d63} = e_{d44}e_{d53} - e_{d54}e_{d43}$ 이다. 그리고 변수  $e$ 의 첨자( $d6y$ )에서  $d$ 는 중근(double), 6은 두 관계식의 합친 식을 의미하고,  $y$ 는 변수의 일련 번호이다.

그리고  $\cos\theta$ 가 0이 되는지 알아보기 위해  $\cos\theta = 0$ 라고 가정한다. 그러면  $\theta = \pm\pi/2$  되며, 이 조건을 식 (34)에 대입하면  $e_{d63} = 0$ 이 된다.  $e_{d63}$ 을 전개하면

$$e_{d63} = e_{d44}e_{d53} - e_{d54}e_{d43} = -\tilde{v}_{22}(\lambda_d^2 - r_1^2)(\lambda_d^2 - r_2^2) \quad (35)$$

가 된다.  $\lambda_d^2 \neq r_1^2$ ,  $\lambda_d^2 \neq r_2^2$ 의 조건과  $\tilde{v}_{22} > 0$ 에 의해  $e_{d63}$ 는 0이 될 수 없다.  $\cos\theta = 0$ 라는 가정은 거짓이 되

어  $\cos\theta \neq 0$ 이어야한다. 따라서 식 (34)는  $\cos^2\theta$ 로 나누면  $\tan\theta$ 의 2차 방정식이 되고, 이 방정식의 해를 구하면

$$\tan\theta = \frac{-e_{d62} \pm \sqrt{e_{d62}^2 - 4e_{d61}e_{d63}}}{2e_{d63}} \quad (36)$$

이 된다. 이 식에서 두 번째 관계식  $\theta$ 가

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{-e_{d62} \pm \sqrt{e_{d62}^2 - 4e_{d61}e_{d63}}}{2e_{d63}}\right) \quad (37)$$

로 표현된다.

또한  $\rho_{dden4}$ 의 식을  $\cos\theta$ 로 묶어서 정리하면

$$\rho_{dden4} = \cos^2\theta(e_{d43}\tan^2\theta + e_{d42}\tan\theta + e_{d41}) = \cos^2\theta\rho_{d4} \quad (38)$$

이 된다. 여기서  $\rho_{d4} = e_{d43}\tan^2\theta + e_{d42}\tan\theta + e_{d41}$ 이다.  $\cos\theta \neq 0$ 이라서  $\rho_{dden4}$ 가 최소가 되는 조건은  $\rho_{d4}$ 가 최소가 되는 것과 같다. 미분을 이용하면 최소값은

$$\theta_{\min4} = \tan^{-1}\left(-\frac{e_{d42}}{2e_{d43}}\right) \text{ 일 때 } \frac{\tilde{v}_{11}\tilde{v}_{22} - \tilde{v}_{12}^2}{\tilde{v}_{22}} \text{ 이 된다.}$$

$\tilde{v}_{11}\tilde{v}_{22} - \tilde{v}_{12}^2 = 0$ 라서  $\rho_{d4}$ 의 최소값은 0이 된다. 그런데

$\theta_{\min4}$ 와  $\tilde{v}_{11}\tilde{v}_{22} - \tilde{v}_{12}^2 = 0$ 의 조건은 식 (37)을 충족시키지 못하기 때문에  $\rho_{d4}$ 의 최소값은 0이 될 수 없다. 즉

$\rho_{dden4} \neq 0$ 이 된다. 또한  $\rho_{dden5}$ 의 식에서 ①  $\lambda_d = 0$ 이

면  $e_{d51} = \tilde{v}_{22}\cos^2\theta$ ,  $e_{d52} = 0$ ,  $e_{d53} = 0$ 이 되어

$\rho_{dden5} = \tilde{v}_{22}\cos^2\theta$ 이 된다. 그런데  $\cos\theta \neq 0$ 이고

$\tilde{v}_{22} > 0$ 이라서  $\rho_{dden5}$ 는 0이 될 수 없다. 그리고 ②

$\lambda_d \neq 0$ 이면  $\rho_{dden5}$ 를  $\cos\theta$ 를 묶어내서 정리하면

$$\rho_{dden5} = \cos^2\theta(e_{d53}\tan^2\theta + e_{d52}\tan\theta + e_{d51}) = \cos^2\theta\rho_{d5} \quad (39)$$

가 된다. 여기서  $\rho_{d5} = e_{d53}\tan^2\theta + e_{d52}\tan\theta + e_{d51}$ 이

다.  $\cos\theta \neq 0$ 이라서  $\rho_{dden5}$ 가 최소가 되는 조건은  $\rho_{d5}$ 가 최소가 되는 것과 같다. 미분을 이용하면 최소값은

$$\theta_{\min5} = \tan^{-1}\left(-\frac{e_{d52}}{2e_{d53}}\right) \text{ 일 때 } \frac{\lambda_d^2}{\tilde{v}_{22}}(\tilde{v}_{11}\tilde{v}_{22} - \tilde{v}_{12}^2) \text{ 이}$$

된다.  $\tilde{v}_{11}\tilde{v}_{22} - \tilde{v}_{12}^2 = 0$ 라서  $\rho_{d5}$ 의 최소값은 0이 된다.

그런데  $\theta_{\min5}$ 과  $\tilde{v}_{11}\tilde{v}_{22} - \tilde{v}_{12}^2 = 0$ 의 두 조건은 식 (37)

을 충족시키지 못하기 때문에  $\rho_{d5}$ 의 최소값은 0이 될 수 없다. ①과 ②에 의해  $\rho_{dden5} \neq 0$ 이다.

따라서 관계식  $\rho$ 의 분모 범위는 식 (40)이 된다.

$$\rho_{d44} > 0, \rho_{d45} > 0 \quad (40)$$

### 2.5 조단 블록을 갖는 중근의 이동범위

유도된 관계식에 의해 시스템의 중근이 이동할 수 있는 페루프 두 실근의 영역을 좌표평면에 표시한 것이 중근의 이동범위이다.

#### 2.5.1 양의 반한정대칭행렬이 될 $\rho$ 의 조건

식 (21)의  $\det(\tilde{Q}_{dj}) = \tilde{q}_{11}\tilde{q}_{22} - \tilde{q}_{12}^2 = 0$ 이기 때문에  $\tilde{Q}_{dj}$ 가 양의 반한정행렬이 되기 위해서는  $\tilde{Q}_{dj}$ 의 첫 번째 피벗(pivot)인  $\tilde{q}_{11} = \rho \cos^2\theta$ 는 양수가 되어야 한다[8].  $\cos\theta \neq 0$ 이어서  $\tilde{q}_{11}$ 가 양수가 되려면  $\rho > 0$ 이어야 한다. 또한  $\tilde{Q}_{dj}$ 가 양의 반한정행렬이 되려면 식 (25)의 분모가 양수이기 때문에 분자인  $\rho_{dnum4} > 0, \rho_{dnum5} > 0$ 이 되어야 한다.

$\rho_{dnum4} = e_{d44} = r_1^2 + r_2^2 - 2\lambda_d^2$ 가 양수가 될 조건은

$$r_1^2 + r_2^2 > (\sqrt{2}\lambda_d)^2 \quad (41)$$

이고,  $\rho_{dnum5} = e_{d54} = r_1^2 r_2^2 - \lambda_d^4$ 가 양수가 될 조건은

$$r_1^2 r_2^2 > \lambda_d^4 \quad (42)$$

이다[11].

#### 2.5.2 $\theta$ 가 실수가 될 조건

$\theta$ 를 구하는 식 (37)의  $e_{d62}^2 - 4e_{d61}e_{d63}$ 을 정리하면

$$e_{d62}^2 - 4e_{d61}e_{d63} = -4(\tilde{v}_{11}\tilde{v}_{22} - \tilde{v}_{12}^2)(\lambda_d^2 e_{d44} - e_{d54})^2 + 4e_{d44}e_{d54} \quad (43)$$

이 되고,  $\tilde{v}_{11}\tilde{v}_{22} - \tilde{v}_{12}^2 = 0$ 과  $e_{d44} > 0, e_{d54} > 0$ 에 의해  $e_{d62}^2 - 4e_{d61}e_{d63} > 0$ 이 된다.  $r_1$ 과  $r_2$ 에 관계없이 식 (37)의 제곱근이 양수되어  $\theta$ 가 실수가 될 제한 조건은 없다.

#### 2.5.3 중근의 이동범위

중근( $\lambda_d$ )이 이동할 수 있는 두 실근( $r_1, r_2$ )의 영역이 중근의 이동범위이다. 이 범위는 안정한 시스템이 되기 위해  $r_1$ 과  $r_2$ 가 음수가 되는 영역과 식 (41)과 식 (42)을 동시에 만족하는 영역의 공통부분이다. [그림 3]은  $r_1$ 과  $r_2$ 축으로 하는 좌표평면에 각각의 영역을 표시한 것으로 (a) 영역은 식 (41)에서 그려지는 원의 바깥쪽 영역,

(b) 영역은 식 (42)가 나타내는 쌍곡선의 안쪽 영역, (c) 영역은  $r_1$ 과  $r_2$ 가 동시에 음수가 되는 영역이다. 이 3가지 조건을 만족하는 영역이 중근의 이동범위(Moving-Range)가 된다.

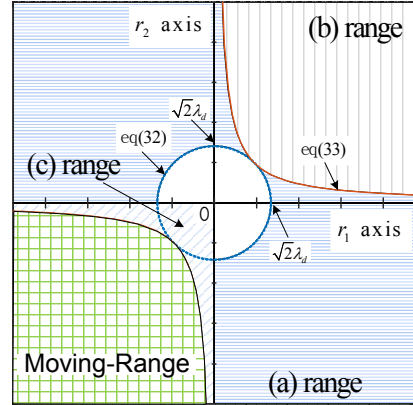


Fig. 3. Pole's Moving-Range of a double poles

## 3. 예제

제시한 방법을 적용하기 위해 조단 블록을 갖는 중근과 실근으로 구성된 3차 시스템을 예제로 선택하였다. 적용할 시스템을

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (44)$$

라고 가정하면 시스템 근은  $-2, -2, -3$ 이 된다. 먼저 제시한 방법을 이용하여 중근( $-2$ )를 두 실근( $-5, -6$ )으로, 다음으로 Solheim의 방법으로  $-3$ 을  $-7$ 로 이동시키는 제어법칙을 계산한다. 우선 제어가중행렬  $R$ 을  $r_{11} = 0.5$ 로 설정하고 1단계로 중근( $-2$ )이  $\lambda_1$ 과  $\lambda_2$ 이 되도록 하는 변환행렬을

$$T_{dj} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (45)$$

로 선택하면 시스템 방정식의 행렬  $A$ 는 대각행렬

$$A_{dj} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \quad (46)$$

으로 변환된다. 중근을 이동할 상태가중행렬을

$$\tilde{Q}_{dj} = \begin{bmatrix} \tilde{q}_{11} & \tilde{q}_{12} & 0 \\ \tilde{q}_{12} & \tilde{q}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (47)$$

이라 하면 여기서  $\tilde{q}_{11} = \rho \cos^2 \theta$ ,  $\tilde{q}_{12} = \rho \cos \theta \sin \theta$ ,  $\tilde{q}_{22} = \rho \sin^2 \theta$ 이다. 그리고  $\tilde{V}_{dj}$ 를 계산하면

$$\tilde{V}_{dj} = \begin{bmatrix} 4.5000 & 1.5000 & -4.5000 \\ 1.5000 & 0.5000 & -1.5000 \\ -4.5000 & -1.5000 & 4.5000 \end{bmatrix} \quad (48)$$

이 되고, 조단 블록을 갖는 중근의 이동범위는

$$r_1^2 + r_2^2 > (2\sqrt{2})^2 \quad (49)$$

$$r_1^2 r_2^2 > 16 \quad (50)$$

이다. 이를 그림으로 표현하면 [그림 4]가 된다. 이 범위에서 원하는 근으로  $r_1$ 은  $-5$ ,  $r_2$ 는  $-6$ 으로 선택하여 식 (37)에 대입하면 2개의  $\theta$ 가 얻어진다.

$$\theta_1 = -72.4625, \theta_2 = -68.3568 \quad (51)$$

$\theta$ 를 식 (25)에 대입하면  $\rho$ 가 계산된다.

$$\rho_1 = 4.3212 \times 10^4, \rho_2 = 3.3843 \times 10^3 \quad (52)$$

$\theta_1 = -72.4625$  과  $\rho_1 = 4.3212 \times 10^4$ 으로부터 구해지는 상태가중행렬  $\tilde{Q}_{dj1}$ 와  $Q_{dj1} (= T^{-T_{dj}} \tilde{Q}_{dj1} T^{-1_{dj}})$ 는

$$\tilde{Q}_{dj1} = \begin{bmatrix} 3923.6258 & -12415.7839 & 0 \\ -12415.7839 & 39288.0712 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (53)$$

$$Q_{dj1} = \begin{bmatrix} 3923.6258 & -4568.5323 & 0 \\ -4568.5323 & 5319.4387 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (54)$$

이고,  $\theta_2 = -68.3568$  과  $\rho_2 = 3.3843 \times 10^3$ 으로부터

구해지는  $\tilde{Q}_{dj2}$ 와  $Q_{dj2} (= T^{-T_{dj}} \tilde{Q}_{dj2} T^{-1_{dj}})$ 는

$$\tilde{Q}_{dj2} = \begin{bmatrix} 460.3742 & -1160.2161 & 0 \\ -1160.2161 & 2923.9288 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (55)$$

$$Q_{dj2} = \begin{bmatrix} 460.3742 & -239.4677 & 0 \\ -239.4677 & 124.5613 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (56)$$

이다. 상태가중행렬이 달라도 제어법칙  $K_1$ 은

$$K_1 = [12.0 \quad -5.0 \quad 0.0] \quad (57)$$

과 같다[1,10]. 제어법칙을 포함한 시스템의 근은

$$\text{eig}(A - BK_1) = -5, -6, -3 \quad (58)$$

이다. [그림 5]처럼 중근( $-2$ )은 두 실근( $-5, -6$ )으로 이동되었다. 2단계로  $A_2$ 를 계산하면

$$A_2 = A - BK_1 = \begin{bmatrix} -14 & 6 & 0 \\ -12 & 3 & 0 \\ -13 & 3 & -3 \end{bmatrix} \quad (59)$$

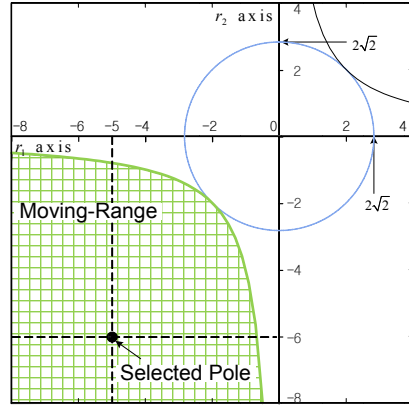


Fig. 4. Pole's Moving-Range of  $\lambda_d = -2$

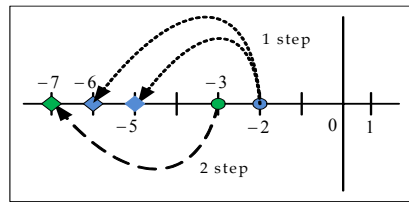


Fig. 5. Move system poles to closed-loop poles

가 되고,  $-3$ 의 근이 대각행렬의 처음 위치에 오게 하는 변환행렬을

$$T_{dr} = \begin{bmatrix} 0 & 0.2166 & 0.2914 \\ 0 & 0.3249 & 0.3885 \\ 1 & 0.9206 & 0.8742 \end{bmatrix} \quad (60)$$

으로 설정하면 시스템 방정식의 행렬  $A_2$ 는

$$A_{dr} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix} \quad (61)$$

로 변환되고  $-3$ 을 이동시킬 상태가중행렬을

$$\tilde{Q}_{dr} = \begin{bmatrix} \tilde{q}_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (62)$$

라 하고, 이동할 페루프 근을  $-7$ 로 선택하여 Solheim의 방법으로  $\tilde{q}_r$ 을 계산하면

$$\tilde{q}_r = 320 \quad (63)$$

이 된다[2]. 그래서  $\tilde{Q}_{dr}$ 와  $Q_{dr} (= T^{-T_{dr}} \tilde{Q}_{dr} T^{-1_{dr}})$ 는

$$\tilde{Q}_{dr} = \begin{bmatrix} 320 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (64)$$

$$Q_{dr} = \begin{bmatrix} 15680 & -16800 & 2240 \\ -16800 & 18000 & -2400 \\ 2240 & -2400 & 320 \end{bmatrix} \quad (65)$$

가 되고, 제어법칙  $K_2$ 는

$$K_2 = [56.0 \quad -60.0 \quad 8.0] \quad (66)$$

이 된다. 또한  $K_2$ 가 포함된 시스템 근을 구하면

$$eig(A_2 - BK_2) = -5, -6, -7 \quad (67)$$

이 된다. [그림 5]처럼  $-3$ 은 선택한  $-7$ 로 이동되었다.

따라서 최종적으로 구해지는 2개의  $Q$ 는

$$Q_1 = Q_{d1} + Q_{dr} = \begin{bmatrix} 19603.6258 & -21368.5323 & 2240.0000 \\ -21368.5323 & 23319.4387 & -2400.0000 \\ 2240.0000 & -2400.0000 & 320.0000 \end{bmatrix} \quad (68)$$

$$Q_2 = Q_{d2} + Q_{dr} = \begin{bmatrix} 16140.3742 & -17039.4677 & 2240.0000 \\ -17039.4677 & 18124.5613 & -2400.0000 \\ 2240.0000 & -2400.0000 & 320.0000 \end{bmatrix} \quad (69)$$

이고, 제어법칙  $K$ 는

$$K = K_1 + K_2 = [68 \quad -65 \quad 8] \quad (70)$$

이다. 이는 각 단계에서 구해진 값의 합이다.

제어법칙  $K$ 를 적용한 폐루프 시스템 근은

$$eig(A - BK) = -5, -6, -7 \quad (71)$$

이 된다. 그리고 식 (71)의 결과에서 보듯이 시스템의 근을 정확히 원하는 곳으로 이동시켰다. 또한 같은 제어가 중행렬을 사용한다면 Solheim, Fujinaka 등의 방법도 함께 적용할 수 있으며, 식 (14)에 의해  $n$ 차 시스템까지 확장할 수 있다. 또한 제시한 방법은 중근의 이동범위에서 설계조건을 만족하는 근을 선택하고 이를 근과 가중행렬의 관계식에 대입하여 상태가중행렬을 계산하기 때문에 시행착오 방법으로 구하는 기존 방식의 문제점을 해결함과 동시에 정확한 극배치까지 가능하다.

#### 4. 결론

본 논문에서는 좌표평면에 그려진 조단 블록을 갖는 중근의 이동범위에서 두 실근을 선택 한 후 근과 가중행렬의 관계식( $\rho, \theta$ )에 대입하여 상태가중행렬과 제어법칙을 설계하는 방법에 따라 3차 시스템을 대상으로 1단계에서 시스템의 중근( $-2$ )을 두 실근( $-5, -6$ )으로, 2

단계에서는  $-3$ 을  $-7$ 로 이동시키는 상태가중행렬과 제어법칙을 계산하였다. 이를 통해 기존 시행착오 방식의 문제점을 해결과 기존 연구들과 함께 적용하면  $n$ 차 시스템까지 확장할 수 있다. 그리고 불안정하거나 설계 사양을 만족하지 않는 시스템의 근을 원하는 근으로 정확히 이동시켜 시스템을 안정하게 하고, 응답특성을 개선하는데 적용 할 수 있을 것이다.

제시한 방법은 조단 블록을 갖는 중근과 폐루프의 두 실근으로부터 관계식을 유도하여 중근을 두 실근으로 이동에만 적용 가능하여 폐루프의 복소근으로 이동이나, 삼중근의 이동에는 적용할 수가 없다. 추후 이 부분에 대한 연구가 필요할 것 같다.

#### References

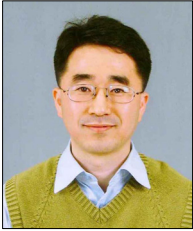
- [1] B. D. O. Anderson, J. B. Moore, Optimal Control, Prentice-Hall, 1989.
- [2] O. A. Solheim, "Design of optimal control systems with prescribed eigenvalues," Int. J. Control, vol. 15, no. 1, pp. 143-160, 1972.  
DOI: <https://doi.org/10.1080/00207177208932136>
- [3] Y. Ochi, K. Kanai, "Pole Placement in Optimal Regulator by Continuous Pole-Shifting," Journal of Guidance, Control, and Dynamics, vol. 18, no. 6, pp. 1253-1258, 1995.  
DOI: <https://doi.org/10.2514/3.21538>
- [4] T. Fujinaka and S. Omatu, "Pole placement using optimal regulators," T.IEE japan, vol. 121-C, no. 1, pp. 240-245, 2001.
- [5] M. Park, S.K. Hong, S.H. Lee, "Design of an LQR Controller Considering Pole's Moving-Range", Journal of Control, Automation and System Engineering, Vol. 11, no. 10, pp. 864-869, 2005.  
DOI: <https://doi.org/10.5302/J.ICROS.2005.11.10.864>
- [6] M. Park, M.S. Park, D. Park, S.K. Hong, S.H. Lee, "LQR Controller Design with Pole-Placement," Journal of Control, Automation and System Engineering, Vol. 13, No. 6, pp. 574-580, 2007.  
DOI: <https://doi.org/10.5302/J.ICROS.2007.13.6.574>
- [7] Minh Park, "Pole Placement by an LQ Controller," Journal of Control, Automation and System Engineering Vol. 15, No. 3, pp. 249-254, 2009.  
DOI: <https://doi.org/10.5302/J.ICROS.2009.15.3.249>
- [8] G. Strang, Linear Algebra and its applications, 3rd Ed., Harcourt Brace & Company, 1988.
- [9] J. B. Burl, Linear Optimal Control:  $H_2$  and  $H_\infty$  Methods, Addison Wesley Longman, 1999.
- [10] Minh Park, "Pole Placement Method of a System having a Jordan Block by Optimal Control: Shifting a Double Poles to two Real Poles," Proc. of the KAIS Fall Conference of KAIS, pp. 531-533, 2015.



- [11] Minho Park, "Pole Placement Method of a System having a Jordan Block by Optimal Control: Two Real Pole's Moving Range," *Proc. of the KAIS Fall Conference of KAIS*, pp. 625-627, 2016.
- 

박 민 호(Minho Park)

[종신회원]



- 1993년 2월 : 아주대학교 대학원  
제어계측공학과 (공학석사)
- 1993년 3월 ~ 1998년 6월 :  
㈜한미반도체 연구원
- 2007년 8월 : 아주대학교 대학원  
전자공학과 (공학박사)
- 2008년 3월 ~ 현재 : 충남도립대학교  
전기전자과 부교수

<관심분야>

최적제어, Robust Control, 공장자동화