

# 점탄성 복합재가 포함된 다층구조 코팅재의 수중음향성능 해석모델 개발

김 재 호<sup>\*,1)</sup>

<sup>1)</sup> 국방과학연구소 제6기술연구본부

## Development of Analysis Model for Underwater Acoustic Performance of Multi-Layered Coatings Containing Visco-Elastic Composites

Kim Jae Ho<sup>\*,1)</sup>

<sup>1)</sup> The 6th Research and Development Institute, Agency for Defense Development, Korea

(Received 3 July 2017 / Revised 20 November 2017 / Accepted 12 January 2018)

### ABSTRACT

In this paper, an integrated analysis model for evaluating the underwater acoustic performance of the multi-layered acoustic coatings containing visco-elastic composite layers with hollow glass microspheres is described. The model uses the effective medium theory considering the acoustic scattering and resonance effects of the inclusions. Also, the model incorporates the compressive deformation mechanism associated with hydrostatic pressure. The technique developed in this work was used as the acoustic layer design and performance analysis tools for the practical hull coatings and acoustic baffles in Korean next generation submarines.

Key Words : Multi-layered Acoustic Coatings(다층 음향코팅재), Visco-Elastic Composite(점탄성 복합재),  
Hollow Glass Microspheres(중공 유리 미세입자), Effective Medium Theory(유효 매질 이론),  
Underwater Acoustic Performance(수중음향성능), Hydrostatic Pressure(정수압)

### 1. 서 론

잠수함에서 음향 스텔스는 현대의 복합 네트워크 전장 환경에서 원활한 작전수행의 승패를 가름하는 절대적인 요소 중에 하나이다. 이를 위해 선진 강대국은 적 능동소나에 대한 음향 표적강도(acoustic target

strength) 준위를 낮추기 위하여 선체 표면에 음향 코팅재(acoustic coatings)를 적용한다.

음향코팅재는 크게 반향음감소(echo reduction) 코팅재, 투과손실(transmission loss) 코팅재로 구분된다. 반향음감소 코팅재는 주로 잠수함 압력선체부에 적용되며, 이것은 선체후면 공기층에 의해 증가될 수 있는 반향음의 크기를 감소시키기 위한 목적으로 적용된다. 투과손실 코팅재는 세일(sail) 부분에서 투과된 음파에 의한 내부 구조물에 의한 재반사 및 산란 등에 의한

\* Corresponding author, E-mail: youngtahn@add.re.kr  
Copyright © The Korea Institute of Military Science and Technology

반향음을 감소시키기 위하여 적용된다. 최초의 잠수함 코팅제는 제2차 세계대전 독일 잠수함에 적용된 알베리(Alberich) 고무 코팅제로 모재(matrix or substrate)에 두 가지 형태의 매크로 기공(macro holes of air-cavity or voids)을 내부에 일렬로 배열시킨 구조로 기공의 공진(resonance) 특성을 이용하여 10~18 kHz 주파수 대역에서 15 %의 반향음 감소효과를 보였다<sup>[1]</sup>.

이러한 초기형태의 코팅제는 특정주파수 대역에서 어느 정도 효과를 보였으나, 잠수함의 잠항능력 증대 및 적 소나의 성능 향상으로 인해 더 깊은 운용수심 및 더 넓은 주파수 대역, 특히 저주파수 대역에서 더욱 효과적인 음향성능의 필요성이 대두 되었다. 이러한 요구사항을 구현하기 위한 수단으로 다층구조 및 미세입자를 포함한 복합재가 적용되고 있다. 음향 코팅제의 내부 첨가제는 매크로 기공(구형 또는 실린더형) 또는 구형의 미세입자(microsphere)를 갖는다.

첨가제의 기능은 크게 두 가지인데<sup>[2]</sup>, 하나는 음향 에너지 소산(dissipation) 기능으로 상세한 물리적 소산 매커니즘은 음파의 산란, 첨가제/모재 경계면에서 모드변환, 음파 진행방향 변화, 첨가제의 공진 및 열에너지 변화에 따른 흡음 등을 포함하며, 다른 하나의 기능은 첨가제의 크기, 분포 및 체적 집적율(volume concentration)에 따른 음향 임피던스 조절기능으로 이것은 인접한 층과의 음향 임피던스 일치/불일치(acoustic impedance matching/mis-matching) 효과를 통하여 궁극적으로 경계면에서 반사 및 투과 특성을 제어할 수 있는 기능을 제공한다.

다층 반향음감소 코팅제의 입사 층은 해수와 유사한 임피던스를 갖게 함으로써 가능한 많은 에너지가 유입되게 하여 내부의 음향 감쇠 매커니즘에 의해 음향에너지의 소산을 최대화시키고 또한 후면 층은 선체와 임피던스 불일치를 증대시켜 내부로의 음향 에너지 전파를 최소화시키는 것이 설계의 기본 방향이 된다. 다층으로 음향재료를 설계하는 주된 이유 중 하나는 음향재료의 두께를 최대한 감소시키기 위해서이다. 특히 저주파수 주파수대역이 관심 주파수인 경우 단일 층으로 설계하면 그 성능은 제한적이며 무엇보다 두께 증가는 불가피하다. 이것은 잠수함 전체 설계에서 전체 하중 조건 및 부력 보상 탱크 설계 등에 열악한 인자로 작용한다. 수중 음향 코팅제의 모재로는 주로 음향 에너지 소산이 크게 발생하는 고무 또는 폴리우레탄(polyurethane) 계열의 점탄성 폴리머 재료(visco-elastic polymer material)가 주로 적용된다.

중공 유리 미세입자(hollow glass microspheres, HGM)는 수심에 따른 정수압이 작용할 경우, 첨가제의 압축 변형 즉, 첨가제가 적용된 레이어(layer)의 두께 감소를 지연시킨다<sup>[3]</sup>. 이렇게 더욱 깊은 수심 운용환경에서도 상대적으로 효과적인 음향성능을 유지시켜주는 기능 때문에 점탄성 복합재의 첨가제로 가장 널리 적용되고 있다.

본 연구에서는 구형 첨가제의 통계적 크기 분포, 음향 산란 및 공진 특성을 고려한 유효 매질 이론(effective medium theory)<sup>[4-7]</sup>을 적용하여 등가의 매질 특성을 나타내는 유효 파라미터를 도출하는 기법, 정수압에 따른 점탄성 복합재의 압축변형 해석기법을 적용하였다<sup>[8-10]</sup>. 최종적으로 균질 다층 음향재료의 음향 전파 모델 및 성능 해석 기법인 동강성 행렬법(dynamic stiffness matrix method)<sup>[11]</sup>과의 연계를 통하여 중공 유리 미세입자를 갖는 점탄성 복합재의 비균질 레이어 및 균질 레이어 등으로 구성된 다층구조 음향재료의 수중음향 성능을 분석하는 통합 기법을 제시하였다.

## 2. 유효 매질 이론

재료 내부에 첨가제가 들어 있는 경우 유효 매질 이론에 대한 유효 구(effective sphere) 개념도를 Fig. 1에 나타내었다. Fig. 1의 a)는 구형의 첨가제에 의한 음향 산란을 고려하는 문제로 모재 내부 임의의 위치에서 생성되는 변위 필드(displacement field)  $u_{tot}$ 는 다음과 같이 주어진다<sup>[31,32]</sup>.

$$u_{tot}(\mathbf{r}) = u_{inc}(\mathbf{r}) + u_{sc}(\mathbf{r}),$$

$$= u_{inc}(\mathbf{r}) + \sum_i u_{s,i}(\boldsymbol{\rho}_i), \quad \boldsymbol{\rho}_i = \mathbf{r} - \mathbf{r}_{s,i} \quad (1)$$

$$u_{e,i}(\mathbf{r}) = u_{inc}(\mathbf{r}) + \kappa \sum_{k \neq i} u_{s,k}(\boldsymbol{\rho}_k) \quad (2)$$

여기서,  $u_{inc}$ 는 입사파에 의한 변위 필드,  $u_{sc}$ 는 전체 산란 음장의 변위 필드,  $u_{s,i}$ 는  $i$ 번째 첨가제에 의한 산란 음장의 변위 필드, 그리고  $u_{e,i}$ 는  $i$ 번째 첨가제를 가진시키는 변위 필드를 각각 나타내며,  $\kappa$ 는 음향 산란(acoustic scattering)을 고려하는 파라미터로 단일산란(single scattering)일 경우 0, 즉 첨가제 사이의 상호작용은 무시함을 의미하여, 상호작용을 고려한 다중산란(multiple scattering)일 경우 1의 값을 취한다.

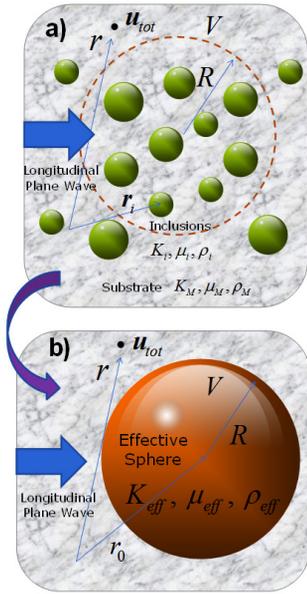


Fig. 1. Concept of effective medium theory

유효 매질 이론이라 함은 Fig. 1의 b)와 같이, 대표 체적(representative volume)을 갖는 유효구(effective sphere) 개념을 도입하여 원음장 관측점에서 원래의 산란 문제와 동일한 변위 필드를 산출할 수 있는 균질의 (homogeneous) 유효구에 대한 유효 파라미터(탄성계수, 밀도 등)를 설정하는 것이다. 상기의 식 (1)과 (2)에서 보듯이 다중 첨가제의 음향 산란(acoustic scattering)을 고려한 원래 문제는 다중산란 문제로 첨가제 사이의 상호작용을 나타내는 무한 차수의 재산란(re-scattering), 다양한 크기의 첨가제와 모재사이의 응력/변위경계조건 및 첨가제 분포의 불명확성 등으로 인하여 음향진과 해석이 매우 복잡하다. 따라서 본 연구에서는 유효 매질 이론과의 접목이 용이한 단일 산란모델을 고려하였다.

### 2.1 단일 첨가제/단일 산란 문제

다중의 첨가제(multiple inclusions)의 산란 문제는 기본적으로 무한영역의 모재에 포함된 단일 첨가제(single inclusion)의 산란 문제에 기초하므로 먼저 단일 첨가제/단일 산란문제에 대한 문제를 고려하자. 단일 중공 유리 미세입자(단순 기공 포함) 첨가제에 대한 단일 산란문제를 다루기 위한 기하학적 형상, 제원 및 관련 파라미터를 Fig. 2에 나타내었다. 아래첨자 1, x, 2는 모재(substrate or matrix), 셸(shell), 내부 코어

(interior core)를 각각 의미하며 각 매질은 라메 상수(Lame constant)  $\lambda, \mu$ 와 밀도  $\rho$ 로 특성이 표현된다. 셸 체적율(shell fraction)  $\varepsilon$ 에 따라 첨가제는 탄성체로 채워진 경우( $\varepsilon = 0$ ), 셸이 없는 단순 기공( $\varepsilon = 1$ ) 및 셸을 갖는 중공 유리 미세입자( $0 < \varepsilon < 1$ )의 3가지 형태를 가질 수 있다. 조화운동(harmonic motion)을 가정하고 시간 의존성  $e^{-i\omega t}$ 를 생략할 경우, 선형 탄성 및 점탄성 재료의 입자 변위 필드  $\mathbf{u}$ 에 대한 운동방정식은 다음과 같이 주어진다<sup>[11-13]</sup>.

$$(\lambda + 2\mu)\nabla\nabla\cdot\mathbf{u} - \mu\nabla\times\nabla\times\mathbf{u} = -\rho\omega^2\mathbf{u} \quad (3)$$

폴리머(polymer) 등과 같은 점탄성 재료는 응력 이완(stress relaxation), 크리프(creep) 및 히스테리시스(hysteresis) 특성에 의해서 라메 상수  $\lambda, \mu$ 가 주파수의 함수로 주어진다<sup>[20,33,34]</sup>. 입자의 변위 필드  $\mathbf{u}$ 는 헬름홀츠 분해 정리(Helmholtz decomposition theorem)에 의해서 다음과 같이 표현된다<sup>[11,12,14]</sup>.

$$\mathbf{u} = \nabla\varphi + \nabla\times\Psi \quad (4)$$

여기서,  $\varphi$ 는 길이방향 운동(압축파 또는 종파)을 나타내는 스칼라 포텐셜(scalar potential)이며,  $\Psi$ 는 가로방향 운동(전단파 또는 횡파)을 나타내는 벡터 포텐셜(vector potential)로 축대칭(azimuthal symmetry) 조건으로부터 다음과 같이 주어진다<sup>[12]</sup>.

$$\Psi = \nabla\times(r\chi\mathbf{e}_r) \quad (5)$$

여기서,  $\chi$ 는 데비(Debye) 스칼라 포텐셜을 나타낸다.

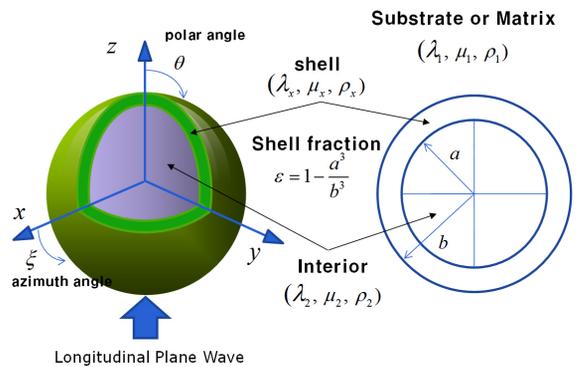


Fig. 2. Geometry of single inclusion

식 (4)와 (5)로부터 식 (3)은 다음과 같이 두 개의 스칼라 헬름홀츠(Helmholtz) 방정식으로 나타난다.

$$\nabla^2 \varphi + k_d^2 \varphi = 0; \quad k_d = \omega / c_d; \quad c_d^2 = (\lambda + 2\mu) / \rho \quad (6)$$

$$\nabla^2 \chi + k_s^2 \chi = 0; \quad k_s = \omega / c_s; \quad c_s^2 = \mu / \rho \quad (7)$$

z축 방향 입사 평면파에 대응하는 스칼라 포텐셜은 레일리(Rayleigh) 전개에 의해서 다음과 같다.

$$\varphi_{inc} = \varphi_0 e^{i(k_{d1}z - \omega t)} = \varphi_0 e^{-i\omega t} \sum \mathbf{i}^n (2n+1) j_n(k_{d1}r) P_n(\cos \theta) \quad (8)$$

여기서,  $k_{d1}$ ,  $j_n(\bullet)$ ,  $P_n(\bullet)$ 는 모재에서 종파의 파수(wavenumber), 제1종 구형 베셀함수(spherical Bessel function of the first kind), 르장드르 다항식(Legendre polynomials)을 각각 나타낸다. 각 영역에서 주어지는 스칼라 포텐셜( $\varphi, \chi$ )은 헬름홀츠 방정식의 해로서 다양한 구형 베셀함수 및 르장드르 다항식의 조합으로 표현된다<sup>[13,14]</sup>. 3개의 각 영역에 대한 산란 스칼라 포텐셜을 경계조건에 의해서 결정될 계수( $A_n \sim H_n$ )를 사용하여 정리하면 다음과 같다.

$$\varphi_{sc} = \varphi_0 e^{-i\omega t} \sum \mathbf{i}^n (2n+1) A_n h_n(k_{d1}r) P_n(\cos \theta) \quad (9)$$

$$\chi_{sc} = \varphi_0 e^{-i\omega t} \sum \mathbf{i}^n (2n+1) B_n h_n(k_{s1}r) P_n(\cos \theta) \quad (10)$$

$$\varphi_x = \varphi_0 e^{-i\omega t} \sum \mathbf{i}^n (2n+1) [E_n j_n(k_{dx}r) + F_n n_n(k_{dx}r)] P_n(\cos \theta) \quad (11)$$

$$\chi_x = \varphi_0 e^{-i\omega t} \sum \mathbf{i}^n (2n+1) [G_n j_n(k_{sx}r) + H_n n_n(k_{sx}r)] P_n(\cos \theta) \quad (12)$$

$$\varphi_2 = \varphi_0 e^{-i\omega t} \sum \mathbf{i}^n (2n+1) C_n j_n(k_{d2}r) P_n(\cos \theta) \quad (13)$$

$$\chi_2 = \varphi_0 e^{-i\omega t} \sum \mathbf{i}^n (2n+1) D_n j_n(k_{s2}r) P_n(\cos \theta) \quad (14)$$

여기서,  $k_{d1}, k_{s1}, k_{dx}, k_{sx}, k_{d2}, k_{s2}$ 는 모재(1), 쉘(x), 내부 코어(2)에서 종파 및 횡파의 파수,  $h_n(\bullet)$ ,  $n_n(\bullet)$ 는 구형 헨켈함수 및 노이만함수(spherical Hankel and Neumann functions)를 각각 나타낸다.

각 영역의 변위 및 응력 성분은 다음과 같다.

$$u_r = \frac{\partial}{\partial r} \left( \varphi + \frac{\partial}{\partial r} (r\chi) \right) + k_s^2 r\chi \quad (15)$$

$$u_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \varphi + \frac{\partial}{\partial r} (r\chi) \right) \quad (16)$$

$$\tau_{rr} = -\lambda k_d^2 \varphi + 2\mu \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( \varphi + \frac{\partial}{\partial r} (r\chi) \right) + k_s^2 \chi \right] \quad (17)$$

$$\tau_{r\theta} = \mu \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ 2 \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \left( \varphi + \frac{\partial}{\partial r} (r\chi) \right) + k_s^2 \chi \right] \quad (18)$$

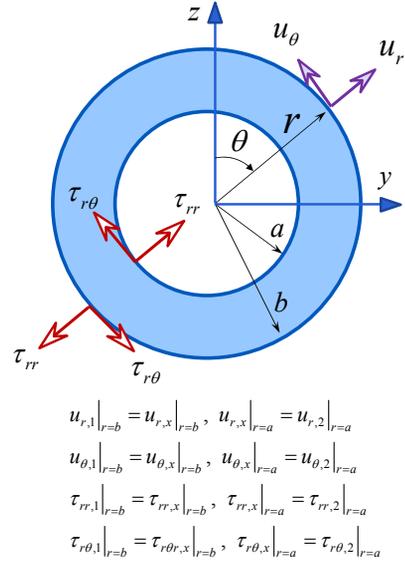


Fig. 3. Boundary conditions of single inclusion scatterer

Fig. 3에서 보는 바와 같이 변위 및 응력에 대한 8개의 경계조건식을 적용하면 다음과 같은 행렬방정식을 얻을 수 있다.

$$\begin{bmatrix} d_{11}^{(n)} & d_{12}^{(n)} & d_{13}^{(n)} & d_{14}^{(n)} & d_{15}^{(n)} & d_{16}^{(n)} & d_{17}^{(n)} & d_{18}^{(n)} \\ d_{21}^{(n)} & d_{22}^{(n)} & d_{23}^{(n)} & d_{24}^{(n)} & d_{25}^{(n)} & d_{26}^{(n)} & d_{27}^{(n)} & d_{28}^{(n)} \\ d_{31}^{(n)} & d_{32}^{(n)} & d_{33}^{(n)} & d_{34}^{(n)} & d_{35}^{(n)} & d_{36}^{(n)} & d_{37}^{(n)} & d_{38}^{(n)} \\ d_{41}^{(n)} & d_{42}^{(n)} & d_{43}^{(n)} & d_{44}^{(n)} & d_{45}^{(n)} & d_{46}^{(n)} & d_{47}^{(n)} & d_{48}^{(n)} \\ d_{51}^{(n)} & d_{52}^{(n)} & d_{53}^{(n)} & d_{54}^{(n)} & d_{55}^{(n)} & d_{56}^{(n)} & d_{57}^{(n)} & d_{58}^{(n)} \\ d_{61}^{(n)} & d_{62}^{(n)} & d_{63}^{(n)} & d_{64}^{(n)} & d_{65}^{(n)} & d_{66}^{(n)} & d_{67}^{(n)} & d_{68}^{(n)} \\ d_{71}^{(n)} & d_{72}^{(n)} & d_{73}^{(n)} & d_{74}^{(n)} & d_{75}^{(n)} & d_{76}^{(n)} & d_{77}^{(n)} & d_{78}^{(n)} \\ d_{81}^{(n)} & d_{82}^{(n)} & d_{83}^{(n)} & d_{84}^{(n)} & d_{85}^{(n)} & d_{86}^{(n)} & d_{87}^{(n)} & d_{88}^{(n)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_n \\ B_n \\ C_n \\ D_n \\ E_n \\ F_n \\ G_n \\ H_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1^{(n)} \\ I_2^{(n)} \\ I_3^{(n)} \\ I_4^{(n)} \\ I_5^{(n)} \\ I_6^{(n)} \\ I_7^{(n)} \\ I_8^{(n)} \end{bmatrix} \quad (19)$$

계수 행렬의 요소는 참고문헌 [7]의 부록과 같다.

대부분의 수중음향재료의 적용 분야에서 관심대상은 파장이 첨가체의 치수에 비하여 상당히 큰 경우이다(최대 관심 주파수가 100 kHz라 하고, 음속 1500

m/s를 고려하면 파장은  $1.5 \times 10^2$  m이고, 첨가제의 전형적인 크기는 직경 20~150  $\mu\text{m}$ 의 범위를 가짐<sup>[15]</sup>. 즉, 이 경우 산란계수( $A_n \sim H_n$ )는 식 (19)의 각 행렬요소를 저주파수 점근적 전개(low frequency asymptotic expansion)로 대체하여 근사될 수 있다. 현재 단일 첨가제의 원음장 종파 산란 필드에 관심이 있으므로 산란 계수  $A_n$ 에 대하여 고려한다. 유효 파라미터 산출과 관련하여 산란 필드 응답에 지배적인 영향을 미치는 계수는 저차 산란계수  $A_0, A_1, A_2$ 이며, 실제 적용되는 첨가제의 셀 체적율  $\varepsilon$ 은 1보다 상당히 작은 값을 갖는다. 이러한 특성을 고려한 저주파수 대역 산란 계수(scattering coefficients)  $A_0, A_1, A_2$ 는 다음과 같다<sup>[7]</sup>.

$$A_0 = \left( \frac{y_{d1}^3}{3\mathbf{i}} \right) \frac{\alpha_1 - \frac{y_{d1}^2}{10}\alpha_2 - \frac{y_{d2}^2}{10}\alpha_3 - \frac{y_{dx}^2}{9}\varepsilon \left( K_x + \frac{4}{3}\mu_x \right)}{\beta_1 + \frac{y_{d1}^2}{10}\beta_2 - \frac{y_{d2}^2}{10}\beta_3 - \frac{y_{dx}^2}{9}\varepsilon \left( K_x + \frac{4}{3}\mu_x \right)} \quad (20)$$

$$A_1 = \left( \frac{y_{d1}^3}{9\mathbf{i}} \right) \left[ 1 - \frac{\rho_x}{\rho_1}\varepsilon - \frac{\rho_2}{\rho_1}(1-\varepsilon) \right] \quad (21)$$

$$A_2 = \left( \frac{2y_{d1}^3}{9\mathbf{i}} \right) \frac{\varepsilon\alpha_{x,2} \left( \frac{\mu_x}{\mu_1} - 1 \right) + (1-\varepsilon)\alpha_{x,x} \left( \frac{\mu_2}{\mu_1} - 1 \right)}{\varepsilon\alpha_{x,2}\alpha_{1,x} + (1-\varepsilon)\alpha_{x,x}\alpha_{1,2}} \quad (22)$$

여기서,  $y_{dm} = k_{dm}b$  ( $m=1, x, 2$ )

$$\alpha_1 = K_2 - K_1 + \varepsilon \left( \frac{K_1 + \frac{4}{3}\mu_x}{K_x + \frac{4}{3}\mu_x} \right) (K_x - K_2) \quad (23)$$

$$\beta_1 = K_2 + \frac{4}{3}\mu_1 + \frac{4}{3}\varepsilon \left( \frac{\mu_x - \mu_1}{K_x + \frac{4}{3}\mu_x} \right) (K_x - K_2) \quad (24)$$

$$\alpha_2 = K_2 - \frac{5}{3}K_1 - \frac{8}{9}\mu_1 + \varepsilon \left( \frac{\frac{5}{3}K_1 + \frac{4}{3}\mu_x + \frac{8}{9}\mu_1}{K_x + \frac{4}{3}\mu_x} \right) (K_x - K_2) \quad (25)$$

$$\beta_2 = \left( 1 + \frac{2}{3}\mathbf{i}y_{d1} \right) \left[ K_2 + \frac{4}{3}\mu_1 + \frac{4}{3}\varepsilon \left( \frac{\mu_x - \mu_1}{K_x + \frac{4}{3}\mu_x} \right) (K_x - K_2) \right] - \frac{2}{3}(1 + \mathbf{i}y_{d1}) \left[ K_1 + \frac{4}{3}\mu_1 - \varepsilon \left( \frac{K_1 + \frac{4}{3}\mu_1}{K_x + \frac{4}{3}\mu_x} \right) (K_x - K_2) \right] \quad (26)$$

$$\alpha_3 = \frac{5}{3}K_2 - K_1 + \frac{8}{9}\mu_2 + \varepsilon \left( \frac{K_1 + \frac{4}{3}\mu_x}{K_x + \frac{4}{3}\mu_x} \right) \left( K_x - \frac{5}{3}K_2 - \frac{8}{9}\mu_x \right) \quad (27)$$

$$\beta_3 = \frac{5}{3}K_2 + \frac{4}{3}\mu_1 + \frac{8}{9}\mu_2 + \frac{4}{3}\varepsilon \left( \frac{\mu_x - \mu_1}{K_x + \frac{4}{3}\mu_x} \right) \left( K_x - \frac{5}{3}K_2 - \frac{8}{9}\mu_2 \right) \quad (28)$$

$$\alpha_{m,n} = \frac{4}{3} \left( \frac{9K_m}{8\mu_m} + 1 \right) + \frac{\mu_n}{\mu_m} \left( \frac{K_m}{\mu_m} + 2 \right), \quad (m=1, x, 2) \quad (29)$$

상기의 식 (23) ~ (29)에서  $K_m$  ( $m=1, x, 2$ )는 각 영역에서 주어진 재료의 체적 탄성계수(bulk modulus)를 나타낸다.

## 2.2 다중 첨가제의 단일 산란모델(GU 모델)

Gaunard 및 Uberall에 의해 개발된 구형 단순 기공 다중 첨가제에 대한 단일 산란 모델<sup>[4]</sup>은 중공 유리 미세입자에 대한 다중 첨가제의 단일산란 모델(GU model)로 확장이 가능하다.

GU 모델의 기본 가정은 다음과 같다.

- (i) 반경  $b$ 를 갖는 동일한 크기의 구형 첨가제가 모체의 대표 체적  $V$ 에 랜덤하게 분포한다.
- (ii) 관측점은 대표 체적  $V$ 로부터 충분히 멀리 떨어져 있어 각 첨가제의 중심은 모두  $V$ 의 중심에 있다.
- (iii) 첨가제의 체적 집적율이 상대적으로 낮아 첨가제 사이의 상호작용이 고려되는 다중산란 효과(multiple scattering effect)는 무시할 수 있다. 참고 문헌 [17]에 의하면 GU 모델에서 첨가제 체적 집적율은 최대 40 %까지 적용 가능하다고 언급하고 있다. 이것은 단일 산란모델을 이용한 유효 매질 이론의 최대 적용범위로 본 연구대상의 점탄성 복합재료와 부합한다.

유효 파라미터 산출을 위한 GU 모델의 기본 관계식은 다음과 같다<sup>[7]</sup>.

$$\tilde{A}_n^* = \phi \tilde{A}_n, \quad n=0, 1, 2 \quad (30)$$

여기서,  $\phi$ 는 첨가제의 체적 집적율,  $\tilde{A}_n^*$ 과  $\tilde{A}_n$ 는 유효 구의 산란계수  $A_n^*$  및 단일첨가제의 산란계수  $A_n$ 의 저주파수 전개에서  $(k_{d1}R)^3$ 와  $(k_{d1}b)^3$ 의 계수를 각각

나타낸다.

유효구의 기하학적/물리적 특성은  $\varepsilon_x = 1(a \rightarrow 0)$ ,  $K_x \rightarrow K^*$ ,  $\mu_x \rightarrow \mu^*$ ,  $\rho_x \rightarrow \rho^*$ 에 해당되며, 식 (30)에 적용하면 유효 체적 탄성계수  $K^*$ , 유효 밀도  $\rho^*$  및 유효 전단 탄성계수  $\mu^*$ 는 다음의 식으로 산출된다.

$$\frac{K^* - K_1}{K^* + \frac{4}{3}\mu_1} = \phi \frac{\alpha_1 - \frac{y_{d1}^2}{10}\alpha_2 - \frac{y_{d2}^2}{10}\alpha_3 - \frac{y_{dx}^2}{9}\varepsilon \left(K_x + \frac{4}{3}\mu_x\right)}{\beta_1 + \frac{y_{d1}^2}{10}\beta_2 - \frac{y_{d2}^2}{10}\beta_3 - \frac{y_{dx}^2}{9}\varepsilon \left(K_x + \frac{4}{3}\mu_x\right)} \quad (31)$$

$$\rho^* = \rho_1(1 - \phi) + \phi[\rho_2(1 - \varepsilon) + \rho_x \varepsilon] \quad (32)$$

$$\frac{6\mu_1 \left(\frac{\mu^*}{\mu_1} - 1\right)}{6\frac{\mu^*}{\mu_1}(K_1 + 2\mu_1) + (9K_1 + 8\mu_1)} = \phi \frac{\varepsilon \alpha_{x,2} \left(\frac{\mu_x}{\mu_1} - 1\right) + (1 - \varepsilon) \alpha_{x,x} \left(\frac{\mu_x}{\mu_1} - 1\right)}{\varepsilon \alpha_{x,2} \alpha_{1,x} + (1 - \varepsilon) \alpha_{x,x} \alpha_{1,2}} \quad (33)$$

### 2.3 첨가제 크기 분포를 고려한 다중 첨가제의 단일 산란모델(BKT 모델)

앞서 언급한 GU 모델은 모두 동일한 크기의 첨가제로 가정하였다. 그러나 이러한 가정은 일반적으로 실제적이지 못하다. 첨가제의 크기는 제품의 생산과정에서 어느 정도 분포를 가진다. 즉, 첨가제는 셀 두께 및 체적(또는 반경)에서 다양한 크기 분포를 가질 수 있다. 따라서 첨가제의 체적 집적율과 셀 체적율이 어떠한 범위에서 다양하게 분포할 경우에 적용할 수 있는 유효 매질 이론으로의 확장이 필요하다. Baird, Kerr 그리고 Townend는 첨가제의 크기 분포(size distribution)를 확률/통계적으로 고려할 수 있는 다중 첨가제의 단일 산란모델(BKT 모델)을 제시하였다<sup>7)</sup>.

유효 파라미터 산출을 위한 BKT 모델의 기본 관계식은 다음과 같다<sup>7)</sup>.

$$\tilde{A}_n^* = \phi \sum_i \sum_j \bar{n}_{i,j} \tilde{A}_{n,i,j}^*, \quad n = 0, 1, 2 \quad (34)$$

여기서,  $\phi$ 는 첨가제의 체적 집적율,  $\tilde{A}_n^*$ 은 유효구의 산란계수  $A_n^*$ 의 저주파수 전개에서  $(k_{d1}R)^3$ 의 계수,  $\tilde{A}_{n,i,j}^*$ 는  $ij$ 번째 첨가제의  $n$ 차 산란 계수  $A_{n,i,j}^*$ 의 저주파수 전개에서  $(k_{di}b_i)^3$ 의 계수를 각각 나타내며,  $\bar{n}_{i,j}$ 는 첨가제의 크기분포를 나타내는 것으로 셀 체적율  $\varepsilon_{i,j} = 1 - (a_j/b_i)^3$  ( $a_j$ :내경,  $b_i$ :외경)의 함수이다.

$n = 0$ ,  $n = 1$  및  $n = 2$ 에 대하여 식 (34)를 적용하면

첨가제 크기 분포를 고려한 유효 체적 탄성계수  $K^*$ , 유효 밀도  $\rho^*$  및 전단 탄성계수  $\mu^*$ 는 각각 다음의 식으로부터 산출된다.

$$\frac{K^* - K_1}{K^* + \frac{4}{3}\mu_1} = \phi \sum_i \sum_j \bar{n}_{i,j} M_{0,i,j} \quad (35)$$

$$\rho^* = \rho_1(1 - \phi) + \phi \left[ \rho_2 \sum_i \sum_j \bar{n}_{i,j} (1 - \varepsilon_{i,j}) + \rho_x \sum_i \sum_j \bar{n}_{i,j} \varepsilon_{i,j} \right] \quad (36)$$

$$\frac{6\mu_1 \left(\frac{\mu^*}{\mu_1} - 1\right)}{6\frac{\mu^*}{\mu_1}(K_1 + 2\mu_1) + (9K_1 + 8\mu_1)} = \phi \sum_i \sum_j \bar{n}_{i,j} M_{2,i,j} \quad (37)$$

여기서,

$$M_{0,i,j} = \frac{\alpha_{i,i,j} - \frac{y_{d1,i}^2}{10}\alpha_{2,i,j} - \frac{y_{d2,i}^2}{10}\alpha_{3,i,j} - \frac{y_{dx,i}^2}{9}\varepsilon_{i,j} \left(K_x + \frac{4}{3}\mu_x\right)}{\beta_{i,i,j} + \frac{y_{d1,i}^2}{10}\beta_{2,i,j} - \frac{y_{d2,i}^2}{10}\beta_{3,i,j} - \frac{y_{dx,i}^2}{9}\varepsilon_{i,j} \left(K_x + \frac{4}{3}\mu_x\right)},$$

$$y_{d1,i}^2 = \frac{\omega^2}{(K_1 + \frac{4}{3}\mu_1)/\rho_1} b_i^2, \quad y_{d2,i}^2 = \frac{\omega^2}{(K_2 + \frac{4}{3}\mu_2)/\rho_2} a_j^2, \quad y_{dx,i}^2 = \frac{\omega^2}{(K_x + \frac{4}{3}\mu_x)/\rho_x} b_i^2$$

$$M_{2,i,j} = \frac{\varepsilon_{i,j} \alpha_{x,2} \left(\frac{\mu_x}{\mu_1} - 1\right) + (1 - \varepsilon_{i,j}) \alpha_{x,x} \left(\frac{\mu_x}{\mu_1} - 1\right)}{\varepsilon_{i,j} \alpha_{x,2} \alpha_{1,x} + (1 - \varepsilon_{i,j}) \alpha_{x,x} \alpha_{1,2}}, \quad \alpha_{m,i,j}, \beta_{m,i,j} \quad (m = 1, 2, 3)$$

는 식 (23) ~ (28)에서 셀 체적율  $\varepsilon$ 을  $\varepsilon_{i,j}$ 로 치환함으로 얻을 수 있다.

첨가제의 크기 분포는 실제 제품의 특성을 반영하여 아래와 같이 정규화된 레일리 분포함수(normalized Rayleigh distribution function)를 적용하였다<sup>7)</sup>.

$$\bar{n}(\varepsilon) = \frac{n_0 \pi \varepsilon}{2 \varepsilon^2} \exp\left(-\frac{1}{4} \pi \left(\frac{\varepsilon}{\bar{\varepsilon}}\right)^2\right) \quad (38)$$

여기서,  $n_0$ 는 정규화 요소(normalization factor)이며  $\bar{\varepsilon}$ 는 평균 셀 체적율(mean shell fraction)이다.

### 3. 정수압에 따른 압축 변형해석

잠수함의 운용 환경 중에서도 특히 정수압은 음향재료의 압축 변형을 발생시켜 음향성능 변화를 초래하는 주요 인자로 작용한다. 정수압을 고려한 수중음향재료의 음향성능 해석을 위한 모델링 기술은 음향재료 자체의 설계/개발에 매우 중요한 역할을 할 뿐만

아니라, 그 재료가 적용된 시스템의 성능 해석 및 분석 등에 매우 중요한 역할을 담당한다. 음향재료의 압축변형 거동은 첨가제가 단순 기공 또는 중공 유리 미세입자인가에 따라서 매우 다른 거동을 보인다. 본 연구에서는 기공 붕괴에 대한 Caroll과 Holt의 중공구 모델(hollow sphere model)<sup>[8,9,10]</sup>을 기초로 정립된 Kerr와 Baird<sup>[3]</sup>의 압축변형 해석기법을 따른다.

### 3.1 단순 기공(voids)

구형 단순 기공(spherical air-filled cavities or voids)의 압축변형해석에 대한 중공구 모델의 기본 가정은 다음과 같다.

- 점탄성 모재는 비압축성(incompressible)이며, 모재내의 응력은 정수압 하에서 등방성(isotropic)이다.
- 구형의 기공은 압축 변형되어도 구 형태를 유지한다.

Fig. 4에 다양한 크기의 기공을 갖는 모재의 대표체적 및 압축 전/후의 기하학적 변형 관계를 표기하였다.

$\phi = (a/b)^3$ 는 기공의 체적 집적율을 나타내며 변형 후  $\phi' = (a'/b')^3$ 이 되며 기공의 내부압력은  $\Gamma$ 에서  $\Gamma'$ 으로 증가한다.

모재의 변위 필드에 대한 방정식은 다음과 같다.

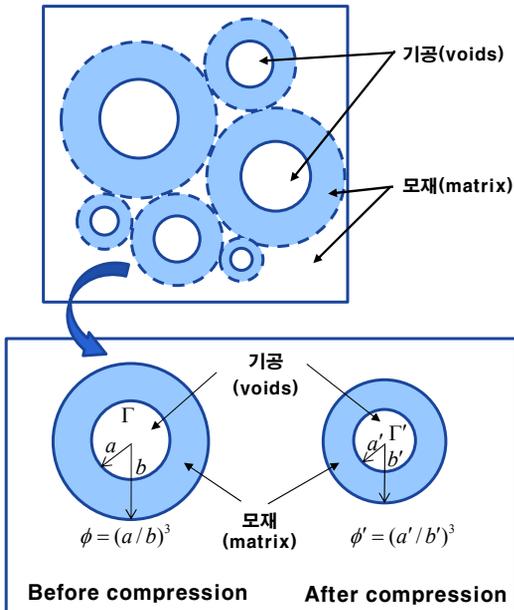


Fig. 4. Representative sphere of voids

$$\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{2}{r^2} u_r = 0 \quad (39)$$

상기의 식 (39)의 해는 다음과 같다.

$$u_r = Ar + \frac{1}{3}B/r^2 \quad (40)$$

여기서,  $A$ 와  $B$ 는 경계조건에 의해 결정될 계수이다. 반경방향 응력은 다음과 같다.

$$\tau_{rr} = \lambda \nabla \cdot \mathbf{u} + 2\mu \frac{\partial u_r}{\partial r} = 3KA - \frac{4}{3}\mu B/r^3 \quad (41)$$

여기서,  $K = \lambda + \frac{2}{3}\mu$ 는 모재의 체적 탄성계수이다. 기공과 모재사이의 하중 경계조건은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \tau_{rr} &= -(\Gamma' - \Gamma) & \text{at } r = a' \\ \tau_{rr} &= -P & \text{at } r = b' \end{aligned} \quad (42)$$

여기서,  $P$ 는 정수압을 나타낸다.

하중조건 외에 모재의 비압축성 가정, 기공의 압축에 대한 보일의 법칙(Boyle's law) 및 미소 변형조건(infinitesimal displacement) 등이 압축 변형해석에 적용될 수 있으며 각각은 아래의 식으로 표현된다.

$$b'^3 - a'^3 = b^3 - a^3 \quad (43)$$

$$\Gamma a^3 = \Gamma' a'^3 \quad (44)$$

$$B \equiv a'^3 - a^3 \quad (45)$$

식 (42) ~ (45) 및 압축 변형 전/후의 기공 체적 집적율  $\phi = (a/b)^3$ ,  $\phi' = (a'/b')^3$ 을 이용하여 정리하면 다음과 같이  $\phi'$ 에 대한 2차 방정식을 얻을 수 있다.

$$(\phi' - \phi) \left\{ 1 - \phi' + \frac{3\Gamma}{4\mu} \right\} + \frac{3P}{4\mu} \phi' (1 - \phi) = 0 \quad (46)$$

$\phi'$ 이 주어지면 압축변형 후의 기공의 반경 및 복합재 레이어의 두께 및 기공 내부압력(증가된 압력)은 다음과 같이 주어진다.

$$a'^3 = \frac{\phi' (1 - \phi)}{\phi (1 - \phi')} a^3 \quad (47)$$

$$h' = h \frac{1-\phi}{1-\phi'} \quad (48)$$

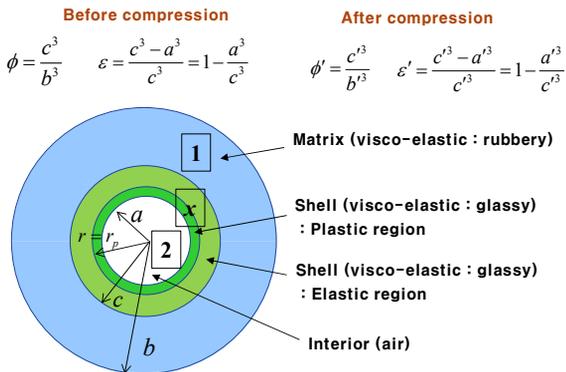
$$\Gamma' = \frac{a^3}{a'^3} \Gamma \quad (49)$$

다양한 첨가제의 크기 분포를 갖는 경우는 전체 기공의 평균 체적 집적율  $\phi_{mean}$  에 대한  $\phi'_{mean}$  을 산출함으로써 압축 변형해석이 수행된다.

### 3.2 중공 유리 미세입자(Hollow Glass Microsphere)

Fig. 5에 중공 유리 미세입자의 대표구 개념도를 나타내었다. 정수압 환경에서 구형의 중공 유리 미세입자의 압축 변형은 단순 기공에 비하여 복잡한 거동을 보인다. 그러한 이유는 다음의 두 가지로 설명된다.

첫 번째 이유는 다음과 같다. 셸 벽면(shell wall)은 탄성 변형 뿐만 아니라, 작용하는 정수압의 크기, 셸 벽면 두께에 따라서 탄-소성 또는 완전 소성 거동을 보이기 때문이다. 전형적인 셸의 거동은 초기에 탄성 거동으로 출발하여 셸 내부에서 발생된 편향응력(deviatoric stress)이 셸 재료의 항복 응력(yield stress) 직전까지는 탄성 거동을 보인다. 항복 응력을 지나면 탄성-소성 변형의 경계면( $r=r_p$ )이 셸의 내부에서 외부로 셸 재료를 통하여 진행하기 시작한다. 탄성-소성 변형의 경계면이 셸의 외부 경계면에 도달한 후에는 완전 소성 변형 거동(fully plastic behavior)을 보인다.



$r_p$  :  $a \rightarrow c$  vary rapidly at yield pressure of shell as hydrostatic pressure increases

$K_1, \mu_1, A_1, B_1$  : matrix properties

$K_x, \mu_x, A_x, B_x$  : shell properties

$K_2, \mu_2 \approx 0, A_2, B_2 \approx 0$  : interior air properties

Fig. 5. Representative sphere of microspheres

본 연구에서는 외부하중에 따라 탄성변형에서 완전 소성변형으로 급속히 발생하는 얇은 두께의 셸에 대해서만 고려하기 때문에 항복 압력(yield pressure)으로 알려진 특정 압력조건을 기준으로 탄성에서 완전 소성으로의 천이(transition)가 순간적으로 발생한다고 가정된다. 따라서 중간단계의 탄성-소성 영역에 대한 별도의 모델링은 필요하지 않고 단지 셸의 항복 압력을 기준으로 탄성 거동 및 완전 소성 거동 영역에 대한 모델링만 본 연구의 해석 대상이 된다.

두 번째 이유는 셸의 크기(반경)와 두께가 동시에 변한다는 것이다. 실제의 재료에서 다양한 크기의 셸이 모재 내에 분포할 수 있으며 정수압이 작용하여 압축변형 거동이 발생할 경우, 어떠한 특정 압력에서 일부는 탄성 거동을 보이며 일부의 셸은 완전 소성 거동이 발생한다.

#### 3.2.1 탄성 영역 셸 변형

등방성 및 비압축성 가정은 중간층 셸에도 그대로 적용되며, 내부 코어에는 공기 또는 가스로 채워 질 수 있다. 탄성영역에서 셸 및 모재의 변위 및 응력은 식 (40) 및 (41)과 동일한 형태를 갖는다.

압축 변형된 상태에서 내부 기공, 셸 및 모재 경계면에서 하중 조건은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \tau_{rr} \Big|_{r=a'(inshell)} &= -(\Gamma' - \Gamma) \\ \tau_{rr} \Big|_{r=b'(inmatrix)} &= -P \\ \tau_{rr} \Big|_{r=c'(inshell)} &= \tau_{rr} \Big|_{r=c'(inmatrix)} \end{aligned} \quad (50)$$

셸 및 모재의 비압축성, 내부 공기에 대한 보일의 법칙 그리고 미소 변위에 대한 관계식은 다음과 같다.

$$b'^3 - a'^3 = b^3 - a^3, c'^3 - a'^3 = c^3 - a^3, b'^3 - c'^3 = b^3 - c^3 \quad (51)$$

$$\Gamma a^3 = \Gamma' a'^3 \quad (52)$$

$$B_x \cong a'^3 - a^3, B_1 \cong c'^3 - c^3 \quad (53)$$

식 (50)을 다시 표현하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} 3K_x A_x - \frac{4}{3} \mu_x B_x a'^{-3} &= -(\Gamma' - \Gamma) \\ 3K_1 A_1 - \frac{4}{3} \mu_1 B_1 b'^{-3} &= -P \\ 3K_x A_x - \frac{4}{3} \mu_x B_x c'^{-3} &= 3K_1 A_1 - \frac{4}{3} \mu_1 B_1 c'^{-3} \end{aligned} \quad (54)$$

식 (54) 및 Fig. 5에서  $A_1, B_1, A_x, B_x, A_2, B_2$ 는 각 영역 (1,x,2)에 대한 반경방향 변위를 나타내는 식 (40)의 계수에 해당된다.

식 (51) ~ (54)를 정리하면 다음과 같다.

$$(\phi' - \phi) \left[ (1 - \phi') - \frac{\mu_x}{\mu_1} + \frac{1}{1 - \varepsilon x} \left( \frac{\mu_x}{\mu_1} + \frac{3\Gamma}{4\mu_1} \right) \right] + \frac{3P}{4\mu_1} \phi' (1 - \phi) = 0 \quad (55)$$

여기서,  $x = \frac{c^3}{c'^3} = \frac{\phi' (1 - \phi')}{\phi' (1 - \phi)}$ .

### 3.2.2 소성 영역 셀 변형

소성 재료(plastic material)에서 반경방향(radial) 및 원주방향(circumferential)의 응력은 재료의 항복(yield)와 연관되어있다. 본 연구에서는 보수적 측면에서 트레스카 항복조건(Tresca yield condition)을 적용한다.

$$\tau_{rr} - \tau_{\theta\theta} = 2\chi \quad (56)$$

여기서,  $\chi = Y/2$ 는 셀의 단순 전단(simple shear) 항복점을 나타낸다.( $Y$ 는 단축 인장 항복응력을 나타냄) 셀의 하중 평형 방정식은 아래와 같다.

$$\frac{\partial \tau_{rr}}{\partial r} + \frac{2}{r} (\tau_{rr} - \tau_{\theta\theta}) = 0 \quad (57)$$

식 (56)을 식 (57)에 대입하고 적분을 수행하면 반경방향 응력은 다음과 같다.

$$\tau_{rr} = A_x - 4\chi \ln r \quad (58)$$

여기서,  $A_x$ 는 경계조건에 의해서 결정되는 적분상수이며, 모재는 여전히 탄성영역으로 간주되므로 모재의 반경방향 응력은 다음과 같다.

$$\tau_{rr} = 3K_1 A_1 - \frac{4}{3} \mu_1 B_1 r^{-3} \quad (59)$$

따라서 소성영역 셀의 경계면 응력 연속조건은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} A_x - 4\chi \ln a' &= -(\Gamma' - \Gamma) \\ 3K_1 A_1 - \frac{4}{3} \mu_1 B_1 b'^{-3} &= -P \\ A_x - 4\chi \ln c' &= 3K_1 A_1 - \frac{4}{3} \mu_1 B_1 c'^{-3} \end{aligned} \quad (60)$$

압축 전/후 미세입자의 기하학적 관계는 식 (51) ~ (53)과 같으며, 식 (60)에 적용하면 다음과 같다.

$$\left(1 - \frac{\phi}{\phi'}\right) \left[ (1 - \phi')(1 - \varepsilon x) + \frac{3\Gamma}{4\mu_1} \right] + (1 - \phi) \left[ \frac{3P}{4\mu_1} + \frac{\chi}{\mu_1} \ln(1 - \varepsilon x) \right] (1 - \varepsilon x) = 0 \quad (61)$$

### 3.2.3 셀 항복조건

항복의 발생에서 완전 소성변형으로의 진행이 순간적으로 발생한다고 가정되었다. 따라서 항복조건 관계식 (56)은 셀의 외경( $r = c'$ )에서 평가되어야한다.

식 (53), (56), (57), (59) 및  $x = \frac{c^3}{c'^3} = \frac{\phi' (1 - \phi')}{\phi' (1 - \phi)}$ 으로부터 셀의 항복점  $\chi$ 는 다음과 같다.

$$\chi = -\mu_1 (1 - x) \quad (62)$$

식 (62)를 식 (61)에 대입하고 정리하면 탄성/소성영역에 대한 임계 하중(정수압)  $P^*$ 는 아래와 같다.

$$P^* = \frac{4\chi}{3} \left[ \frac{(1 - \phi) \left(1 + \frac{\chi}{\mu_1}\right)}{\phi + (1 - \phi) \left(1 + \frac{\chi}{\mu_1}\right)} + \frac{3\Gamma}{4\mu_1} \frac{1}{1 - \varepsilon \left(1 + \frac{\chi}{\mu_1}\right)} \right] - \frac{4\chi}{3} \ln \left(1 - \varepsilon \left(1 + \frac{\chi}{\mu_1}\right)\right) \quad (63)$$

다시 말하면, 주어진 정수압 및 재료 특성에 대하여 각각의 중공 유리 미세입자는 그 형상(크기 및 셀 체적율)에 따라서 임계 하중이 결정된다. 따라서 크기 분포를 가지는 경우 어떤 미세 기공들은 탄성영역에서 나머지는 완전 소성영역에서 압축변형 해석을 수행해야함을 의미한다. 수치적 계산은 임계 하중  $P^*$ 를 기준으로 탄성영역 및 소성영역으로 구분하고, 식 (55) 및 (61)을 통하여 각 개별 중공 유리 미세입자에 대한 대표 체적의 체적 집적율 변화를 계산한 후 전체에 대한 앙상블 평균(ensemble average)을 산출하면 중공 유리 미세입자를 포함하는 점탄성 복합재 레이어의 두께 변화를 계산할 수 있다.

### 3.2.4 소성영역 셀 특성

또 한 가지 언급한 중요한 모델링 기법으로는 소성 거동을 보이는 동안 셀 재료의 특성에 대한 것이다. Fig. 6에 이상적인 탄성/완전소성 재료의 전단응력-변형률 선도를 나타내었다. 좀 더 실제적인 거동은 항복이 시작되고 어느 정도 진행된 후에 소성영역으로 진행되나 본 연구의 대상은 이러한 천이 영역을 무시할 만큼 얇은 두께의 셀을 다루므로 이상적인 응력-변형률 선도에 대한 가정이 타당하다고 본다. 즉, 소성영역

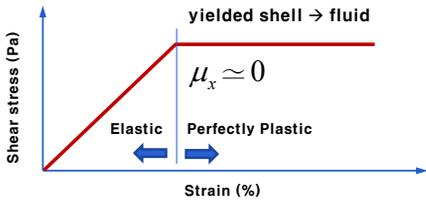


Fig. 6. Idealized elastic-perfectly plastic stress-strain curve

역에서 셸의 전단탄성계수는 이상적으로 ‘0’으로 처리될 수 있음을 의미한다. 따라서 항복이 발생된 중공 유리 미세입자의 셸은 근사적으로 유체로 모델링된다.

#### 4. 음향성능해석 통합모델 및 수치해석

##### 4.1 음향성능해석 통합모델

점탄성 복합재 및 균질재료(잠수함 압력선체 및 배플 후면 등)를 포함하는 다층구조 음향시스템에 대하여 정수압을 고려한 음향성능해석 모델은 다음과 같이 구성된다. 각 레이어의 기하학적 인자(두께, 체적 집적율, 기공의 크기 등) 및 재료 물성치(밀도, 탄성계수, 항복점 등) 등이 정의되면 해석하고자하는 정수압 범위에서 각 층의 모델에 적합한 압축변형해석모델을 적용하여 해당 수심의 정수압에서 변형된 기하학적 파라미터를 산출한다. 이때 첨가제의 크기분포 모델을 적용할 경우 레일리 분포특성과 압축변형모델을 결합하여 적용한다. 스틸 및 알루미늄 등의 금속성 재료로 구성된 균질 레이어는 점탄성 재료에 비하여 강성이 상대적으로 매우 높은 재료로 비압축성 균질재료로 처리된다.

다층구조 음향시스템에 대한 음향해석은 여러 참고 문헌에서 찾아볼 수 있는데<sup>[11,18,19]</sup>, 본 연구에서는 정식화의 간결성 및 수치해석의 안정성 등을 고려하여 동강성 행렬법<sup>[11]</sup>을 적용하였다. 본 연구에서 정립된 다층의 균질/비균질 레이어로 구성된 복합 음향시스템의 수중 음향성능해석 통합모델의 개념은 Fig. 7과 같다. 균질레이어의 경우, 점탄성재료에 비하여 상대적으로 강성이 높고 주파수 및 온도에 덜 민감하게 거동하기 때문에 영률(Young's modulus), 밀도, 손실계수 등이 상수로 입력되며 일반 3차원 탄성이론을 적용하여 음향해석을 위한 동강성 행렬이 구성된다. 구형의 첨가제를 갖는 점탄성 복합재의 경우 Fig. 7에서 보는

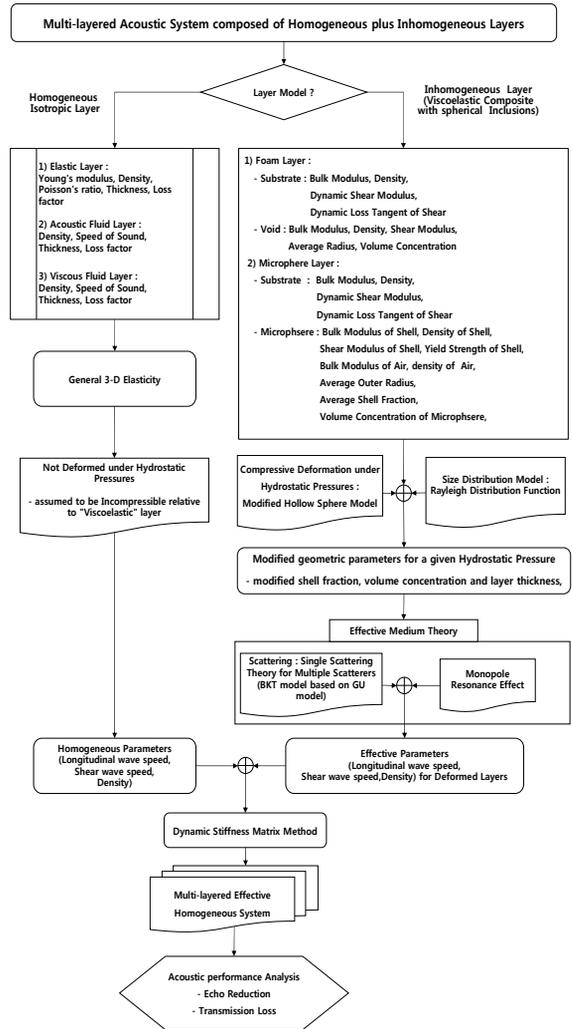


Fig. 7. Integrated analysis model of multi-layered acoustic system considering hydrostatic pressures

바와 같이 단순 기공이나 중공 유리 미세입자에 따라서 다양한 입력 파라미터를 갖는다.

점탄성 모재의 경우, 운용 수심의 온도, 음향 관심 주파수 범위에서 체적 탄성계수, 동적 전단 탄성계수 (dynamic shear modulus) 및 손실 계수(loss factor), 그리고 정수압 등이 주요한 해석 입력 파라미터이다. Fig. 8에 전형적인 점탄성재료(natural rubber at 0 °C, styrene-butadiene rubber at 20 °C)의 복소 탄성계수 및 각 손실계수 등에 대한 특성 곡선을 나타내었다<sup>[20]</sup>. 체적 및 종방향 탄성계수는 전단 탄성계수와 비교하여

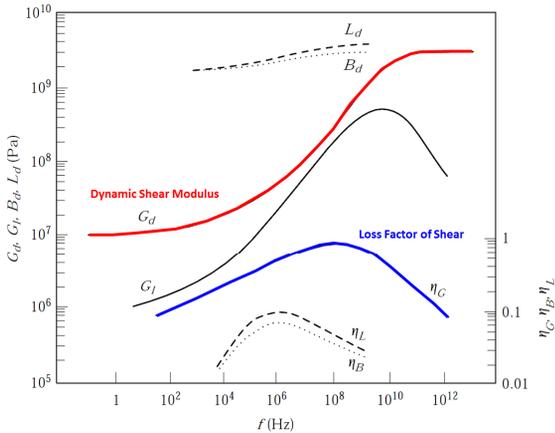


Figure 9. Frequency dependences of dynamic shear, bulk and longitudinal moduli, and the relevant loss functions of rubbery materials. —, Shear dynamic properties of a natural rubber filled with carbon black at 0°C. (Data from Payne and Scott [20]). Bulk (...) and longitudinal (---) dynamic properties of a styrene-butadiene rubber at 20°C. (Data from Wada *et al.* [21]). The loss factors  $\eta_B$  and  $\eta_L$  have been calculated from the published values of the relevant loss and dynamic moduli.)

Fig. 8. Complex dynamic modulus of typical viscoelastic materials<sup>[20]</sup>

주파수 의존성이 약하고 음향 성능에 영향을 주는 손실 계수가 상대적으로 매우 낮다. 따라서 동적 체적 탄성계수는 상수로 취급되며, 동적 전단 탄성계수 및 손실 계수는 주파수의 함수로 취급하였다. 점탄성 소재의 동적 전단 탄성계수 및 손실 계수에 대한 직접적인 측정방법(direct method)<sup>[21-23]</sup>은 주로 수 kHz이내의 범위에서 적용 가능한데, 음향코팅재의 측면에서 보면 극히 저주파수 대역에 해당된다. 음향학적 관심 주파수 대역(최대 수백 kHz 또는 수백 MHz)까지 점탄성 재료의 동적 특성 곡선은 DMTA-TTA 기법을 이용하여 추정될 수 있다<sup>[24,25,35]</sup>.

점탄성 재료의 동적 전단 탄성계수( $G_d$ ) 및 손실 계수( $\eta_G$ )는 다음과 같이 주파수의 3차 다항식으로 근사적으로 모델링될 수 있다<sup>[7,24,25,35]</sup>.

$$\log_{10} G_d = A_0 + A_1 \log_{10} f + A_2 (\log_{10} f)^2 + A_3 (\log_{10} f)^3 \quad (64)$$

$$\eta_G = B_0 + B_1 \log_{10} f + B_2 (\log_{10} f)^2 + B_3 (\log_{10} f)^3 \quad (65)$$

#### 4.2 수치해석

본 연구의 수중 음향성능해석 통합모델에 대한 수치 계산을 위하여 물리/공학용 수치계산 소프트웨어 Mathematica(Ver. 8.0)를 이용하여 계산 코드를 작성하였으며, 두 가지 벤치마크 수치모델에 대한 결과를 통하여 본 연구에서 작성된 계산코드의 신뢰성을 확인하였다.

#### 4.2.1 벤치마크 수치모델 (비 정수압모델)

참고문헌 [7]에 제시된 수치모델의 입력파라미터를 Table 1에 나타내었다. 소재의 전단 탄성계수를 기준으로 강성 폴리머(stiff polymer) 및 연성 폴리머(soft polymer)로 구분되었다. 문헌에서 강성 폴리머의 경우 두께 1 cm에 첨가제의 체적 집적율은 17%, 그리고 연성 폴리머는 2.5 cm 두께에 10%의 체적 집적율에 대한 시편을 제작하여 실험과 모델 해석결과를 비교하였다.

Fig. 9와 10에 참고문헌 [7]의 해석 및 시험결과, 그리고 본 연구에서 작성된 코드의 계산결과를 겹쳐서 나타내었다. 참고문헌과 본 연구의 계산결과는 잘 일치하고 있음을 알 수 있다. 특히, Fig. 10에서 보듯이 첨가제의 크기 분포를 고려한 모델(BKT 모델)의 예측 결과가 동일한 크기로 가정한 모델(GU 모델)보다 실

Table 1. Benchmark numerical model 1

Parameters		Stiff Polymer	Soft Polymer
Bulk modulus of substrate(Pa)		$3 \times 10^9$	$3 \times 10^9$
Density of substrate(kg/m <sup>3</sup> )		1090	935
Coefficients of dynamic shear modulus (storage modulus) $G_d$	A0	6.67569	5.93978
	A1	$3.954 \times 10^{-2}$	$2.6618 \times 10^{-1}$
	A2	$9.39 \times 10^{-3}$	$-3.613 \times 10^{-2}$
	A3	$3.85 \times 10^{-2}$	$4.1 \times 10^{-3}$
Coefficients of dynamic shear loss factor (loss tangent) $\eta_G$	B0	$9.792 \times 10^{-2}$	$5.251 \times 10^{-2}$
	B1	$5.9 \times 10^{-4}$	$1.9374 \times 10^{-1}$
	B2	$6.89 \times 10^{-2}$	$-6.209 \times 10^{-2}$
	B3	$-9.25 \times 10^{-3}$	$8.19 \times 10^{-3}$
Bulk modulus of shell(Pa)		$2.1 \times 10^9$	$2.1 \times 10^9$
Density of shell(kg/m <sup>3</sup> )		1700	1700
Shear modulus of shell(Pa)		$1.26 \times 10^9$	$1.26 \times 10^9$
Loss tangent of shell		0.1	0.1
Bulk modulus of air at 1 atm(Pa)		$1.4 \times 10^5$	$1.4 \times 10^5$
Density of air at 1 atm(kg/m <sup>3</sup> )		1.28	1.28
Average shell fraction		$2.5 \times 10^{-2}$	$2.5 \times 10^{-2}$
Average outer shell radius(m)		$5 \times 10^{-5}$	$5 \times 10^{-5}$

험 결과를 더욱 잘 추종하고 있음을 알 수 있다. 비록 고주파수 영역으로 갈수록 저주파수 대역 점진적 근사를 적용한 단일 산란 모델과 실험 결과의 편차가 다소 커지고 있으나, 최대 3~4 dB 수준으로 재료 설계 및 성능 분석에 충분히 활용할 수 있다고 판단되며 본 연구에서 작성된 코드의 결과 또한 그 신뢰성을 확인하였다고 판단된다. Fig. 11은 강성 폴리머에 대하여 다양한 체적 집적율에 대한 해석결과를 보이고 있다. 첨가제의 체적 집적율이 증가할수록 재료의 밀도가 감소하여 상대적으로 연성 재질로 변하여 물과의 임피던스 불일치 효과가 증가한다. 결과적으로 투과손실의 증가를 초래하게 된다.

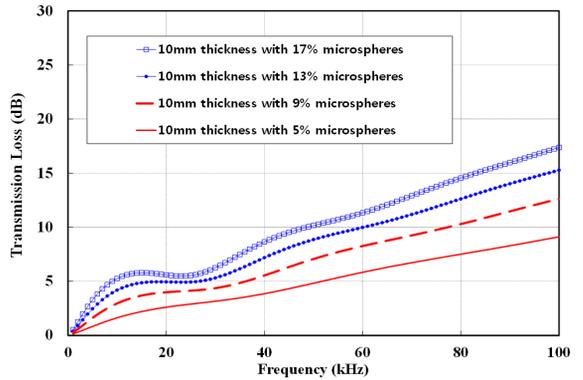


Fig. 11. Simulation Results of Stiff Polymer(1 cm thickness) for various volume concentrations of microspheres

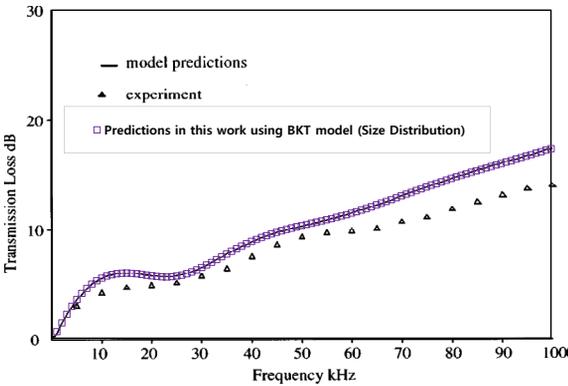


Fig. 9. Simulation and experimental results of stiff polymer(1 cm thickness, with 17% microspheres)

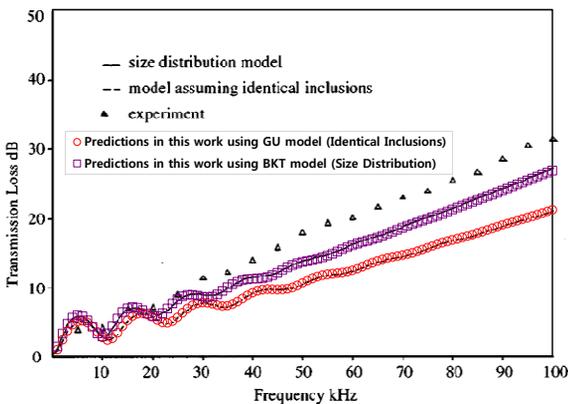


Fig. 10. Simulation and experimental results of soft polymer(2.5 cm thickness, with 10% microspheres)

#### 4.2.2 벤치마크 수치모델(정수압 모델)

참고문헌 [3, 27]에 제시된 정수압을 고려한 두 가지 모델에 대한 수치 시뮬레이션을 수행하였으며, 문헌의 실험 및 해석 결과와 비교/분석하였다.

두 번째 수치 모델<sup>[3]</sup>은 첨가제의 체적 집적율을 달리 하는 두 가지 점탄성 복합체로 구성된 것으로 모델의 제원은 Table 2와 같다. 전방 레이어는 4%의 체적 집적율을 갖는 폴리우레탄 복합체인데 이것은 반향음 감소 증대 효과를 위한 것이고, 38%의 높은 체적 집적율을 갖는 후방 레이어는 투과손실 특성 증대를 위한 것으로 파악된다. 참고문헌 [3]에서는 각 레이어의 두께, 첨가제의 셀 체적율 및 평균 내경에 대한 정보(평균 내경 50  $\mu\text{m}$ , 평균 셀 체적율 0.025, 셀 체적율은 레일리 분포를 따르는 것으로 가정함)만 제공되고 있기 때문에 참고문헌 [7]의 강성 폴리머의 물성치 및 첨가제의 특성을 입력 자료로 활용하여 시뮬레이션을 수행하였다. 반향음감소에 대한 참고문헌 [3]의 해석 결과 및 본 연구 결과를 Fig. 12 및 13에 각각 나타내었다. 3 kHz ~ 6 kHz 주파수 범위에서 성능의 최대 수준을 보이며 정수압이 증가하면서 피크의 위치는 저주파수 대역으로 옮겨가는데 이것은 초기의 압력증가는 셀 재료는 더욱 유연해지기(softer) 때문이다. 임계값 이상(여기서는 200 psi)에서 다시 고주파수 대역으로 이동하는 결과를 보이고 있다. 200 psi 이상의 정수압에서는 모든 중공 유리 미세입자가 항복을 지나 기공 붕괴(pore collapse)가 발생하여 재료 전체 특성이 강성으로 변했기 때문에 마치 공진 주파수가 증가하는 현상과 유사한 경향을 보이는 것으로 분석된다. 다

만 본 연구의 계산 결과는 400 psi에서 피크의 수준이 200 psi 보다 증가하였는데 이것은 참고문헌에서 모재 및 첨가제에 대한 정보를 명확히 제공하고 있지 않아 본 연구의 입력 자료와 서로 상이하기 때문으로 여겨진다. Fig. 13에서 정수압을 지속적으로 증가시킬 경우 피크 주파수의 위치는 고주파수 대역으로 옮겨지며 반향음감소 특성의 수준은 감소한다. 즉, 임계 정수압은 다르나 전반적인 정수압의 영향은 Fig. 12와 유사하다. Fig. 14는 참고문헌 [3]에서 제시하는 수중 입피턴스 튜브를 이용한 계측결과이다. 비록 해석 결과와 실험 결과는 절대적인 수준에서는 차이를 보이고 있으나, 전체적인 정수압 및 주파수 특성은 매우 잘 반영하고 있다.

정수압을 고려한 수치 모델에서 강화 미세입자 쉘의 항복강도도 주요한 입력 파라미터인데 각 참고자료에서는 그 값을 제시하고 있지 않아서 참고문헌 [28, 29]를 참고하여 단축 인장 항복응력( $Y$ )을 35 MPa로 설정하였다.

Table 2. Benchmark numerical model 2

Layers	Composition	Properties	Remark
1	Cover Layer 50 mm thick polyurethane, 4 % volume concentration	Stiff Polymer in Table 1 <sup>[6]</sup>	Viscoelastic composites for ER
2	Backing Layer 70 mm thick polyurethane, 38 % volume concentration		Viscoelastic composites for TL

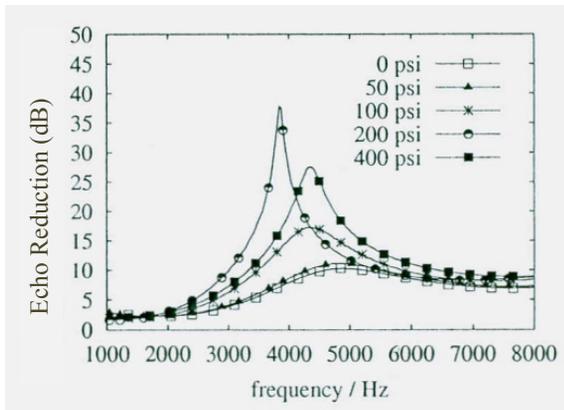


Fig. 12. Analysis results of numerical model 2<sup>[3]</sup>

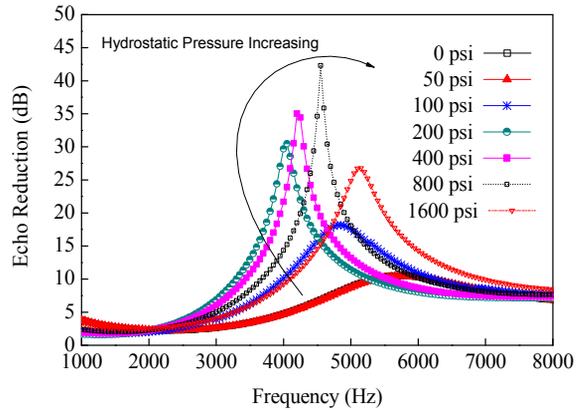


Fig. 13. Analysis results of numerical model 2 in this work

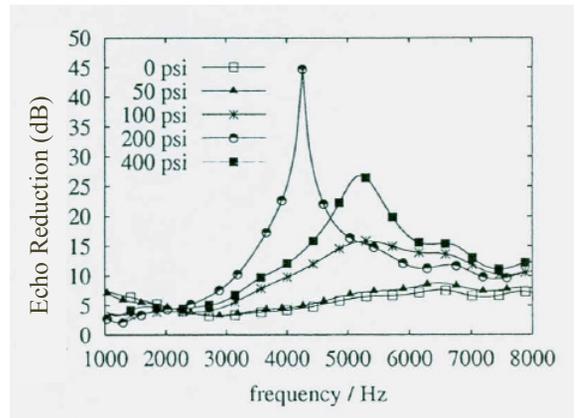


Fig. 14. Experimental results of numerical model 2<sup>[3]</sup>

2가지의 벤치마크 수치 모델<sup>[3,7]</sup>에 대한 해석결과의 비교/분석을 통하여 본 연구에서 제시하고 있는 다층구조 음향 재료 시스템의 수중음향 성능을 분석하는 통합기법 및 관련 수치계산 코드는 충분히 검증되었다고 판단된다.

## 5. 결론

본 연구에서는 점탄성 복합재를 균질의 등가 매질로 근사시키는 유효 매질 이론, 첨가제의 통계적 분포, 다층구조 음향 성능 해석을 위한 동강성 행렬법 및 정수압에 따른 압축변형해석 기법 등 다양한 이론 및 기법을 연계하여 다층의 균질/비균질 복합 음향 레

이어 시스템의 수중 음향성능해석 통합 모듈을 개발하였다. 본 연구 결과는 국내 중형급 잠수함인 장보고-III에 적용되는 선체 음향코팅재를 포함하여 소나 돔 및 음향배플 개발에도 적용되었다<sup>[36,37]</sup>.

## References

- [1] "Anti Sonar Coating," www.uboataces.com Retrieved 17 December 2010.
- [2] Robert D. Corsaro, L. H. Sperling, A. H. Nayfeh, "Sound and Vibration Damping with Polymers," American Chemical Society, Washington, DC, 1990.
- [3] F. H. Kerr, A. M. Baird, "Acoustic Modeling of Signature Reduction Materials for Underwater Applications," IUTAM Symposium on Diffraction and Scattering in Fluid Mechanics and Elasticity, Kluwer Academic Publisher, Netherlands, pp. 123-132, 2002.
- [4] G. C. Gaunaurd, H. Überall, "Resonance Theory of Effective Properties of Perforated Solids," J. Acoust. Soc. Am., Vol. 71, No. 2, pp. 282-295, 1982.
- [5] Kim Jae Ho, "Analysis of Acoustic Performance of Composite Visco-elastic Materials Using Effective Medium Theory," The 2010 KSNVE Annual Spring Conference, pp. 435-436, 2010.
- [6] F. H. Kerr, "The Scattering of a Plane Wave by Spherical Elastic Inclusions," Int. J. Engng. Sci., Vol. 30, No. 2, pp. 169-186, 1992.
- [7] A. B. Baird, F. H. Kerr, D. J. Townend, "Wave Propagation in a Viscoelastic Medium Containing Fluid-Filled Microspheres," J. Acoust. Soc. Am., Vol. 105, No. 3, pp. 1527-1538, 1999.
- [8] M. M. Carroll, A. C. Holt, "Static and Dynamic Pore-Collapse Relations for Ductile Porous Materials," J. Appl. Phys. Vol. 43, No. 4, pp. 1626-1636, 1972.
- [9] Y Horie, A. B. Sawaoka, "Shock Compression Chemistry of Materials," KTK Scientific Publishers, Tyoko, Japan, pp. 137-141, 1992.
- [10] Richard. M. Christiansen, Mechanics of Composite Materials, Dover Publication, New York, US, pp. 275-280, 2005.
- [11] E. A. Skelton, J. H. James, "Theoretical Acoustics of Underwater Structures," Imperial College Press, UK, 1997.
- [12] A. C. Eringen, E. S. Suhubi, "Elastic Dynamics, Volume II, Linear Theory," Academic Press, New York, US, pp. 719-720, p. 913, 1975.
- [13] David T. Blackstock, "Fundamentals of Physical Acoustics," A Wiley-Interscience Publication, New York, US, Chapter 10, 2000.
- [14] Earl G. Williams, "Fourier Acoustics," Academic Press, London, United Kingdom, Chapter 6, 1999.
- [15] Product Specification for Expancel Microspheres (Expancel DE), www.akzonobel.com, 2016.
- [16] A. K. Mal, S. K. Bose, "Dynamic Moduli of a Suspension of Imperfectly Bonded Spheres," Proc. Cambridge Philos. Soc., Vol. 76, pp. 587-600, 1974.
- [17] G. C. Gaunaurd, H. Überall, "Author's Reply to Recent Comments on Our Effective Medium Theory," J. Acoust. Soc. Am., Vol. 82, No. 2, pp. 696-698, 1987.
- [18] L. Brekhovskikh, "Waves in Layered Media," Academic Press, London, UK, 1980.
- [19] E. L. Tan, "Hybrid Compliance-Stiffness Matrix Method for Stable Analysis of Elastic Wave Propagation in Multilayered Anisotropic Media," J. Acoust. Soc. Am., Vol. 119, No. 1, pp. 45-53, 2006.
- [20] T. Pritz, "Frequency Dependences of Complex Moduli and Complex Poisson's Ratio of Real Solid Materials," Journal of Sound and Vibration, Vol. 214, No. 1, pp. 83-104, 1998.
- [21] B. P. Holownia and E. H. James, "Determination of Dynamic Bulk Modulus of Elastomers Using Pressure Measurement," Rubber Chem. Technol., Vol. 66, pp. 749-753, 1993.
- [22] R. L. Willis, T. S. Stone, Y. H. Bertholot, and W. M. Madigosky, "An Experimental-Numerical Technique for Evaluating the Bulk and Shear Dynamic Moduli of Viscoelastic Materials," J. Acoust. Soc. Am. Vol. 102, pp. 3549-3555, 1997.
- [23] R. L. Willis, L. Wu, and Y. H. Bertholot, "Determination of the Complex Young and Shear Dynamic Moduli of Viscoelastic Materials," J. Acoust. Soc. Am., Vol. 109, pp. 611-621, 2001.
- [24] John D. Ferry, "Viscoelastic Properties of Polymers,"

- John Willey & Sons, New York, US, 1980.
- [25] John Dealy, Don Plazek, "Time-Temperature Superposition - A Users Guide," *Rheology Bulletin*, Vol. 78, No. 2, pp. 16-31, 2009.
- [26] N. L. Carrol, R. J. Pamley, J. D. Smith, "Materials Characterisation using Impedance Tube Techniques," *Proceedings of the Institute of Acoustics*, Vol. 20, Part 3, pp. 79-86, 1998.
- [27] Victor F. Humphrey, Stephen P. Robinson, John D. Smith, Michael J. Martin, Graham A. Beamiss and Gary Hayman, Nicholas L. Carroll, "Acoustic Characterization of Panel Materials under Simulated Ocean Conditions Using a Parametric Array Source," *J. Acoust. Soc. Am.* Vol. 124, No. 2, pp. 803-814, 2008.
- [28] Alberto D'Amore, Luigi Grassia, Domenico Acierno, "Modelling the Yield Stress and the Poisson's Ratio of Glassy Polymers," *e-Polymers*, Vol. 9, No. 1, pp. 634-642, 2009.
- [29] Riccardo De Pascalis, I. David Abrahams, William J. Parnell, "Predicting the Pressure-Volume Curve of an Elastic Microsphere Composite", *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 61, No. 4, pp. 1106-1123, 2013.
- [30] Kim Jae Ho, "Development of Analysis Model of Acoustic Properties of Viscoelastic Composite Materials Using Effective Medium Theory," ADDR-511-101049, 2010.
- [31] V. K. Varadan, Y. Ma and V. V. Varadan, "A Multiple Scattering Theory for Elastic Wave Propagation in Discrete Random Media," *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol. 77, No. 2, pp. 375-385, 1985.
- [32] William J. Parnell, "Homogenization Techniques for Wave Propagation in Composite Materials," Ph.D. Thesis, University of Manchester, 2006.
- [33] Andrey V. Boiko, Victor M. Kulik, Basel M. Seoudi, H. H. Chun, Inwon Lee, "Measurement Method of Complex Viscoelastic Material Properties," *Internal Journal of Solids and Structures*, Vol. 47, pp. 374-382, 2010.
- [34] S. N. Iliopoulos, D. G. Aggelis, D. Polyzos, "Modeling the Dispersive Behavior of Fresh and Hardened Concrete Specimens through Non-Local Lattice Models," *Emerging Technologies in Non-Destructive Testing VI*, CRC Press. Taylor & Francis Group, pp. 125-131, 2016.
- [35] José Daniel Melo, Donald W. Radford, "Time-Temperature Dependence of PEEK/IM7," *Journal of Composite Materials*, Vol. 38, No. 20, 2004.
- [36] Kim Jae Ho, "Final Report of Jangbogo-III(Batch-I) Acoustic Target Strength Analysis," ADDR-513-111012C, 2011.
- [37] Kim Jae Ho, "The Development Report of Acoustic Baffle's Test Specimen in Jangbogo-III Hull Mounted Array," ADDR-513-130718, 2013.