

일반유한요소법을 이용한 집중소성힌지 모델링

손 흥 준¹ · 이 승 호¹ · 김 대 진^{1*}

¹경희대학교 건축공학과

Plastic Hinge Modeling Based on Lumped Plasticity using a Generalized Finite Element Method

Hong-Jun Son¹, Seung-Ho Rhee¹ and Dae-Jin Kim^{1*}

¹Department of Architectural Engineering, Kyung Hee Univ., Yongin, 17104, Korea

Abstract

This paper presents a generalized finite element formulation for plastic hinge modeling based on lumped plasticity in the classical Euler-Bernoulli beam elements. In this approach, the plastic hinges are effectively modeled using proper enrichment functions describing weak discontinuities of the solution. The proposed methodology enables the insertion of plastic hinges at an arbitrary location without modifying the connectivity of elements. The formations of plastic hinges are instead achieved by hierarchically adding degrees of freedom to existing elements. Convergence analyses such as h - and p -extensions are performed to investigate the effectiveness of the proposed method. The analysis results indicate that the proposed generalized finite element method can achieve theoretical convergence rates for both cases where plastic hinges are located at nodes and within an element, thus demonstrating its accuracy.

Keywords : generalized finite element method, lumped plasticity, plastic hinge, convergence rate

1. 서 론

최근 전 세계적으로 지진, 쓰나미, 태풍, 테러리스트 공격 등과 같은 재해로 인한 구조물의 붕괴사고(Sozen *et al.*, 1998; Wu *et al.*, 2004)가 증가하는 추세에 있으며, 이는 일반적으로 많은 인명 및 재산 피해를 야기한다. 따라서 이와 같은 피해를 최소화시키기 위해 재해로 인하여 발생하는 극단적인 하중 조건에 대해 구조물을 안전하게 설계하는 기술의 개발이 필요하다. 유한요소법(finite element method)은 이와 같은 목표를 달성하는데 대단히 유용한 도구로 컴퓨터 하드웨어 기술의 발전과 더불어 그 중요성이 점점 더 커지고 있다.

일반적으로 유한요소법을 이용한 보 혹은 프레임 구조물의 붕괴 시뮬레이션은 소성힌지의 연속적인 형성으로 진행된다. 소성힌지는 보통 집중 혹은 분포소성이론 중 하나에 근거해 모델링된다. 집중소성힌지는 소성변형이 오직 힌지 발생 위치에

집중되어 내부힌지 혹은 편으로 모델링이 가능하다. 이 경우 소성힌지가 발생한 위치에서 보 요소의 변위는 연속이지만 그 회전은 불연속이 된다. 반면 분포소성이론에 근거한 소성힌지는 소성변형이 유한한 길이의 보 요소의 항복영역(yield zone)에 걸쳐 나타나 변위에 높은 기울기가 발생하나 불연속이 되지는 않는다. 일반적으로 분포소성이론에 근거한 소성힌지 모델링이 더 정확한 결과를 가져다주지만, 집중소성힌지는 모델링이 훨씬 더 간단하여 구조물 전체의 붕괴를 일련의 선형 해석과정으로 시뮬레이션 하는 1차 소성힌지 해석(first-order plastic hinge analysis)에 널리 쓰이고 있다(Chen *et al.*, 2013).

본 논문은 집중소성모델에 근거한 소성힌지를 일반유한요소법(generalized finite element)을 활용해 모델링하는 방법을 제시한다. 일반유한요소법 혹은 확장유한요소법(extended finite element method)은 원래 균열전파문제를 효율적으로 다루기 위해 개발되었으나(Fries *et al.*, 2010) 해에 대한

* Corresponding author:

Tel: +82-31-201-3329; E-mail: dkjim@khu.ac.kr
Received October 29 2018; Revised October 31 2018;
Accepted November 1 2018

©2018 by Computational Structural Engineering Institute of Korea

This is an Open-Access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution Non-Commercial License(<http://creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0>) which permits unrestricted non-commercial use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.

정보를 미리 알 수 있는 복합재료해석, 열역학해석 등 다양한 분야의 문제를 효과적으로 해결하는데 널리 적용되어 왔다. 본 논문에서는 고전적인 오일러-베르누이 보의 집중소성헌지 모델링을 위한 일반유한요소법을 제안한다. 이 기법은 소성헌지해의 약불연속을 묘사하는 적절한 확장함수를 이용해 모델링하며, 요소간의 연결성을 변화시키지 않으면서 임의의 위치에 소성헌지를 삽입할 수 있다. 소성헌지는 이미 존재하는 요소에 위계적으로 자유도를 추가함으로써 형성된다. 제안된 일반유한요소법의 정확성 및 유효성을 3장 수치해석 예제에서 수행된 수렴성 해석의 결과를 통해 검증한다.

2. 일반유한요소법을 이용한 소성헌지 모델링

본 장에서는 집중소성헌지를 모델링하기 위한 일반유한요소 이산화과정에 대해 소개한다. 고전적인 오일러-베르누이 보이론에 기반한 편미분방정식을 가상일의 원리에 근거하여 적분형으로 나타내면 다음과 같다. $\forall \delta u_h \in X(\Omega)$ 에 대하여 식 (1)로 나타난 적분식을 만족하는 일반유한요소 근사해 $u_h \in X(\Omega) \subset H^2(\Omega)$, $\Omega = \{x : 0 < x < H\}$ 를 구하라:

$$\int_0^H EI \frac{d^2 u_h}{dx^2} \frac{d^2 \delta u_h}{dx^2} dx = \int_0^H q \delta u_h dx - \left[EI \frac{d^3 u_h}{dx^3} \delta u_h \right]_0^H + \left[EI \frac{d^2 u_h}{dx^2} \frac{d^2 \delta u_h}{dx^2} \right]_0^H \quad (1)$$

여기서, $X(\Omega)$ 는 영역 Ω 에 정의된 힐베르트 공간 $H^2(\Omega)$ 의 일반유한요소 이산화를 의미하며, q 는 보에 작용하는 등분포 하중, H 는 보의 길이를 의미한다. 일반유한요소 근사해 u_h 는 아래의 식에 의해 주어진다.

$$u_h(x) = \sum_{\alpha=1}^N \varphi_{\alpha} \sum_{i \in l(\alpha)} \left(L_{\alpha i} w_{\alpha i}^0 + B_{\alpha} L_{\alpha i} w_{\alpha i}^E \right) \quad (2)$$

$$= \underbrace{\sum_{\alpha=1}^N \sum_{i \in l(\alpha)} \varphi_{\alpha} L_{\alpha i} w_{\alpha i}^0}_{\text{smooth interpolation}} + \underbrace{\sum_{\alpha=1}^N \sum_{i \in l(\alpha)} \varphi_{\alpha} B_{\alpha} L_{\alpha i} w_{\alpha i}^E}_{\text{non-smooth interpolation}}$$

이 식에서 φ_{α} , $\alpha = 1, \dots, N$ 는 단위오목분할함수(partition of unity function), $L_{\alpha i}$, $i \in l(\alpha)$ 는 절점 α 에 정의된 다항 확장함수(polynomial enrichment function)이다. B_{α} 는 절점 α 에 정의된 소성헌지 확장함수이며 소성헌지가 존재하는 요소에만 사용된다. $w_{\alpha i}^0$ 와 $w_{\alpha i}^E$ 는 각각 다항 및 소성헌지 확장함수에 해당하는 자유도이다. 갈러킨법(galerkin method)에

의하면 가상변위 (δu_h) 또한 동일한 형상함수를 이용해 표현되며 아래와 같다.

$$\delta u_h(x) = \sum_{\alpha=1}^N \varphi_{\alpha} \sum_{i \in l(\alpha)} \left(l_{\alpha i} \delta w_{\alpha i}^0 + B_{\alpha} L_{\alpha i} \delta w_{\alpha i}^E \right) \quad (3)$$

위 식에서 $\delta w_{\alpha i}^0$ 와 $\delta w_{\alpha i}^E$ 는 가상변위의 자유도이다. 관련해 더 자세한 사항은 일반유한요소법에 대한 여러 참고문헌(Duarte *et al.*, 2000; Choi *et al.*, 2011; Kim *et al.*, 2012; Park *et al.*, 2018)에 수록되어 있다.

식 (1)이 변위 및 가상변위의 2차 미분항이 포함되어 있기 때문에 형상함수는 C^1 특징을 만족시켜야 하며, Fig. 1(a)에 나타난 변위와 연관된 3차의 Hermite 형상함수를 단위오목분할함수로 사용한다. 이 함수는 C^1 특징을 만족시키는 가장 간단한 단위오목분할함수이며 아래와 같이 Kronecker-delta 조건을 만족시킨다. 뿐만 아니라 절점에 정의된 φ_{α} 는 임의의 절점에서 그 미분치가 0이 된다.

$$\varphi_{\alpha}(x_{\beta}) = \delta_{\alpha\beta}, \quad (\alpha, \beta = 1, \dots, N) \quad (4)$$

$$\frac{d\varphi_{\alpha}(x_{\beta})}{dx} = 0, \quad (\alpha, \beta = 1, \dots, N) \quad (5)$$

다항차수($p=2, 3, 4$)에 대한 다항 확장함수로는 아래의 식을 사용한다

$$L_{\alpha i} = \left\{ 1, \left(\frac{x-x_{\alpha}}{h_{\alpha}} \right), \left(\frac{x-x_{\alpha}}{h_{\alpha}} \right)^2 \right\}, (p=2) \quad (6)$$

$$\left\{ 1, \left(\frac{x-x_{\alpha}}{h_{\alpha}} \right), \left(\frac{x-x_{\alpha}}{h_{\alpha}} \right)^2, \left(\frac{x-x_{\alpha}}{h_{\alpha}} \right)^3 \right\}, (p=3)$$

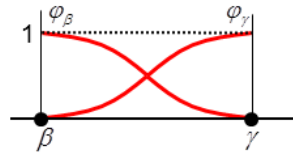
$$\left\{ 1, \left(\frac{x-x_{\alpha}}{h_{\alpha}} \right), \left(\frac{x-x_{\alpha}}{h_{\alpha}} \right)^2, \left(\frac{x-x_{\alpha}}{h_{\alpha}} \right)^3, \left(\frac{x-x_{\alpha}}{h_{\alpha}} \right)^4 \right\},$$

$$(p=4)$$

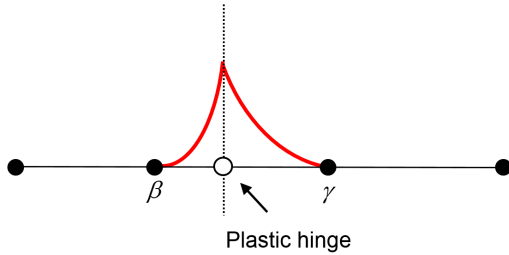
....

위의 식에서 x_{α} 는 절점 α 의 좌표, h_{α} 는 스케일링 팩터이다. 식 (6)으로 주어진 다항 확장함수를 사용함으로써 $i=1$ 및 2에 해당하는 다항 확장함수의 자유도($w_{\alpha 1}^0$ 및 $w_{\alpha 2}^0$)가 절점에서의 변위 및 회전의 물리적인 의미를 지닐 수 있다. 이에 대한 증명은 Son *et al.*(2017)에 소개된 것과 동일한 방법으로 할 수 있다. Fig. 1(b)에 소성헌지 확장함수 B_{α} 를 나타내었으며 아래의 식으로 정의된다.

$$B_{\alpha} = \sum_{\alpha=1}^2 \varphi_{\alpha} |d_{\alpha}| - \sum_{\alpha=1}^2 |\varphi_{\alpha} d_{\alpha}| \quad (7)$$



(a) Partition of unity function



(b) Enrichment function for plastic hinge modeling

Fig. 1 GFEM shape functions for plastic hinge modeling

식 (7)에서 d_α 는 절점 α 와 소성힌지 발생위치까지의 거리이며 Fig. 1(b)에 나타난 절점 β 와 γ 에 이 확장함수가 사용된다. 원래 식 (7)은 이종재료 경계에서의 약불연속(weak discontinuity)을 묘사하기 위해 Moes 등에 의해 제안되었으나(Moes *et al.*, 2003) 회전에 불연속이 발생하는 집중소성힌지의 거동을 묘사하기 위해 사용될 수 있으며, 소성힌지 발생위치에서 C^1 조건을, 그 이외의 위치에서는 C^∞ 조건을 만족한다. 뿐만 아니라 이 확장함수는 아래와 같은 조건을 만족시켜 변위경계조건을 손쉽게 적용시킬 수 있다.

$$B_\alpha(x_\beta) = 0, \quad (\alpha, \beta = 1, \dots, N) \quad (8)$$

$$\frac{dB_\alpha(x_\beta)}{dx} = 0, \quad (\alpha, \beta = 1, \dots, N) \quad (9)$$

일반유한요소법에서 형상함수는 이미 존재하는 형상함수에 위계적으로(hierarchically) 추가할 수 있기 때문에 소성힌지가 발생하기 전에는 식 (6)으로 주어진 다항 확장함수만 사용하다가 소성힌지 발생 후에는 식 (7)로 주어진 소성힌지 확장함수 항을 식 (2) 나타난 것처럼 추가할 수 있기 때문에 구조물의 점진적인 붕괴를 시뮬레이션하는 1차 소성힌지 해석(Chen *et al.*, 2013)에 유용하게 적용될 수 있다. 갈러킨법의 개념에 근거해 식 (2)와 (3)을 식 (1)에 대입함으로써 아래의 선형시스템을 얻을 수 있다.

$$(\delta \mathbf{u}^T) \left\{ \int_{-1}^1 E \mathbf{B}^T \mathbf{B} \frac{H}{2} d\xi \right\} \mathbf{u} = (\delta \mathbf{u}^T) \int_{-1}^1 w \mathbf{N}^T \frac{H}{2} d\xi, \quad (10)$$

$$u_h = \mathbf{N} \mathbf{u}, \quad \frac{du_h}{dx} = \frac{d}{dx} \mathbf{N} \mathbf{u} = \mathbf{L} \mathbf{u}, \quad \frac{d^2 u_h}{dx^2} = \frac{d}{dx} \mathbf{L} \mathbf{u} = \mathbf{B} \mathbf{u}$$

식 (10)에서 \mathbf{N} 은 형상함수행렬, \mathbf{u} 는 변위벡터이며, 표준적인 유한요소법에서와 마찬가지로 수치적분 편이성을 위해 자연좌표계(ξ)와 전체좌표계(x) 사이에 선형매핑(linear mapping)이 사용된다. 식 (10)은 다음과 같이 정리된다.

$$\mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{f} \quad (11)$$

$$\mathbf{K} = \int_{-1}^1 E \mathbf{B}^T \mathbf{B} \frac{H}{2} d\xi, \quad \mathbf{f} = \int_{-1}^1 w \mathbf{N}^T \frac{H}{2} d\xi$$

위의 식에서 \mathbf{K} 와 \mathbf{f} 는 각각 일반유한요소 형상함수를 이용해 얻어진 강성행렬 및 하중벡터이다.

3. 수치해석예제

본 장에서는 제안된 일반유한요소법의 유효성을 평가하기 위해 Fig. 2에 제시된 수치해석예제를 표준적인 유한요소법 및 제안된 일반유한요소법을 이용하여 수렴성 해석을 수행하고 그 결과를 비교 및 분석한다. 이 예제는 스펜의 중앙에 소성힌지를 가지고 있으며 구조물의 기하학적 형상 및 재료물성치는 그림에 제시되어 있다. 구조물에 선형적으로 변화하는 분포하중이 작용하며 q_0 의 값은 1이다.

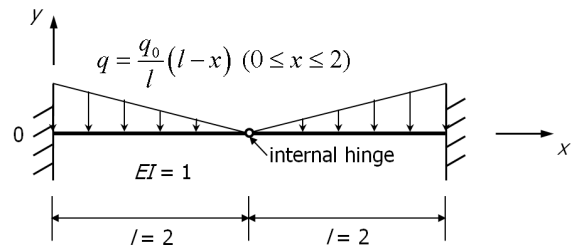


Fig. 2 Model problem with an internal hinge at span center

이 문제의 정해(u_{exact})는 식 (12)에 나타난 것처럼 5차 다항식으로 표현되며, 에너지 놈(energy norm)에 대한 수렴성 해석을 수행하기 위한 변형률 에너지의 정해(U_{exact})는 식 (13)으로 주어진다. 수렴성 해석에서 상대오차는 식 (14)를 이용해 계산한다.

$$u_{exact} = \frac{q_0 x^2}{120 l EI} (10 l^3 - 10 l^2 x + 5 l x^2 - x^3) \quad (12)$$

$$U_{exact} = \frac{2 q_0^2}{315 l^2 EI} (35 l^4 - 105 l^3 + 126 l^2 - 84 l + 24) \quad (13)$$

$$e_r^E = \sqrt{\frac{U_{exact} - U_h}{U_{exact}}} \quad (14)$$

3.1 동일 크기 짝수 개수의 요소를 지닌 경우

본 장에서는 짝수 개수의 요소를 지닌 요소망을 이용하여 수치해석 예제를 표준적인 유한요소법과 제안된 일반유한요소법을 이용하여 수렴성 해석을 수행한다. Fig. 3은 표준적인 유한요소법을 이용한 경우 h -확장 과정(h -extension procedure)에 사용되는 요소망을 보여준다. 스펀의 중앙에 위치한 소성현저를 모델링하기 위해 해당 위치의 절점에 두 개의 회전 자유도를 지니도록 요소 간의 연결성(connectivity)을 수정한다.

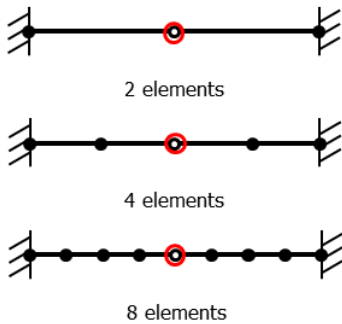


Fig. 3 Uniform mesh refinement procedure for the standard FEM analysis with an even number of elements

Table 1 H -extension results obtained using the standard FEM with an even number of elements

No. of elements	No. of DOFs	Relative error in energy norm	Slope in log-log scale
2	12	0.0000E+00	-
4	18	2.0535E-01	N/A
8	30	2.4831E-01	0.372
16	54	1.4555E-01	-0.909
32	102	7.8247E-02	-0.976
64	198	4.0516E-02	-0.992

Table 1은 3차의 Hermite 형상함수를 이용하는 표준적인 유한요소법을 적용시켜 얻은 수렴성 결과를 나타낸다. 표에 요소의 개수, 자유도 개수, 식 (14)로 정의된 에너지 놈에서의 상대오차, 로그-로그 스케일에서의 기울기를 나타내었으며 표의 결과는 Fig. 4에 그래프로 나타내었다. Szabo 등(1991)에 논의된 바와 같이 표준적인 유한요소법을 이용한 경우 수렴성 해석의 기울기는 $(p-1)=2$ 에 수렴한다.

표준적인 유한요소법을 이용한 수렴성 해석과 유사하게 2차, 3차, 4차의 다항 확장함수를 지닌 일반유한요소법을 이용해 h -확장 과정을 수행하였으며 그 결과를 Table 2부터 Table 4에 나타내었다. 해석에 사용된 요소망을 Fig. 5에 나타내었으며 표준적인 유한요소법이 경우와 달리 소성현저가 존재하는 절점에 식 (2)의 두 번째 항(non-smooth interpolation)에 해당

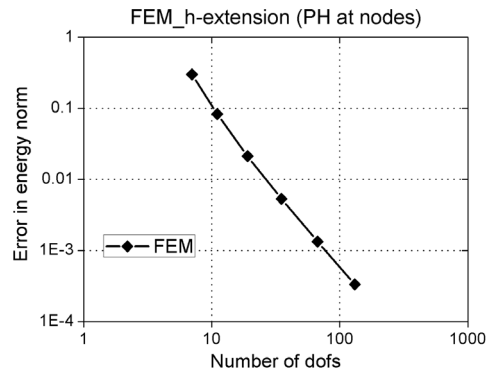


Fig. 4 Convergence results of h -extension obtained using the standard FEM with an even number of elements

하는 자유도를 추가시킴으로써 소성현저를 정확하게 묘사한다. 표의 결과는 로그-로그 스케일로 Fig. 6에 그래프로 나타내었다.

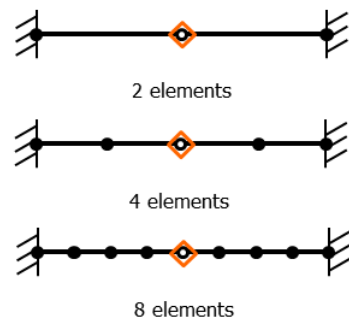


Fig. 5 Uniform mesh refinement procedure for the GFEM analysis with an even number of elements

Table 2 H -extension results obtained using the GFEM with an even number of elements and $p=2$

No. of elements	No. of DOFs	Relative error in energy norm	Slope in log-log scale
2	12	0.0000E+00	-
4	18	2.0535E-01	N/A
8	30	2.4831E-01	0.372
16	54	1.4555E-01	-0.909
32	102	7.8247E-02	-0.976
64	198	4.0516E-02	-0.992

Table 3 H -extension results obtained using the GFEM with an even number of elements and $p=3$

No. of elements	No. of DOFs	Relative error in energy norm	Slope in log-log scale
2	16	0.0000E+00	-
4	24	0.0000E+00	N/A
8	40	2.0677E-02	N/A
16	72	6.0071E-03	-2.103
32	136	1.6034E-03	-2.077
64	264	4.1352E-04	-2.043

Table 4 H -extension results obtained using the GFEM with an even number of elements and $p=4$

No. of elements	No. of DOFs	Relative error in energy norm	Slope in log-log scale
2	20	0.0000E+00	-
4	30	0.0000E+00	N/A
8	50	7.7749E-04	N/A
16	90	1.1441E-04	-3.260
32	170	1.5308E-05	-3.163
64	330	2.1261E-06	-2.976

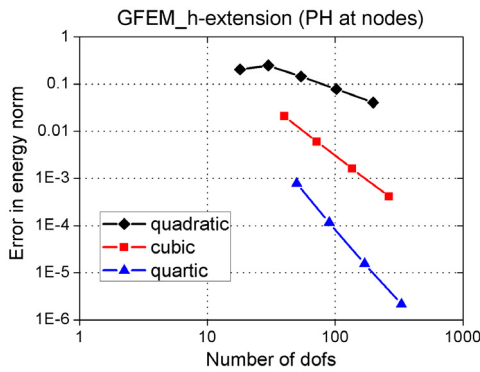


Fig. 6 Convergence results of h -extension obtained using the GFEM with an even number of elements

표와 그림의 결과로부터 몇 가지 흥미로운 분석을 수행할 수 있다. 유한요소 이론(Szabo *et al.*, 1991)에 의한 h -확장의 수렴속도(convergence rate)는 $(p-1)$ 로 주어진다. 제안된 일반유한요소 다항 확장함수 차수 $p=2,3,4$ 에 따른 최종 단계에서의 수렴속도는 각각 0.992, 2.043, 2.979이다. 이로부터 제안된 일반유한요소법의 수렴속도는 이론치와 아주 잘 일치하여 그 정확성을 입증함을 알 수 있다. 또한 Fig. 6에 나타난 바와 같이 동일 개수의 자유도를 이용할 경우 4차의 다항 확장함수를 이용한 경우($p=4$) 가장 정확한 해를 구할 수 있다. 표에 나타난 것처럼 흥미롭게도 $p=2$ 의 경우 오직 두 개의 요소를 사용한 경우 정해를 구할 수 있으며 $p=3, 4$ 의 경우 네 개의 요소를 사용해도 정해를 구할 수 있음을 알 수 있다. 이는 제안된 일반유한요소법의 단위오목분할함수가 3차의 다항식이어서 국부적으로는 다항 확장함수의 차수보다 더 높은 다항식의 해를 구할 수 있어 나타나는 현상으로 보이며 유사한 거동이(Son *et al.*, 2017)에도 논의된 바 있다. 적은 개수의 요소를 사용해 정확한 해를 구할 수 있으므로 유한요소이론에 의한 예상과 차이가 있으나 제안된 기법에 유리한 현상으로 판단된다.

Table 5에서 Table 7에 제안된 일반유한요소법으로 각각 4, 16, 64개의 요소를 활용한 p -확장(p -extension) 수렴성 해석 결과를 나타내었다. 동일 결과를 Fig. 7에 로그-로그 스케일의 그래프로 나타내었다. 다항 확장함수의 차수가 올라감

에 따라 지수함수 수렴속도(exponential convergence rate)가 나타남을 알 수 있으며, 이는 유한요소이론(Szabo *et al.*, 1991)에 의해 예측되는 바와 정확히 일치하여 제안된 일반유한요소법의 정확성을 잘 입증한다.

Table 5 P -extension results obtained using the GFEM with 4 elements

Polynomial order	No. of DOFs	Relative error in energy norm	Slope in log-log scale
2	18	2.0535E-01	-
3	24	0.0000E+00	N/A
4	30	0.0000E+00	N/A

Table 6 P -extension results obtained using the GFEM with 16 elements

Polynomial order	No. of DOFs	Relative error in energy norm	Slope in log-log scale
2	54	1.4555E-01	-
3	72	6.0071E-03	-11.080
4	90	1.1441E-04	-17.750

Table 7 P -extension results obtained using the GFEM with 64 elements

Polynomial order	No. of DOFs	Relative error in energy norm	Slope in log-log scale
2	198	4.0516E-02	-
3	260	4.1352E-04	-16.830
4	325	2.1261E-06	-23.619

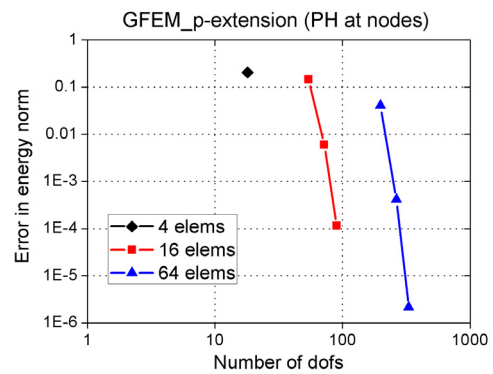


Fig. 7 Convergence results of p -extension obtained using the GFEM with an even number of elements

3.2 동일 크기 홀수 개수의 요소를 지닌 경우

본 장에서는 홀수 개수의 요소를 지닌 요소망을 이용하여 수치해석 예제를 제안된 일반유한요소법의 수렴성 해석을 수행한 결과를 분석한다. Fig. 8에 나타난 것처럼 동일 크기 홀수 개수의 요소를 이용할 경우 소성힌지가 요소의 내부에 위치

하게 된다. 표준적인 유한요소법의 경우 소성현저가 오직 절점에만 위치할 수 있기 때문에 이 경우는 오직 제한된 일반유한요소법에 의해서만 다루어질 수 있다.

앞서 짝수 개수의 요소를 지닌 요소망을 이용해 수행한 경우와 유사하게 2차, 3차, 4차의 다항 확장함수를 지닌 일반유한요

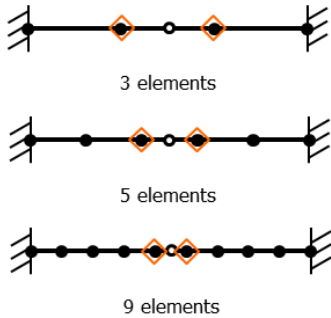


Fig. 8 Uniform mesh refinement procedure for the GFEM analysis with an odd number of elements

Table 8 *H*-extension results obtained using the GFEM with an odd number of elements and $p=2$

No. of elements	No. of DOFs	Relative error in energy norm	Slope in log-log scale
3	18	7.9584E-02	-
5	24	2.9694E-01	4.577
9	36	2.2904E-01	-0.640
17	60	1.3818E-01	-0.989
33	108	7.6038E-02	-1.016
65	204	3.9914E-02	-1.013

Table 9 *H*-extension results obtained using the GFEM with an odd number of elements and $p=3$

No. of elements	No. of DOFs	Relative error in energy norm	Slope in log-log scale
3	24	7.5664E-04	-
5	32	8.9971E-03	8.606
9	48	1.6632E-02	1.515
17	80	5.3531E-03	-2.219
33	144	1.5102E-03	-2.153
65	272	4.0094E-04	-2.085

Table 10 *H*-extension results obtained using the GFEM with an odd number of elements and $p=4$

No. of elements	No. of DOFs	Relative error in energy norm	Slope in log-log scale
3	30	0.0000E+00	-
5	40	3.6338E-05	N/A
9	60	5.1511E-04	6.539
17	100	9.2535E-05	-3.361
33	180	1.3602E-05	-3.262
65	340	1.8891E-06	-3.104

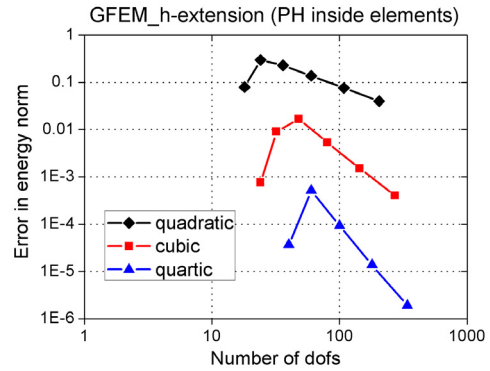


Fig. 9 Convergence results of *h*-extension obtained using the GFEM with an odd number of elements

소법을 이용해 *h*-확장 과정을 수행하였으며 그 결과를 Table 8부터 Table 10에 나타내었다. 이 경우 Fig. 8에 나타난 것처럼 소성현저가 존재하는 요소의 두 절점 모두에 식 (2)의 두 번째 항에 해당하는 자유도를 추가시킨다. 표의 결과는 로그-로그 스케일로 Fig. 9에 그래프로 나타내었다. 3.1장의 결과와 유사하게 $p=2, 3, 4$ 의 일반유한요소법을 이용한 경우 이론적으로 예측되는 선형수렴속도를 얻을 수 있으며, 마지막 수렴단계에서 각각 1.013, 2.085, 3.104의 값을 보였다. 이로부터 제한된 일반유한요소법은 소성현저가 요소 내부에 존재하는 경우에도 유한요소이론이 예측하는 수렴속도와 일치하는 결과를 얻을 수 있어 그 효율성과 정확성을 입증함을 알 수 있다.

Table 11 *P*-extension results obtained using the GFEM with 5 elements

Polynomial order	No. of DOFs	Relative error in energy norm	Slope in log-log scale
2	24	2.9694E-01	-
3	32	8.9971E-03	-12.154
4	40	3.6338E-05	-24.701

Table 12 *P*-extension results obtained using the GFEM with 17 elements

Polynomial order	No. of DOFs	Relative error in energy norm	Slope in log-log scale
2	60	1.3818E-01	-
3	80	5.3531E-03	-11.300
4	100	9.2535E-05	-18.185

Table 13 *P*-extension results obtained using the GFEM with 65 elements

Polynomial order	No. of DOFs	Relative error in energy norm	Slope in log-log scale
2	204	3.9914E-02	-
3	272	4.0094E-04	-15.992
4	340	1.8891E-06	-24.010

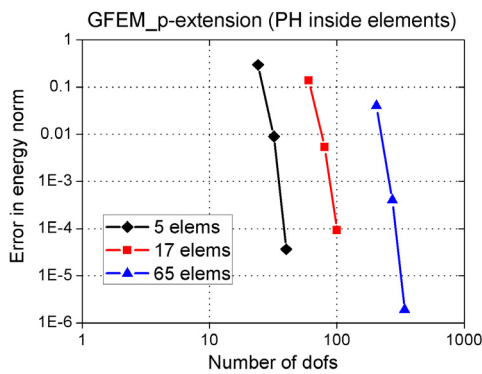


Fig. 10 Convergence results of p -extension obtained using the GFEM with an odd number of elements

Table 11에서 Table 13에 제안된 일반유한요소법으로 각각 5, 17, 65개의 요소를 활용한 p -확장 수렴성 해석 결과를 나타내었다. 동일 결과를 Fig. 10에 로그-로그 스케일의 그래프로 나타내었다. 소성힌지가 요소 내부에 존재하는 경우에도 3.1장의 경우와 마찬가지로 다항 확장함수의 차수가 올라감에 따라 지수함수 수렴속도가 나타나며 유한요소이론의 예측과 정확히 일치한다. 이로부터 제안된 일반유한요소법은 구조물을 묘사하기 위한 요소망의 구성에 관계없이 임의의 위치에 소성힌지를 삽입할 수 있으며, 이 경우 얻어진 해의 정확성은 적어도 표준적인 유한요소법과 동일한 수준임을 알 수 있다.

4. 결 론

본 논문에서 고전적인 오일러-베르누이 보의 집중소성힌지 모델링을 위한 일반유한요소법을 제안하였다. 이 기법은 소성힌지를 해의 약불연속을 묘사하는 적절한 확장함수를 이용해 모델링하며, 요소간의 연결성을 변화시키지 않으면서 임의의 위치에 소성힌지를 삽입하는 것이 가능하다. 대신 소성힌지는 이미 존재하는 요소에 위계적으로 자유도를 추가함으로써 형성된다. 제안된 기법의 유효성을 검증하기 위해 수치해석 예제에 대해 h -, p -확장 수렴성 해석을 수행하였다. 본 논문의 결론은 다음과 같다:

- (1) 제안된 일반유한요소법을 이용해 집중소성힌지가 절점 및 요소 내부에 발생하는 두 가지 경우 모두에 대하여 h - 및 p -확장의 이론적인 수렴속도를 얻을 수 있었으며 이는 제안된 기법의 정확성을 입증한다.
- (2) 주어진 자유도 개수에 대해 4차의 다항 확장함수를 이용한 경우 가장 낮은 상대오차가 발생하여 집중소성힌지 모델링에 있어 가장 효과적인 방법임을 알 수 있다.
- (3) 고차의 다항 확장함수를 이용할 경우 한 개 혹은 두 개의

적은 수의 요소를 사용하더라도 거의 정확한 해를 구할 수 있다. 이는 제안된 일반유한요소법이 변위와 연관된 3차 Hermite 형상함수를 단위오목분할함수로 이용하여 고차의 다항 확장함수를 이용할 경우 국부적으로 확장함수보다 더 높은 차수의 해를 모사할 수 있기 때문인 것으로 판단된다.

현재 제안된 일반유한요소법을 확장하여 프레임 구조물의 붕괴를 묘사하는 1차 소성힌지해석에 적용시키는 연구를 수행하고 있으며, 제안된 기법이 요소를 교체하거나 혹은 요소간의 연결성의 변화시키지 않고 자유도를 추가함으로써 소성힌지를 모델링 할 수 있기 때문에 대규모 구조물의 붕괴해석에 효율적으로 적용될 수 있을 것으로 예상된다.

감사의 글

본 연구는 국토교통부 국토교통기술지역특성화사업의 연구비지원(18RDRP-B076268-05)에 의해 수행되었습니다.

References

Chen, W.F., Sohal, I. (2013) *Plastic Design and Second-order Analysis of Steel Frames*, Springer, New York, p.509.

Choi, W.-J., Kim, M.-S., Kim, D.-J., Lee, Y.-H., Kim, H.-C. (2011) Application of the Preconditioned Conjugate Gradient Method to the Generalized Finite Element Method with Global-local Enrichment Functions, *J. Comput. Struct. Eng. Inst. Korea*, 24(4), pp.405~412.

Duarte, C.A., Babuška, I., Oden, J.T. (2000) Generalized Finite Element Methods for Three Dimensional Structural Mechanics Problems, *Comput. & Struct.*, 77(2), pp.215~232.

Fries, T.-P., Belytschko, T. (2010) The Extended/Generalized Finite Element Method: An Overview of the Method and Its Applications, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 84, pp.253~304.

Kim, D.-J., Duarte, C.A., Proenca, S.P. (2012) A Generalized Finite Element Method with Global-Local Enrichment Functions for Confined Plasticity Problems, *Comput. Mech.*, 50(5), pp.563~578.

Moes, N., Cloirec, M., Cartraud, P., Remacle, J.-F. (2003) A Computational Approach to Handle Complex Microstructure Geometries, *Comput. Methods*

- Appl. Mech. & Eng.*, 192(28-30), pp.3163~3177.
- Park, K., Kim, H., Kim, D.-J.** (2018) Generalized Finite Element Formulation of Fiber Beam Elements for Distributed Plasticity in Multiple Regions, *Computer-Aided Civil & Infrastruct. Eng.*, Accepted for Publication.
- Son, H., Park, J., Kim, H., Lee, Y.H., Kim, D.-J.** (2017) Generalized Finite Element Analysis of High-Rise Wall-Frame Structural Systems, *Eng. Comput.*, 34(1), pp.189~210.
- Sozen, M.A., Thornton, C.H., Corley, W.G., Mlakar Sr, P.F.** (1998) The Oklahoma City Bombing: Structure and Mechanisms of the Murrah Building. *J. Perform. Constr. Facil.*, 12(3), pp.120~136.
- Szabo, B., Babuška, I.** (1991) *Finite Element Analysis*, John Wiley and Sons, New York, p.368.
- Wu, J.Y., Lindell, M.K.** (2004) Housing Reconstruction After Two Major Earthquakes: The 1994 Northridge Earthquake in the United States and the 1999 Chi-Chi Earthquake in Taiwan, *Disasters*, 28(1), pp.63~81.

요 지

본 논문은 고전적인 오일러-베르누이 보의 집중소성현지 모델링을 위한 일반유한요소법을 제안한다. 이 기법에서 소성현지는 해의 약불연속을 묘사하는 적절한 확장함수에 의해 모델링되며, 요소간의 연결성을 변화시키지 않으면서 임의의 위치에 소성현지를 삽입하는 것이 가능하다. 대신 소성현지는 이미 존재하는 요소에 위계적으로 자유도를 추가함으로써 형성된다. 제안된 기법의 유효성을 검증하기 위해 수치해석 예제에 대해 h -, p -확장과 같은 수렴성 해석을 수행하였다. 수렴성 해석의 결과가 제안된 기법이 소성현지가 절점 및 요소 내의 임의의 위치에 존재하는 두 가지 경우 모두에 대하여 유한요소이론에 의한 수렴속도를 얻을 수 있음을 보여주어 기법의 정확성을 입증하였다.

핵심용어 : 일반유한요소법, 집중소성이론, 소성현지, 수렴속도