韓國數學教育學會誌 시리즈 A <數學教育>
https://doi.org/10.7468/mathedu.2018.57.4.353
2018. 11. 제 57권, 제 4호, 353-369.

J. Korean Soc. Math. Ed. Ser. A:
The Mathematical Education
November. 2018, Vol. 57, No. 4, 353-369.

다양한 형태의 등비급수 과제들에 대한 학생들의 생각과 표현에 관한 사례연구

이동근(문정고등학교 교사)

Ⅰ. 서론

이지현(2014)은 $0.999\cdots$와 1의 대소 관계에 대한 예비교사들의 정당화 과정을 조사하면서, 예비교사들이 $0.999\cdots=1$의 정당화는 잘 알고 있지만, $0.999\cdots<1$가 왜 성립하지 않는지에 대한 정당화에 대하여는 어려움을 겪고 있음을 지적하였다. 그런데 조한혁과 최영기(1999)가 영재 중학생들을 대상으로 진행한 연구에 의하면 학생들은 심적으로 $0.999\cdots=1$보다는 $0.999\cdots<1$가 옳다는 생각을 하고 있으며, $0.999\cdots=1$이라고 답을 하더라도 이는 교과서나 교사의 권위에 복종하여 수용하는 것임을 드러내었다. 이는 비단 영재 중학생만의 문제는 아닌 것으로 보인다. Buchholtz 외(2013)가 예비 중등교사의 교과지식에 대한 국제비교연구를 한 것에 의하면, 독일, 홍콩, 중국의 예비교사들의 경우 $0.999\cdots=1$라고 생각하는 교사의 비율이 절반도 안되는 것을 밝혀냈다. 즉, 국제적으로는 예비교사들에게도 $0.999\cdots=1$보다는 $0.999\cdots<1$이 더 자연스러운 방식임을 알 수 있다.

또 하나 주목할 것은 $0.999\cdots=1$의 정당화 방법이 $0.999\cdots<1$이라고 생각하는 학생들에게 $0.999\cdots<1$이 아닌 이유를 설명하지는 못한다는 것이다(이지현, 2014). 그나마 논리적으로 $0.999\cdots=1$이 학생들의 입장에서 분명하게 입증이 된다면 $0.999\cdots<1$이 아니라고 답할 수 있겠지만, 학교수학에서 극한을 도입할 때 '한 없이 가까이 간다.'는 직관적인 표현을 사용하여 도입(박임숙, 2002)하기 때문에 '도달 가능성'에 대한 인식론적 장애가 발생(박선화, 2000)하게 되고, 결과적으로 학생들에게 $0.999\cdots=1$를 강요하게 되는 상황이 발생할 수밖에 없을 것으로 보인다.

이지현(2014)이 예비교사들을 대상으로 '왜 $0.999\cdots<1$이 성립하지 않는가?'라고 한 질문은 대상이 누구인지를 떠나서 학교수학에 대하여 연구하는 사람들에게 중요한 시사점을 제공하여준다. 현장에서 수학교사들이 학생들의 학습 관련 연구들을 진행할 때 '가르쳐야할 지식을 잘 가르치는 것'만을 고민하지 않는다. 특히 교사가 지식을 정확하게 전달하였다고 해서 학생들이 그 지식을 교사가 의도한대로 구성한다는 보장이 없기 때문에(이동근, 신재홍, 2017), 현장에서 수학교사는 학생들이 학습 과정에서 지식을 어떻게 구성하여가는 지에 대하여 주목할 필요가 있다. 물론 학생들이 지식을 구성하는 과정에서 수학적 오류가 발생할 수도 있고, 학생의 구성 과정을 관찰하는 교사가 잘못 해석할 가능성이 있지만, 그럼에도 불구하고 지속적으로 학생들의 지식 구성 과정에 대한 정보를 축적하는 것은 더 발전된 학습모델을 제시하는데 도움이 될 수 있다(Steffe & Wiegel, 1996). 이때 지식 구성 과정의 시발점은 학생에게 있어서 익숙하면서도 자연스러운 과제나 수학적 지식에서 시작해야 한다(우정호, 2001). 즉, $0.999\cdots$와 1의 대소 관계에 대한 지식 구성의 시작은 $0.999\cdots=1$에서 시작하기 보다는 $0.999\cdots<1$에서 시작하는 것이 바람직 할 것으로 보인다.

또한 연구자는 $0.999\cdots<1$에 해당하는 과제를 '등비급수를 학습한 경험이 있는 학생들'을 대상으로 확인할 필요가 있다고 판단하였다. 이는 조한혁과 최영기(1999)가 극한이나 등비급수를 학습하기 이전의 중학생을 대상으로 $0.999\cdots<1$에 대한 지식을 확인한 연구

* 접수일(2018년 8월 21일), 수정일(2018년 10월 1일), 게재확정일(2018년 10월 15일)
* ZDM분류 : C30
* MSC2000분류 : 97C30
* 주제어 : 급수, 등비급수, 무한, 도달 가능성, 극한

에 이어서, 극한이나 등비급수를 학습한 경험이 있는 학생들의 경우에 $0.999\cdots$와 1의 대소 관계에 대한 인식이나 수학적 표현에 있어서 중학생을 대상으로 한 연구 결과와 어떠한 차이가 있는지 확인할 필요가 있기 때문이다.

고등학교에서 등비급수를 학습한 학생들은 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{9}{10}\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}$의 값을 구하는 방법에 대하여 학습하게 된다. 어떤 경우에는 정사각형에서 처음 정사각형 넓이의 $\frac{9}{10}$에 해당하는 부분을 칠하고 남은 부분에 대해서 다시 $\frac{9}{10}$에 해당하는 넓이에 칠하기를 반복적으로 행하는 과제의 형태로 학생들에게 소개되기도 한다. 그런데 여기서 몇 가지 예상되는 질문들이 있다.

1) 학생들은 이렇게 다양한 과제 상황을 $0.999\cdots$과 동일한 것으로 생각하고 있었을까?

2) 각 과제들에 대하여 답을 구성하는 과정에서의 표현을 살펴보았을 때, 과제 상호간의 반응에서 연결성이 있을까?

이러한 질문이 가능하다고 전제할 경우, '만약 학생들이 다양한 형태의 등비급수 과제들을 동일한 과제로 받아들이지 않고 있고, 과제들마다 답을 구하기 위하여 접근하는 방식이 달랐다면, 이들이 동일한 과제임을 인식하게 되었을 때 학생들은 어떠한 방식으로 '서로 달랐던 접근 방식'을 연결 지어 나갈 것인가?'라는 질문이 가능하다. 마지막 질문에 답을 찾아가는 과정에서 학생들의 등비급수에 대한 수학적 표현뿐만 아니라 급수 개념과 관련된 무한 개념이나 극한 개념 학습에 대한 여러 시사점들을 발견할 수 있을 것이다.

본 연구는 마지막 질문을 할 수 있을 것인지에 대하여 선행적으로 확인하는 과정에 해당하는 연구이다. 즉, 학생들이 $0.999\cdots$와 '실질적으로는 동일하지만 형태가 다른 과제 상황들'을 어떻게 생각하고 있는지를 확인하고 각 과제에 접근하는 학생들만의 수학적 표현을 살펴볼 것이다. 이를 위하여 일반계 고등학교에 재학 중인 이과 계열 고등학교 2학년 학생 세 명을 대상으로 진행한 9차시의 교수실험 자료 중에서 본 연구주제와 관련되는 차시의 자료를 분석한 결과를 중심으로 논의할 것이다.

이상의 논의를 통하여 본 연구에서는 '등비급수의 다양한 형태의 과제들에 대한 학생들의 생각과 표현은 어떠한가?'라는 연구문제를 설정하였다.

Ⅱ. 이론적 배경

1. 학교수학에서의 등비급수

현재 학교 현장은 교육과정 전환기에 해당한다. 2018년을 기준으로 고등학교 1학년 학생들은 2015 개정 수학과 교육과정을 따르고 고등학교 2학년과 3학년 학생들은 2009 개정 수학과 교육과정을 적용받는다. 2009 개정 수학과 교육과정을 소개한 교육과학기술부(2011)와 2015 개정 수학과 교육과정을 소개한 교육부(2015)에 따르면, 본 연구에서 논의하고자 하는 '등비급수'는 급수를 학습한 이후 다루어진다. 이때 급수 개념이 2009 개정 수학과 교육과정에서는 미적분Ⅰ 과목에서 다루어지고, 2015 개정 수학과 교육과정에서는 미적분 과목에서 다루어지기 때문에 '등비급수' 역시 이를 따른다고 볼 수 있다. 다만, 급수 개념은 수열의 극한과 정적분과 같은 다른 수학적 개념들과 연결되어있는데, 이들의 관계에 있어서는 2009 개정 수학과 교육과정과 2015 개정 수학과 교육과정에서 차이가 있다. 2009 개정 수학과 교육과정에서 개발된 9종의 미적분Ⅰ 교과서들은 모두 수열의 극한, 급수, 등비급수, 다항함수의 정적분의 개념들 순서대로 학습을 한다면, 2015 개정 수학과 교육과정에서 개발된 미적분 교과서들은 다항함수의 정적분, 수열의 극한, 급수, 등비급수의 순서로 학습하는 방식으로 구성될 것으로 예상된다.[1)] 이러한 도입 순서를 예상한 이유는 다항함수의 정적분이 2015 개정 수학과 교육과정의 수학Ⅱ 과목에 포함되어있기 때문인데, 2015 개정 수학과 교육과정의 과목 위계상 수학Ⅰ과 수학Ⅱ 과목을 모두 이수한 다음 미적분 과목을 선택할 수 있는 구조여서 다항함수의 정적분을 급수보다 먼저 학습하게 되는 것을 알 수 있다. 다만 다항함수의 정적분을 제외한 수열의 극한과 급수 및 등비급수의 학습 순서에는 변화가

1) 2015 개정 수학과 교육과정에서의 미적분 과목 교과서들은 심사 진행 중에 있기 때문에, 연구가 진행되는 시점에서 2015 개정 수학과 교육과정에서의 미적분 교과서들을 분석할 수 없었다. 이에 '예상된다'라는 표현을 사용하였다.

없을 것으로 예상된다. 그러나 본 연구는 2018년 현재 고등학교 2학년 학생들을 대상으로 교수실험을 진행한 결과를 다루고 있고, 아직 2015 개정 수학과 교육과정에서의 관련 교과서들이 출간되지 않은 점을 고려하여 교육과정 혹은 교과서에 대한 내용을 언급할 필요가 있을 경우 2009 개정 수학과 교육과정에서의 미적분Ⅰ 교과서들을 중심으로 다룰 것이다.

2. 수학사에서의 등비급수

수학사에서 등비급수와 수열의 극한의 발달 순서는 2009 개정 수학과 교육과정에서의 9종의 미적분Ⅰ 교과서들에서의 도입 순서와 차이가 있다. Knopp(1956)은 등비급수의 개념이 수열의 개념보다 복잡하지만 수열의 개념보다 먼저 발생하였다고 하였으며, 고대 바빌로니아의 점토판에 등비급수가 나타나는 것도 이를 뒷받침해준다(King, 1968). 이러한 등비급수 개념의 발달 과정에서 Cauchy는 수열과 극한의 개념을 이용하여 부분합의 극한이라는 급수의 정의를 도입하였으며, 이때 '합'이라는 용어를 이용하여 무한히 더해야 하는 실행 불가능한 과정을 나타내었다(Randolph, 1957). 즉, 급수에서의 '합'이라는 표현 속에는 단순히 몇 개를 더하는 것이 아니라 '무한히 더한다.'는 행위를 표현하려는 의도가 내포되어있다는 것과, Cauchy가 급수를 부분합의 극한으로 도입한 방식에 비추어볼 때 '극한' 개념이 연관되어있음을 알 수 있다. 이는 등비급수와 관련된 논의를 진행할 때, 무한 개념이나 극한 개념과 연관지어 고민할 필요가 있음을 보여주며, 한편으로는 등비급수와 관련된 학생들의 생각을 조사하는 과정에서 무한 개념이나 극한 개념과 관련된 연구에 시사점을 제시할 수도 있음을 보여준다.

예를 들어, $0.\dot{9}\left(=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{9}{10}\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}\right)$는 $0.999\cdots$과 1의 대소 관계를 살펴보는 과제와 $\lim_{n\to\infty}\left\{\sum_{k=1}^{n}\frac{9}{10}\left(\frac{1}{10}\right)^{k-1}\right\}$의 값을 구하는 과제와 같이 다양하게 살펴볼 수 있는데, 이들 모두 '실무한과 가무한'에 대한 논의 및 극한 개념에서의 인식적 장애에 대한 논의 등과 연관 지어 고민할 수 있다.

한편 이승우(2016)는 Archimedes의 정리 23에 대하여 언급하면서 '부분과 전체의 비'를 이용하여 등비급수를 해결하는 과정에 대하여 소개하였다. 특히 Archimedes의 정리 23의 대수적 풀이와 기하적 유추를 이용한 풀이를 다루면서 낙타 17마리를 세 명의 아들에게 각각 전체의 $\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{9}$로 차등 분배하는 고대의 문제를 등비급수의 또 다른 형태로 제시하였다. 이는 등비급수 개념을 학습할 때 등비급수 관련 문항들이 다양한 형태로 제시될 수 있음을 보여준다는 점에서, 본 연구에 시사해주는 바가 있다. 다만 이러한 선행연구들을 등비급수 학습 관련 연구로 연결하기 위해서는 학생들을 대상으로 진행한 실제적인 사례연구가 도움이 될 수 있는데, 이러한 연구들은 앞서 서론에서 언급한 조한혁과 최영기(1999)가 중학생을 대상으로 진행한 연구를 포함한 몇몇 연구에 그치고 있다. 특히 고등학생을 대상으로 급수 개념 혹은 등비급수 개념을 다룬 국내 연구는 신보미(2009)가 고등학교 2학년 학생 108명을 대상으로 정적분 개념의 이해를 조사하는 연구와 같이 간접적으로 등비급수 개념에 대한 언급을 한 적은 있으나 직접적으로 고등학생들의 등비급수 혹은 급수 개념을 다룬 연구는 드문 것으로 보인다.

3. 무한 개념과 관련된 연구

등비급수는 필연적으로 무한에 대한 논의를 포함하게 된다. 따라서 무한과 관련된 선행연구를 살펴보는 것은 직간접적으로 본 연구를 이해하는데 도움이 될 수 있다. 무한과 관련된 선행연구들의 주장을 요약해보면, 선행연구들은 무한을 이해하는 두 가지 관점(가무한과 실무한)이 있음을 인정하고 있으며, 연구자가 확인한 선행연구들 대부분에서 직관적으로 자연스러운 가무한 관점에서 시작하여 동적인 속성을 제거하여 형식적으로 정의된 정적인 개념의 실무한 관점으로 발달한 것으로 소개하는 것을 확인하였다. 일부 연구들은 가무한 관점에서 실무한 관점으로 지도하는 것에 대한 문제제기를 하면서 가무한에 근거한 비표준 해석학과 실무한에 근거한 표준해석학 모두를 인정한 다음, 가무한 관점에서의 접근 방법이 더 자연스러울 수 있다는 의견을 제시하기도 하였다. 다만, 학생들의 무한에 대한 이해 방식이나 학습 과정에 대한 경험적 자료를 제시한 연구들이 드물다는 점에서 학생들을 대상으로 한 실제적인 연구가 필요함을 발견할 수 있었다. 무한 개념의 지도방안과

활용에 대하여 다양한 예제를 중심으로 중학교 교육과정에서의 접근 방법에 대한 논의를 진행한 강미광(2008)의 연구와 같이, 무한 개념의 학교수학에서의 도입을 위해서는 이와 관련된 다양한 논의가 선행될 필요가 있으며, 특히 학생들을 중심으로 한 실제적인 사례연구 결과의 축적이 요구된다. 전명남(2003)은 대학생 47명을 대상으로 16개의 과제를 가지고 무한 개념이해 수준의 발달을 논의하였는데, 본 연구에서는 이러한 선행연구들에 대한 분석과정을 통하여 고등학생을 대상으로 진행한 실제적 자료 수집의 필요성을 발견할 수 있었다.

박선화(1993)는 누군가 매우 큰 수를 말했을 때 그 수에 하나를 더하면 더 큰 수를 말할 수 있다는 것과 직선에서 양쪽 방향으로 아무리 연장해도 더 늘일 수 있다는 것은 무한과 관련된 생각이라고 하였다. 이처럼 무한은 어떤 과정이 끝없이 계속되어 갈 때, 또는 아무리 그 끝에 도달하려고 해도 계속 연장할 수 있을 때 경험되고 이해된다. 그런데 경험으로 이해 가능한 무한 개념은 과정으로서의 의미를 갖는 것이지 하나의 대상으로서 다루어진 것은 아니다.

과정으로서의 무한 개념은 고대 그리스 시대의 '아페이론'에서 찾아볼 수 있다. '아페이론'은 무한을 의미하는 그리스어로서 '끝', '한계'를 뜻하는 '페라스(peras)'에 부정의 의미를 가지고 있는 '아(a)'를 붙여서, 규정되어 있지 않다는 뜻을 가지고 있다(박선화, 1993). 반면 '아포이오스'라는 용어는 부정을 뜻하는 '아(a)'에다 '그와 같은 성질'이라는 의미를 갖는 '포이오스(poios)'가 합쳐진 것으로서, 우리가 생각할 수 있는 어떠한 성질도 신의 숭고성에 미치지 못한다는 것을 의미한다. 이는 존재하지 않는 것으로서 취급되던 무한 개념이 최초로 그 어떤 존재도 초월한 속성으로 생각되기 시작한 것으로 볼 수 있다(박선화, 1993).

중세에는 Magnus의 저서에 무한소와 무한대의 문제가 적극적으로 다루어지는 것이 관찰되었으며, 가무한과 실무한의 용어도 지어낸 것으로 보인다(박선화, 1993).

그러나 Cantor가 집합론에서 실수의 비가산성을 발견하고 초한수의 체계를 확립할 때까지도 실무한은 부자연스러운 것으로 간주되었으며, 인간이 파악할 수 있는 무한 개념은 가무한 뿐이라는 관념이 오랜 기간 동안 지배하였다. 심지어 무한을 중심 개념으로 하는 미적분학에서도 가무한 개념만으로 극한이나 미분계수를 구하는 과정이 있었다(홍진곤, 2008).

특히 홍진곤(2008)은 현재 학교수학에서는 Zenon의 역설이나 $0.\dot{9}=1$임을 해결할 때 실무한적 관점을 근거로 해결하고 있는데, 이러한 설명들이 형식적으로는 오류가 없는 방식일 수는 있지만, 학생들 입장에서는 여전히 직관적으로 받아들이기 매우 어려운 방식이라고 지적하였는데, 연구자도 이러한 관점에 동의하고 있으며 동일한 맥락에서 학생들을 대상으로 한 $0.\dot{9}=1$의 생각에 대한 정보 수집이 더욱 필요하다고 판단하였다.

1) Zenon의 역설

아킬레스가 거북이를 따라잡을 수 없다는 Zenon의 역설에서 핵심적인 문제는, 아킬레스가 지나가야하는 무한히 많은 점들이 존재하기 때문에 동시에 이를 실행해야할 단계가 무한히 많다는 점에서 그 실행을 종결할 수 없게 된다는 것이다. 이와 같이 무한 번의 행위의 완결 가능성에 대한 문제는 '초작업법의 역설'이라고 명명하는데, 유한한 구간이 '무한개의 점을 포함할 수 있는가?'라는 문제와 관련이 있다(홍진곤, 2008).

직선을 구성하는 실체에 대하여, 점이 모여서 직선을 구성한다는 견해와 점은 직선 위에서의 위치로 보는 두 가지 견해가 있다. 이와 유사한 논의로 무한 공간을 이해하는 두 가지 관점이 있는데, 하나는 직선이 더 이상 분할할 수 없는 최종 상태의 점들이 무한히 많이 모여서 구성되었다고 보는 원자론과 직선 그 자체가 하나의 연속체로서 무한히 계속 분할 할 수 있다는 연속론의 관점이 있다. 원자론은 Cantor의 집합론에 근거한 실무한 관점으로 볼 수 있고 연속론은 가무한 관점으로 볼 수 있다(박선화, 1993).

원자론의 관점에서 무한을 이해할 경우, Democritos의 역설이 발생하는데, 원뿔을 밑면과 평행한 평면으로 자른 절단면들이 무한히 많이 모여서 이루어진 것으로 생각할 때, '서로 이웃한 두 절단면은 같은가?'와 같은 질문이 이에 해당된다. 다르다고 하면 원뿔의 모선은 계단 모양이어야 하고, 같다면 원뿔이 아니라 원기둥이 되어야한다. 더 이상 나눌 수 없다는 무한소 개념은 그 자체가 모순을 내포할 수밖에 없다. 그럼에도 불구하고 무한소 개념의 원자론은 도형의 넓이나 부피를 계산하기

위한 구분구적의 아이디어에 고대 그리스에서부터 유용하게 사용되었는데, Aristoteles는 이러한 모순 등에 의하여 가무한 입장을 지지했을 것으로 보인다.

현대 수학은 직선을 점의 집합으로 간주하지만 단순히 점만 모인 것으로 생각하지 않고 그 사이의 연결 상태를 함께 고려하기 때문에 앞서 언급한 고전적인 실무한과 가무한의 관점과는 차이가 있다(홍진곤, 2008).

2) $0.\dot{9}=1$에 대한 연구

$0.\dot{9}$에 대하여 그 결과가 $0.\dot{9}<1$과 $0.\dot{9}=1$이라고 보는 두 가지 경우를 생각할 수 있다. 전자는 1에 한없이 가까워진다고 보는 가무한 관점이고, 후자는 실무한 관점으로 볼 수 있다. 이 때, 조한혁과 최영기(1999)는 $0.\dot{9}=1$이 정의에 해당하는 문제라고 지적하였다. 이들의 지적에 근거하여 살펴보면 극한 개념이 학습되지 않은 중학생들에게는 $0.\dot{9}<1$이 더 자연스러운 것임을 지적한 것으로 볼 수 있다. 이지현(2014)도 예비교사들을 대상으로 동일한 문제에 대하여 연구를 진행하였는데, 여기서도 실수 집합에 대한 이해가 부족한 경우 직관적으로 $0.\dot{9}<1$이 더 자연스러운 것으로 볼 수 있다고 언급하였다. 홍진곤(2008) 역시 동일한 관점에서 가무한적 직관에서 벗어나지 못한 상태에서 극한 개념의 학습 중 극한값 자체를 명시적으로 도입하는 것은 '유한번'의 단계에서 도달해버리는 '극한값'이라는 오개념이 형성될 수 있음을 지적하였다. 박선용(2018)은 $0.\dot{9}=1$이 된다고 이야기하는 것 자체가 실무한 관점에서 이해하고 있는 것처럼 오해하고 있다는 점을 지적하면서, '무한 분할 가능성'과 '도달불가능성'이 가무한의 특징인 것에는 동의하지만, 무한 분할 가능성을 부정하고 도달가능성이 인정되는 것이 실무한의 특징은 아니라는 점을 지적하고 있다. 특히 예비교사들을 대상으로 수업한 경험에 근거하여 '무한 과정 이후 어느 순간 완결된 값을 갖는다.'는 것에 대한 이해의 부족으로 실무한으로서의 무한 집합과 완성된 값으로서의 극한값의 의미를 정확하게 이해하고 있지 못함을 언급하였다.

Ⅲ. 연구방법

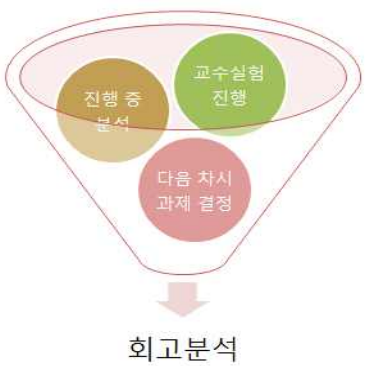
본 연구는 9차시의 교수실험을 거쳐 고등학교 2학년 학생 세 명을 대상으로 다양한 형태의 등비급수 문제의 풀이 과정을 구성적 관점에서 살펴본 질적 사례연구(qualitative case study)이다. 본 연구에서는 4개의 과제를 중심으로 진행한 2차시에서 8차시까지의 교수실험 자료를 분석한 결과를 담고 있다. 마민영(2017)은 교수실험의 전 과정은 미리 예견된 계획에 의하여 진행되지 않고 과제에 대한 학생의 반응에 따라 구성되기 때문에 교수실험은 실험적인 성격이 강하다고 하였다. 본 연구에서도 이러한 점을 고려하여 교수실험의 과제를 선정할 때 학생들의 반응을 우선적으로 고려하였다. 교수실험에서 다루어진 과제의 경우 연구자들의 협의 하에 설정한 최초 과제를 제외한 나머지 차시에 제시된 과제들은 연구대상에 해당하는 세 명의 학생들과의 교수실험 진행 과정에서 학생들로부터 제기된 과제 혹은 연구대상 학생들의 표현에 근거하여 연구자와 연구대상들의 합의에 의하여 결정된 과제들이었다. 한편 이동근과 김숙희(2017)는 학생들에게서 제시된 과제에 대하여 학생들의 사고가 반영된 것으로 보기 때문에 학생들의 표현에 대한 수학적인 맥락이나 오류 유무에 대한 판단을 하기 보다는 그 속에 담긴 학생들의 사고와 의미에 대하여 고민할 필요가 있다고 하였는데, 본 연구에서도 이러한 점을 고려하여 교수실험에서 나타난 학생들의 표현에 대하여 수학적 오류 유무 보다는 그 속에 담긴 학생들의 생각을 관찰하는데 집중하였다.

1. 교수실험

교수실험은 급진적 구성주의에 근거하여, 학습자가 수학개념을 구성해가는 활동에 대한 지속가능한 모델을 확립하기 위한 연구 방법이다(마민영, 2017). 교수실험은 기존의 수업방식이나 교육과정에 의한 구속을 받지 않지만, 선행연구 자료를 중요한 자료로 참고하기 때문에 학습자에게 제시되는 상황 대부분은 기존 교육과정일 가능성이 높다. 이와 같이 선행연구 자료를 참고하여 최초 교수실험의 과제를 준비하면서 연구자는 과제에 대한 학생들의 반응을 예상하기는 하지만, 교수실험의 진행은 전반적으로 과제에 대한 학생의 반응에 따라 구성되기 때문에 학생들의 반응이 연구자의 예상과 다르게 나올 수 있다.

이동근과 김숙희(2017)는 교수실험에서 최초 과제는 연구자 간의 협의 하에 선정하게 되며, 이후부터는 실험 참여 학생과의 대화나 행동 방식에 의하여 단계적으로 과제를 구성하여 제시하는 방식으로 진행한다고 하였다.

Glasersfeld(1999)는 교수실험이 피 실험자의 반응과 연구자들 간의 일치된 합의 과정에 따른 다음 과제의 투입이 반복적으로 이루어지면서 진행된다고 하였는데, 본 연구에서도 이러한 절차를 따라 9차시의 교수실험을 진행하였다. 특히 이동근(2017)의 연구에서 진행한 교수실험의 절차를 따라 진행하였다. 매 차시 실험 종료 이후 '진행 중 분석' 과정을 거쳐 연구자들 사이의 협의에 의하여 다음 실험을 진행하였으며, [그림 1]과 같이 교수실험 진행→진행 중 분석→다음 차시 과제 결정이라는 순환과정의 반복을 거쳐 교수실험이 종료되면 연구자는 최종적으로 전체 교수실험에 대한 자료(학생 반응지, 연구자간 회의 일지, 교수실험 영상 및 전사자료)를 이용하여 종합적인 분석을 하였다. 이러한 과정을 회고분석이라 하는데, 이동근(2017)은 회고분석을 거쳐 연구자가 연구 주제와 관련된 의미 있는 시사점을 찾아내게 된다고 하였다.



[그림 1] 교수실험의 도식
[Fig 1] Figure of teaching experiment

본 연구에서 교수 실험은 총 9차시로 구성되었는데, 1차시부터 2차시까지는 학생들이 극한 문제와 등비급수 관련 문제에 대하여 값을 구할 수 있는지 관찰하였고, 3차시부터 5차시까지는 극한 문제 중 $\lim_{x\to a}\frac{x^2+px+q}{x-a}$의 형태에 대하여 학생들이 대수적 풀이와 그림을 이용한 풀이를 관찰하였다. 이 과정에서 $0.999\cdots$와 관련된 문제들과 등비급수의 값을 구하는 과정에 대한 학생들의 고민이 관찰되었다. 특히 6차시에서는 $\lim_{x\to a}$의 의미에 대하여 학생들의 고민하기 시작하게 되면서 도달가능성의 문제가 언급되었다. 이러한 과정을 거쳐 6차시 이후에는 등비급수 관련 내용들이 학생들과 연구자의 주된 논의거리로 부각되었다. 7차시부터 9차시까지는 무한에 대한 학생들의 다양한 표현과 더불어 등비급수의 다양한 형태에 대한 학생들의 견해가 의사소통을 통하여 제기되었으며 또한 다양한 형태의 과제들 사이의 관계에 대한 논의도 진행되었다. 본 연구에서는 이중에서 연구 주제와 관련 있는 2차시에서 8차시까지의 교수실험 자료를 집중적으로 분석하였다. 또한 교수실험은 참여 고등학생 세 명을 대상으로 2018년 4월 초순부터 시작하여 2018년 8월 말경까지 약 5개월간 진행하였다.

본 연구에서 교수실험은 차시 당 40분 내외로 진행되었다. 차시 당 실험 시간은 사전에 정하고 시작하는 것은 아니었으나, 일반계 고등학교의 교육과정에 할당된 동아리 활동 시간을 이용하여 진행을 한 관계로 1차시 당 50분이라는 제한된 시간 안에 진행하였으며, 이중에서도 학생들이 학급 교실에서 동아리 교실로 이동해서 오는 시간과 다시 학급 교실로 돌아가는데 소요되는 시간을 제외하다보니 1차시 당 교수실험 시간이 40분 이내로 제한이 되었다. 교수실험이 진행된 공간은 연구대상들의 반응을 기록으로 남길 수 있는 카메라와 오디오 녹음기가 설치되어있는 곳이었으며, 평상시에는 학급 교실로 이용되는 공간이다.

연구자(교직경력 15년차)는 교수실험 진행을 담당하였으며, 교수실험의 완성도를 높이고 진행자가 실수하는 부분에 대한 보완과 방향성을 제시하기 위하여 1명의 다른 연구보조교사가 관찰자로 참여하였다. 연구보조교사는 직접 매 교수실험에 관찰자로 참석하기 보다는 주로 촬영된 영상자료를 분석한 다음 연구자와의 회의를 통하여 다음 차시 교수실험 과제를 정하는데 기여하였다.

교수실험 진행 절차는 앞서 언급한 바와 같이 이동근(2017)에서 제시된 절차를 따라 진행하였다. 매 차시 종료 이후 연구자들은 이전 차시에서 보인 학생들의 사고와 행동의 의미를 공동으로 분석하고 상호 합의에 근

거하여 다음 교수실험을 설계하였다. 이때 투입하기로 결정된 과제에 대하여 실제 교수실험에 투입 여부는 연구대상 학생들과의 교수실험 진행 중에 연구자가 판단하였다. 이와 같이 연구자들의 협의를 거쳐 다음 차시에 대한 교수실험이 설계되면, 연구자는 이를 반영하여 최종 투입과제를 선정하여 다음 차시 교수실험을 진행하는 과정을 반복하였다. 교수실험 진행은 학생들 간의 의사소통을 중심으로 진행하되 필요에 따라 연구자가 다른 학생들의 의견을 정리하여 전체 학생들에게 다시 확인시키거나 혹은 다음 단계로 넘어가기 위한 발문 또는 연구자가 궁금한 부분을 질문하는 정도의 수준에서 개입하기도 하였다.

2. 연구대상자의 특성과 과제

연구대상자인 학생1, 학생2, 학생3은 일반계 고등학교 2학년 이과 계열의 학생들로서, 연구자가 1년 동안 개설한 ‘수학 개념 탐구’ 동아리 반에 지원한 학생들 중에서 선정한 학생들이다. 최초 지원한 16명의 학생들 중 사전에 준비한 극한 문제(2009 개정 수학과 교육과정에 기반한 미적분Ⅰ 교과서의 함수의 극한 단원에서 예제 수준의 문제 5문항)에 대하여 계산을 할 수 있는 학생들을 대상으로 선정하였으며, 연구자가 연구의 목적을 설명하였을 때 이에 동의한 세 명의 학생들이다. 수학 과목 학업 성취 수준은 상이하지만, 세 명의 학생들은 서로 친분이 있어서 상호간의 의사소통에 적극적인 학생들이었다. 참고로 연구대상들의 학업 성취 수준은 2018년 4월에 실시한 전국연합학력평가의 수학 성적 등급을 기준으로 학생1은 4등급, 학생2는 3등급, 학생3는 2등급[2)]으로 서로 상이한 학생들이다. 이동근(2017)은 이러한 의도적인 표집은 면담에서 연구자가 더 많은 정보를 얻을 수 있다는 장점이 있다고 하였는데, 본 연구에서도 이러한 점을 고려하여 다양한 성취수준의 학생들을 연구 참여 대상자로 선정하였다. 다만 연구 참여 학생들의 수학 성적은 참고자료일 뿐이며, 면담에서 학생들에 의하여 구성되는 수학 개념의 질적 차이와는 관련이 없다. 즉, 본 연구에서의 면담에서는 학생 반응에 대하여 어느 반응이 우수하다는 식의 평가를 하지 않았다.

연구에 참여한 학생들은 서울 소재 일반계 고등학교 2학년 이과 계열에 재학 중인 학생들로서 교수실험을 진행하기 이전에 학교 수업에서 2009 개정 수학과 교육과정에 기반한 미적분Ⅰ 과목의 함수의 극한 단원을 학습한 학생들이다. 또한 2018년 4월에 처음 교수실험을 진행한 이후 2018년 8월 마지막 9차시 교수실험을 진행하는 기간 동안 학생들은 학교에서 다항함수의 부정적분까지 학습하였다. 사전에 연구자가 세 명의 학생들과의 면담과정을 거쳐 파악한 바에 의하면, 세 명의 학생들은 극한, 미분, 부정적분 관련 문제들에 대하여 계산 절차에 의하여 결과를 구할 수는 있으나, 그러한 계산을 왜 그렇게 해야 하는 지에 대하여는 주로 “그렇게 해야 시험문제에 답을 제시할 수 있다.”는 반응을 보였다. 교수실험에서 이용된 과제들 중 본 연구에서 논의된 주요 과제는 총 4개이며 해당 과제들은 2009 개정 수학과 교육과정에서의 미적분Ⅰ 교과서에 수록되어있는 내용들을 중심으로 교수실험 진행과정에서 학생들과 연구자의 의사소통 과정에서 연구자가 ‘진행 중 분석’ 혹은 ‘회고 분석’을 통하여 연구보조교사와 합의하에 선정한 과제들이다. 논의를 진행함에 있어 과제를 선정하게 된 이유가 필요한 경우는 Ⅳ장의 결과분석 및 논의에서 세부적으로 기술하였다. 본 연구에서 다루어진 과제를 제시하면 다음 [표 1]과 같다.

[표 1] 교수실험에서 제시된 주요 과제
[Table 1] Key task of teaching experiment

과제	내용
[과제1]	$0.999\cdots$와 1의 대소 관계를 말하시오.
[과제2]	$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{9}{10}\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}$의 값을 구하시오.
[과제3]	$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots$의 값을 구하시오.
[과제4]	정사각형을 반으로 분할하고 왼쪽을 칠한 다음, 남은 부분의 반을 분할하고 위쪽을 칠하고, 이러한 과정을 반복할 때 칠해진 넓이를 구하고 정사각형의 넓이와 크기를 비교하시오.

해당 과제에 대한 교사와 학생의 활동 과정을 담은 2

2) 전국연합학력평가의 성적은 구간척도(Stanine)에 따라 1등급부터 9등급으로 구분되며 작은 값의 등급일수록 상위권 학생에 해당한다.

차시에서 8차시까지의 교수실험 결과 분석은 Ⅳ장 '연구결과' 부분에서 자세히 제시할 것이다.

3. 자료 수집 및 분석 방법

본 연구는 총 9차시의 교수실험 결과물 중에서 연구주제와 관련된 2차시에서 8차시까지의 교수실험 자료를 집중적으로 분석한 것으로서, 비디오카메라 1대로 연구대상 학생 세 명에 대한 수학적 활동을 촬영하였으며, 이 외에도 별도로 녹음된 오디오자료의 전사과정을 통하여 분석에 활용하였다.

또한 면담 과정에서 학생들이 작성한 활동지와 연구자들이 작성한 현장노트 및 다음 면담 과제를 구성하기 위한 연구자간의 회의일지를 수합하여 면담 과정 중 일어나는 교수학적 결정 과정과 변화의 양상을 살펴보고, 이러한 자료들을 기초로 면담 중 발생했던 수정과 재구성의 이유를 'Ⅳ. 연구결과' 부분에 함께 기술하였다.

Ⅳ. 결과분석 및 논의

1. $0.999\cdots$와 1의 대소 관계에 대한 학생들의 생각

2차시 교수실험 초반부에 학생들은 $\lim_{x\to1}\frac{x^2-4x+3}{x-1}$의 극한을 계산하는 과정에서 일부 학생은 혼잣말로 $x=0.9$를 넣고 $x=0.99$를 넣었을 때 여러 개의 값이 나오기 때문에 값을 정하기가 어렵다는 표현을 한 적이 있다. 교사는 일시적으로 나타난 학생의 표현이지만, 극한 개념의 발달 과정에서 나타나는 '도달가능성'에 대한 생각일 수도 있다는 가능성을 염두에 두고 2차시 교수실험 초반부에 나타난 학생의 반응에 이어서 2차시 교수실험 중반부에 $0.999\cdots$와 1의 대소 관계를 물어보았다. 교사의 질문에 대하여 연구에 참여한 세 명의 학생들은 모두 $0.999\cdots < 1$이라고 답을 하였다. 그 이유에 대해서는 세 명의 학생 모두가 '$0.999\cdots$가 1로 가까워지기는 하지만 절대 1이 될 수는 없다.'는 요지로 설명하였다. 이는 학생들이 $\lim_{x\to1}\frac{x^2-4x+3}{x-1}$을 대수적으로 풀어서 값을 구할 수는 있지만, 그렇게 구한 값을 실제 $\lim_{x\to1}\frac{x^2-4x+3}{x-1}$의 값으로 인정하기 보다는 학교에서 시험문제가 나왔을 때 점수를 얻기 위한 방식으로 표현한 것과 비슷한 맥락으로 볼 수 있다. 앞서 소개한 바 있듯이 "$\lim_{x\to1}\frac{x^2-4x+3}{x-1}$의 값은 여러 개여서 정하기가 힘들다."는 표현과 '$0.999\cdots$와 1의 대소 관계에서 보여준 학생들의 반응'을 가지고 판단해보면 극한을 구하는 문제를 해결하는 과정에서 학생들은 극한 문제에 대하여 극한 값을 등호를 이용하여 표현하기는 하지만, '$1+4=5$'에서와 같은 등호의 의미로 받아들이고 있지는 않았다. 특히 '$0.999\cdots$와 1의 대소 관계를 묻는 과제'에서 학생들은 '등호'를 사용하기는 하지만 "절대 1이 될 수는 없다."와 같은 표현을 사용한 것에서 이를 확인할 수 있다.

그런데 논의를 진행하는 과정에서 학생3은 다른 학생들에게 자신이 $0.999\cdots$가 1과 같다는 것을 보일 수 있다고 하면서 자신의 방법을 다른 학생들에게 설명하였다. 학생3은 $0.999\cdots=3\times0.333\cdots$이고 적은 다음에 $0.333\cdots=\frac{1}{3}$이라고 말했다. 그래서 $0.999\cdots=3\times\frac{1}{3}$이 되기 때문에 $0.999\cdots$는 1에 가까워지는 것이 아니라 정확하게 1이라고 하였다. 교사는 학생3의 설명에 대하여 다른 학생들(학생1, 학생2)에게 이해가 가는지를 확인하였고, 교사의 확인에 대하여 학생1과 학생2는 자신들도 학생3의 방법이 이해가 되었으며, $0.999\cdots$의 값은 정확하게 1이라고 생각한다고 답하였다. 이에 교사는 학생들에게 "$0.333\cdots=\frac{1}{3}$가 성립하는 거지? $0.999\cdots$는 왜 분수로 표현을 안했었어?"라고 질문하였다. 이 질문을 하게 된 이유는 교사가 학생들이 $0.333\cdots$은 왜 어떠한 값으로 가까이 간다고 표현하지 않았는지 궁금했기 때문이다. 교사의 질문에 대하여 학생들은 "$\frac{1}{3}$을 해보면 계속 3이 나오는 구조여서 $\frac{1}{3}$은 $0.333\cdots$이다."라고 답을 하였다. 교사가 "$\frac{1}{3}$에서 $0.333\cdots$를 떠올렸다고? 그러면 $0.333\cdots$에서 $\frac{1}{3}$을 떠올리는 거는?"이라고 반문하였으나, 학생들은 교사

의 질문에 자신들의 설명이 그에 대한 설명도 된다고 말하면서 자신들의 논리에 확신에 찬 모습을 보여주었다. 그러나 교사가 다시금 “그럼 $0.999\cdots$에서는 어떻게 1을 떠올리는건데?”라고 질문하였을 때는 학생들도 답을 하지 못하고 고민하는 모습을 보여주었다. 고민하던 학생들은 결국 교사의 질문에 대하여 자신들의 생각을 더 표현하지는 못하였다.

2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{9}{10}\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}$의 대수적 풀이에 대한 학생들의 생각

이번에는 교사가 $0.999\cdots$의 표현을 바꾸어서 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{9}{10}\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}$을 풀어보라고 과제를 제시하였다. 단, 교사는 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{9}{10}\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}$를 제시할 때 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{9}{10}\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}$와 $0.999\cdots$를 관련지어 제시하지는 않았다. 교수실험의 맥락에서 볼 때, 학생들은 앞서 제시된 ‘$0.999\cdots$와 1의 대소 관계’를 묻는 과제와 전혀 별개의 새로운 과제를 교사로부터 받은 것처럼 보였기 때문이다. 교사가 제시한 과제에 대하여 보여준 학생들의 반응에서 차이가 관찰되었다. 학생들의 반응을 표로 정리하여 제시하면 [표 2]와 같다.

[표 2] $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{9}{10}\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}$의 풀이에 대한 학생들의 반응

[Table 2] Students’ responses to $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{9}{10}\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}$'s solution

학생	학생의 반응
학생1	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{9}{10}\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}=\frac{\frac{9}{10}}{1-\frac{1}{10}}=1$
학생2	
학생3	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{9}{10}\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}=\frac{9}{10}+\frac{9}{100}+\frac{9}{1000}+\cdots\approx 1$

학생들의 반응을 살펴보면, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{9}{10}\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}$의 값을 1로 답했다는 공통점이 있지만, 학생1과 학생2의 반응과 학생3의 반응에서 몇 가지 차이가 있다. 우선 학생1과 학생2는 자신들의 풀이 방법을 설명해달라는 교사의 요구에 대하여 등비급수 공식을 이용하여 풀었다고 답을 하였으며, 그 값은 정확하게 1이라고 표현하였다. 반면 학생3은

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{9}{10}\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}$을 $\frac{9}{10}+\frac{9}{100}+\frac{9}{1000}+\cdots$와 같이 표현을 바꾼 다음 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{9}{10}\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}$을 학생1과 학생2의 표현과 동일하게 등비급수 공식을 이용하여 1이라는 값을 계산하였다.

이후 학생3은

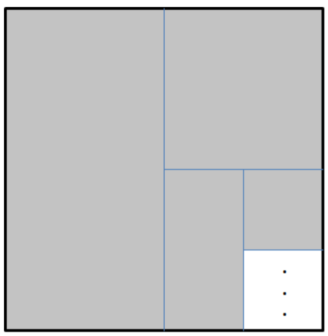
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{9}{10}\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}=\frac{9}{10}+\frac{9}{100}+\frac{9}{1000}+\cdots\approx 1$$

이라고 표현하였는데, 이때 등호 ‘=’가 아니라 근삿값을 표현하는 ‘≈’를 사용하였다. 학생3은 자신의 풀이에 대하여 “$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{9}{10}\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}$는 $\frac{9}{10}+\frac{9}{100}+\frac{9}{1000}+\cdots$이니까 1에 가까워지는 값인데, 그래서 그냥 1이라고 했어요.”라고 설명하였다.

교사와의 대화 과정을 거치면서 학생들은 서로의 풀이 과정에서 차이가 나는 것을 학생들 스스로가 확인하였다. 이 과정에서 교사는 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{9}{10}\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}$과 $0.999\cdots$가 같은 표현인지 풀면서 알고 있었는지를 확인하였는데, 학생1과 학생2는 인지하지 못했다고 답하였고 학생3은 인지하고 있었다고 답하였다. 그리고 학생1과 학생2는 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{9}{10}\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}$를 $\frac{9}{10}+\frac{9}{100}+\frac{9}{1000}+\cdots$로 표현한 학생3의 표현에 대하여 공감한다고 표현하였다. 동시에 이전에 자신들이 $0.999\cdots$는 1보다 작다고 답하고 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{9}{10}\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}$는 정확하게 값이 1이라고 답한 것에 대하여 고민하기 시작하였다.

3. $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots$의 '대수적 풀이'와 '그림을 이용한 풀이'에 대한 학생들의 표현

교사는 학생들에게 $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots$의 값을 구하는 과제를 제시하였다. 이 과제는 연구자와 연구보조교사와의 협의를 거쳐 선정한 과제이다. 연구자들이 이 과제를 선정한 이유는 앞서 학생들이 경험한 바 있는 $\frac{9}{10}+\frac{9}{100}+\frac{9}{1000}+\cdots$와 구조적으로 동일한 문제라 판단하였으며, 해당 과제에서 보인 학생1과 학생2의 반응을 좀 더 살펴볼 필요가 있다고 판단하였기 때문이다.



[그림 2] $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots$에 대한 그림 모형 과제

[Fig 2] A model figure for $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots$

이전 차시에 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{9}{10}\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}$의 값을 구하는 과제에서 학생1과 학생2는 학생3이 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{9}{10}\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}=\frac{9}{10}+\frac{9}{100}+\frac{9}{1000}+\cdots$라고 표현한 것에 대하여 처음에는 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{9}{10}\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}$과 $\frac{9}{10}+\frac{9}{100}+\frac{9}{1000}+\cdots$을 같은 표현으로 생각하지 못하다가 나중에서야 같은 표현이라고 답하면서, 자신들이 이전에 $0.999\cdots$의 값과 1의 대소 관계를 비교할 때 $0.999\cdots<1$이라고 답한 과정과 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{9}{10}\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}$의 값을 정확히 1이라고 표현하였던 것에 대하여 고민하는 모습을 보여주었다. 그러나 당시에 학생1과 학생2는 자신들의 고민에 대하여 별다른 표현을 하지는 못하였었다. 이러한 학생1과 학생2의 반응을 좀 더 살펴보기 위하여 연구자들은 $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots$의 값을 구하는 과제를 제시하였다. 이때 공비가 $\frac{1}{2}$인 경우로 선정한 이유는 해당 과제를 [그림 2]와 같이 그림의 형태로 제시하는 것이 용이하기 때문이다. 이는 다양한 형태의 등비급수 과제에 대한 학생들의 생각을 살펴보고자 하는 본 연구의 목적과도 맥을 같이 한다.

[그림 2]는 교수실험 과정에서 교사가 학생들과 그림을 그려가면서 과정을 설명하는 방식으로 전달하였으며, [대화]는 교사가 학생들에게 과정을 전달하는 내용을 기록한 것이다.

[대화]

교사 : 내가 이제 또 다른 거 해볼게. 네모를 그려봐요. 정사각형.

학생3 : 자대고 그리고 싶은데...

교사 : 이 정사각형을 반으로 나누고 왼쪽 색칠하세요. 다시 빈 곳 남은 거죠. 반으로 다시 나누고 위쪽을 색칠. 왼쪽과 위쪽을 칠해나가는 규칙이야. 이 규칙대로 가는 겁니다. 이 규칙대로 해나가면 이 사각형은 빈틈 없이 칠할 수 있을까?

학생3 : 다 칠할 수 없죠.

학생1 : 미세하게 안 칠해지죠.

학생2 : 못 칠해요.

학생들의 $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots$의 대수적 풀이 방식은 학생1과 학생2의 방식과 학생3의 방식에서 차이가 있었다. [표 3]은 이러한 학생들의 방식을 연구자가 재정리하여 제시한 표이다.

[표 3] $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots$의 풀이에 대한 학생들의 반응

[Table 3] Students' responses to $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots$'s solution

학생	학생의 반응
학생1	$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=1$
학생2	
학생3	$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^k=1$

학생들의 설명을 들어보면, 학생1과 학생2는 $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n$라고 보았기 때문에 등비급수를 풀기 위해서 첫째항과 공비가 각각 $\frac{1}{2}$인 것을 확인한 다음 등비급수 공식에 의하여 구하였다고 설명하였다. 반면 학생3은 학생1과 학생2의 방식과 동일한 방식으로도 풀었지만 그 이전에 좀 다른 풀이로 접근하는 모습이 관찰되었었다. 학생3은 $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots$에서

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{\frac{1}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}}{\frac{1}{2}}=1-\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\Rightarrow\ \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{\frac{1}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}}{\frac{1}{2}}=1-\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

이라고 정리하였다. 이 과정에서 학생3은 한동안 고민하는 모습을 보이다가 $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)=1$을 구했다고 설명하였다. 이러한 학생들의 반응에 대하여 연구자들은 교수실험이 종료된 이후 분석과정에서 '학생1과 학생2가 절차적인 지식으로 $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots$의 값을 계산하고 있었던 것과 달리 학생3이 $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots$를 수열의 극한으로 구한 것으로 보인다.'로 정리하였고 이에 근거하여 [표 3]에서 학생3의 표현과 같이 기술하였다. 이는 $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots$에 대하여 학생들이 무한 개념을 고려하고 있는지의 여부에서 차이가 있을 수 있음을 보여주는 대목이다.

학생3은 $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)$를 $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)=1$로 답을 하였지만, $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots$을 $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)$으로 표현하는 것에서 고민하는 모습을 보여주었다. 즉, 연구자들은 학생3이 유독 그 순간에 고민하는 것을 보인 이유가 $\frac{9}{10}+\frac{9}{100}+\frac{9}{1000}+\cdots$에 대하여 1로 가까이 간다고 답을 할 때와 마찬가지로, $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots$도 특정한 값에 가까이 간다고 답을 하고 싶었던 것으로 판단하였다.

한편 [그림 2]와 같은 과제에 대하여는 세 명의 학생들 모두 교사가 설명한 방식으로는 정사각형을 모두 칠할 수 없다고 답을 하였고, 이어서 교사는 학생들에게 $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots$의 값을 다시 한 번 확인하였다. 이렇게 한 이유는 학생1과 학생2가 $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots$의 값은 정확하게 1이라고 답하고 나서 이어서 제시한 그림모형에서는 정사각형을 모두 칠할 수 없다고 답한 것으로 미루어 볼 때 학생1과 학생2가 $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots$의 과제 상황과 그림모형의 상황을 동일한 것으로 생각하지 못하였음을 알 수 있었기 때문이다. 반면 이는 학생3의 반응에서는 문제가 되지는 않는다. 학생3은 $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots$의 값을 1이라고 답하였지만, 학생3의 이전 반응과 함께 살펴보면 $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots$을 1에 가까이 가는 것으로 표현하였기 때문이다. 이러한 학생3의 논리는 그림모형에서의 답변과 일관성이 있는 것으로 볼 수 있다.

학생1과 학생2는 교사가 다시 $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots$의 값을 물어보았을 때, 이전의 반응과 동일하게 등비급수 공

식을 이용하여 $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots$의 값을 1이라고 하였다. 학생1과 학생2의 반응에 대하여 교사는 $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots$와 그림모형을 동일한 것으로 생각하고 있지 않을 수 있다는 생각을 하였다. 그래서 직접적으로 학생들에게 “두 상황은 동일한 상황이 아닌가?”라고 질문하였고 학생1과 학생2는 이러한 교사의 질문에 대하여 별다른 설명을 하지는 않았지만, 이전과 달리 자신들이 표현하였던 것에 서로 연결되지 않는 부분이 있다는 것을 인식하고 나서 고민하는 모습을 보였다.

V. 결론 및 제언

1. 등비급수의 다양한 형태의 과제들에 대한 학생들의 생각과 표현

선행연구에 의하면 중학생들은 $0.999\cdots$와 1의 관계에 대하여 심적으로 $0.999\cdots=1$보다는 $0.999\cdots<1$가 옳다는 생각을 하고 있었으며, $0.999\cdots=1$이라고 답을 하더라도 이는 교과서나 교사의 권위에 복종하여 수용하는 것임을 알 수 있다. 본 연구에서는 서론에서 이러한 선행 연구에 근거하여 이미 등비급수를 학습한 고등학생들의 경우에는 이를 어떻게 생각하는 지에 대하여 살펴보겠다고 언급한바 있다. 본 연구에 참여한 학생들의 표현에 근거하여 살펴보면, 등비급수를 학습한 경험을 가지고 있다 하더라도 학생들은 여전히 $0.999\cdots$와 1의 관계에 대하여 $0.999\cdots=1$보다는 $0.999\cdots<1$가 옳다는 생각을 하고 있었다. 다만 중학생과 달리 등비급수를 학습한 경험이 있었기 때문에 $0.999\cdots$의 형태가 달라질 경우 값을 정확하게 1이라고 답하는 경우도 있었는데, 이는 학생들이 다양한 형태의 과제를 $0.999\cdots$와 동일한 것으로 생각하지 못하고 있음을 보여준다. 특히 본 연구에 의하면 동일한 과제라 하더라도 과제의 형태에 따라 과제별로 그리고 학생별로 학생들의 반응과 표현에 차이가 있었다.

우선 과제별로 차이를 살펴보면, $0.999\cdots$과 그림모형에 대하여는 학생들이 ‘$\cdots$’의 표현 속에 무한 번의 반복적인 행위를 고려하여 ‘도달 가능성’의 문제를 고민하게 되는 것이 관찰되었다. 특이한 점은 ‘도달 가능성’의 문제를 고민하면서 드러나는 학생들의 표현 중에서 ‘가까이 간다.’는 표현을 사용할 때 무한 번의 행위에 대한 생각도 제시되었다는 점이다. 예를 들어 $0.999\cdots$는 1에 가까이 간다는 표현을 사용하면서 $0.999\cdots$의 값이 1과 정확하게 같은 것이라고 받아들이는 것에 거부감을 보였다. 이는 $0.999\cdots$가 점점 1에 가까워지고 있는 상황으로 접근하였기 때문으로 보인다. 반면에 $\frac{1}{3}$을 $1\div3$으로 보고 그 계산을 반복적으로 시행하였을 때 $0.333\cdots$ 되는 과정에서는 학생들은 별다른 거부감 없이 $0.333\cdots$를 $\frac{1}{3}$과 정확하게 같은 값으로 표현하였다. 사실 연구자들의 견해로는 이때 보여준 학생들의 반응은 $0.333\cdots$에서 무한 번의 반복되는 행위를 하게 되는 상황을 $\frac{1}{3}$이라는 것으로 표현한 것으로 보였다. 즉, $0.333\cdots$과 $\frac{1}{3}$을 양적으로 비교하여 ‘=’의 의미로 받아들인 것은 아님을 알 수 있었다.

한편 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{9}{10}\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}$와 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}$와 같이 주어진 과제에서는 일부학생들이 등비급수를 구하는 절차에 따라 값을 구하기는 하였으나, 이렇게 답한 학생들의 경우 자신들이 구한 값에 대하여 ‘도달 가능성’에 대한 고민을 하지 않는 것으로 관찰되었다. 다만, 학생들이 ‘$\cdots$’의 표현에서 모두 ‘도달 가능성’을 생각하는 것은 아니었다. $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots$와 같은 과제에서는 ‘$\cdots$’ 표현이 있지만, 일부 학생들은 이러한 표현에서 ‘도달 가능성’을 생각하지 않고 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}$와 같은 표현으로 바꾸어서 절차적으로 해결하는 모습을 보였다. 이는 $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots$에서 순차적으로 $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \cdots$등을 더해가는 무한 번의 행위를 반복적으로 행해야하는 것으로 이해하기 보다는 $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots$라는 표현 자체를 한 덩어리의 수식인 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}$으로 바꾸어야하는 대상으로 받아들인

것으로 볼 수 있으며, 학생들에게 있어서 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n$는 '무한 번의 행위'나 '도달 가능성의 문제'와는 상관없이 단순히 공비와 첫째항을 이용하여 값을 구하는 문제로 생각하는 것 같았다.

이상의 내용을 종합하면, $0.999\cdots$와 동일한 과제라 하더라도 형태에 따라 학생들의 생각과 풀이 접근 방식이 달랐음을 알 수 있다. 그리고 학생들은 '$0.999\cdots$과 1의 대소 관계를 묻는 과제'와 '$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{9}{10}\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}$의 값을 구하는 과제' 및 '그림모형'을 서로 동일한 과제로 생각하지 않았다. 특히 과제의 형태에 따라 '도달 가능성'에 대한 고민을 하게 되는 경우가 발생할 수 있으며, 이러한 고민이 없는 경우는 학생들이 단순히 절차에 의하여 값을 구하는 것에 그치는 것을 관찰하였다. 즉, 학생들이 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{9}{10}\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}$의 값을 구하였다고 하여도, 학생들은 등비급수의 개념을 이용하여 문제를 해결하였다고 볼 수 없으며, 단지 출제자가 원하는 답을 제시하기 위하여 첫째항과 공비를 이용하여 값을 제시한 것으로 볼 수 있다. 따라서 고등학교 수업 현장에서 학생들이 필수적으로 '도달 가능성'에 대한 문제를 경험하도록 수업을 하자고 주장하는 것은 아니지만, 최소한 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{9}{10}\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}$를 학습할 때 다양한 형태로 제시하여 학생들이 '도달 가능성'에 대한 문제를 경험할 수 있는 기회를 제공할 필요가 있다고 생각한다. 이는 선행연구들을 통하여 학생들에게 자연스러운 궁금증은 $0.999\cdots=1$의 정당화에 대한 논리가 아니라 $0.999\cdots<1$이 아닌 이유에 대하여 궁금해 한다는 것에서도 잘 드러난다. 본 연구에서도 '도달 가능성'에 대한 학생들의 궁금증이 학생들 수준에서 해결되지 못할 경우, 학생들은 '$0.999\cdots$의 값을 1이라고 기계적으로 외워야'하고, '$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{9}{10}\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}$라는 문제가 제시되었을 때는 1이라고 답하도록 훈련되어야'만 하는 학생들의 입장이 관찰되었다. 수업에서 교사가 학생들의 모든 궁금증에 대하여 답을 해야만 하는 것은 아니지만, 수업에서 교사가 학생들이 궁금해 할 수 있는 것에 대한 기회를 제거하는 일이 발생한다면 이는 조심할 필요가 있다.

다음으로 학생별로 과제에 대한 반응의 차이를 살펴보면, 학생1과 학생2의 표현은 유사한 점이 많았던 반면 학생3은 다른 두 학생들과 다른 접근 방식을 보인 경우가 많았다. 학생1과 학생2는 $0.999\cdots$의 과제에 대하여는 1에 가까이 간다고 답을 하였고, $\sum_{n=1}^{\infty}$의 형태로 제시된 등비급수 과제에 대해서는 '무한' 혹은 '극한'에 대한 고민 없이 첫째항과 공비만을 구하여 절차적으로 계산하여 값을 구하는 모습을 보여주었다. 이때 학생들이 사용한 '$=$'는 '같다'의 의미로 사용되었다. 한편 $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots$의 형태의 과제에 대하여는 '$\sum_{n=1}^{\infty}$'의 형태로 바꾸어서 등비급수 공식을 이용하여 계산하였다. 여기서도 학생들이 답을 구할 때 '$=$'를 사용하였는데, 학생들이 사용한 '$=$'는 '같다'의 의미로 사용되었다. 그림모형에 대하여는 '칠할 수 없다.'는 표현을 하였으며, $0.999\cdots$에서의 반응과 유사하게 정사각형의 넓이보다 작다고 하였다.

학생3은 $0.999\cdots$의 과제에 대하여는 1에 가까이 간다고 답을 하였고, $\sum_{n=1}^{\infty}$의 형태로 제시된 등비급수 과제에 대해서도 $\frac{9}{10}+\frac{9}{100}+\frac{9}{1000}+\cdots$의 형태로 변형하여 풀었다. 이때 '무한' 혹은 '극한'에 대한 고민하여 값을 구하였다. 학생3은 극한을 표현할 때 '$\approx$'와 사용한 '$=$'를 혼용하여 사용하였는데, '$=$'를 사용할 때도 그 의미를 설명할 때는 극한 값에 가까이 간다는 의미로 사용하였다고 설명하였다. $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots$의 형태의 과제에 대하여는 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}$의 형태로 바꾸어서 등비급수 공식을 이용하여 계산하였다. 이때도 학생이 사용한 '$=$'는 극한에 가까이 간다는 의미로 사용하였다고 표현하였다. 그림모형에 대하여는 다른 학생들과 동일하게 '칠할 수 없다.'는 표현을 하였으며, $0.999\cdots$에서의 반응과 유사하게 정사각형의 넓이보다 작다고 하였고, 정사각형의 넓이에 가까워진다고 표현하기도 하였다.

이들의 가장 큰 차이는 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{9}{10}\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}$의 값을 구하는 과제에서 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{9}{10}\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}$의 값을 정확히 1이라고 생각해서 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{9}{10}\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}=1$이라고 표현(학생1, 학생2)하였다는 것과 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{9}{10}\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}$는 계속해서 값을 더해가는 무한 번의 행위를 반복하여야하기 때문에 1에 가까이 간다고 생각해서 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{9}{10}\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}\approx 1$이라고 표현(학생3)하였다는 차이가 있다. 즉, '도달 가능성'에 대한 부분을 인식하는 과제에 대하여는 학생들의 반응이 동일하였으나, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{9}{10}\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}$와 같이 식으로 주어진 과제에 대하여는 '도달 가능성'을 고민하는 학생(학생3)과 그렇지 못한 학생(학생1, 학생2)로 구분되었다. 이는 앞서 언급한 바와 같이 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{9}{10}\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}$와 같은 과제를 제시할 때 주의할 필요가 있음을 보여준다. 학교 현장에서 교사가 평가를 시행할 때, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{9}{10}\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}$의 값을 1이라고 답하는 학생이라고 해서 그 학생이 무한과 극한 개념에 근거하여 등비급수를 이해하고 있다고 받아들여서는 안 될 것이다. 교사가 수업을 통하여 전달하고자 하는 바가 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{9}{10}\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}=1$이라는 사실 자체로 제한된 것이 아니기 때문이다. 더 나아가서 교사는 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{9}{10}\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}$에 대하여 단순히 절차를 이용하여 값을 구하는 문제로 받아들이는 학생들이 있다는 것을 인정하고, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{9}{10}\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}$를 통하여 이들을 위한 수업 방식에 대하여 고민하여야할 것이다.

2. 제언

본 연구는 소수의 학생을 대상으로 9차시라는 제한된 교수실험에서의 자료에 근거하여 등비급수의 다양한 형태에 대한 학생들의 표현을 분석한 연구이다. 따라서 본 연구에서 나타난 결과를 일반화하는 것에는 어려움이 있다. 그러나 본 연구는 제한된 자료에 근거하기는 하였지만 등비급수의 학습 과정에서 교사가 학생들의 생각과 지식 구성 과정에 대한 정보가 없을 경우, 자칫 자신이 가르쳐야 하는 내용에만 치중하여 본의 아니게 학생들이 궁금해 할 수 있는 기회를 빼앗는 실수를 할 수 있음을 보여주고 있다. 선행연구에서 살펴본바와 같이 극한을 학습한 경험이 없는 중학생들에게 있어 자연스러운 궁금증은 '왜 $0.999\cdots=1$일까?'가 아니라 '왜 $0.999\cdots<1$이 아닐까?'이었던 것처럼 극한을 학습한 고등학생들에게 있어서도 여전히 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{9}{10}\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}$에 대하여 유사한 상황이 반복되고 있다. 극한을 학습한 경험이 있다 하더라도 학생들이 궁금해 하는 것은 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{9}{10}\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}=1$로 답할 수 있는 절차가 아니라 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{9}{10}\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}<1$가 아니라고 생각하면 안 되는 이유가 궁금할 수 있는 것이다. 본 연구에서는 학생들의 반응을 분석함에 있어서 선행연구들에서 사용된 '도달 가능성'이라는 용어를 이용하여 분석하였지만, 학생들의 반응과 표현은 선행연구에서의 '도달 가능성'과는 또 다른 학생들만의 독특한 수학적 표현일 수도 있다. 이러한 해석상의 오류 가능성에도 불구하고, 본 연구는 학생들의 수학을 이해하기 위하여 한 걸음 나아갔다는 의미가 있다. 즉, 서론에서 언급하였던 '만약 학생들이 다양한 형태의 등비급수 과제들을 동일한 과제로 받아들이지 않고 있고, 과제들마다 답을 구하기 위하여 접근하는 방식이 달랐다면, 이들이 동일한 과제임을 인식하게 되었을 때 학생들은 어떠한 방식으로 '서로 달랐던 접근 방식'을 연결 지어 나갈 것인가?'과 같은 연구자의 질문에 대하여 전제 조건에 해당하는 부분을 확인하였다는 점에서 의미가 있다. 관련된 후속 연구를 통하여 본 연구의 문제점이 논의될 수도 있고, 어쩌면 본 연구에서의 결과를 바탕으로 보다 진전된 연구가 이어질 수도 있다. 이러한 논의들을 통하여 학교 현장에서 무한에 관한 내용이 수학적으로 오류가 없다는 이유로 일방적으로 강

요되는 것이 아니라 학생들에게 자연스러운 방식의 학습에 대하여 고민하는 계기가 되기를 기대한다.

참 고 문 헌

강미광 (2008). 무한 개념의 지도방안과 활용 예제: 중학교 교육과정을 중심으로. 수학교육 47(4), 447-465.

Kang, M. K. (2008). A Study on the instruction of the infinity oncept with suitable examples: focused on curriculum of middle school. *The Mathematical Education 47*(4), 447-465.

교육과학기술부(2011). 수학과 교육과정. 교육과학기술부 고시 제2011-361호 [별책 8]. 서울: 저자.

Ministry of Education and Science Technology (2011). *Mathematics curriculum*. Bulletin of MEST No.2011-361. Seoul: Author.

교육부(2015). 수학과 교육과정. 교육부 고시 제2015-74호 [별책 8]. 서울: 저자.

Ministry of Education (2015). *Mathematics curriculum*. bulletin of MOE No.2015-84 [Seperate Volume #8]. Seoul: Author.

마민영 (2017). 중학생들의 일차함수에 대한 이해와 발달. 박사학위 논문, 한국교원대학교.

Ma, M. Y. (2017). *Middle school students' understanding and development of linear functions*. Unpublished doctoral dissertation. Korea National University of Education.

박선용 (2018). 극한과 무한집합의 상호작용과 그 교육적 시사점에 대한 역사적 연구. 한국수학사학회 31(2), 73-91.

Park, S. Y. (2018). A historical study on the Interaction of the limit-the infinite set and its educational implications. *Journal for History of Mathematics 31*(2), 73-91.

박선화 (1993). 무한 개념의 이해. 대한수학교육학회논문집 3(2), 159-171.

Park, S. H. (1993). Understanding on the concept of infinity. *Journal of the Korea Society of Educational Studies in Mathematics 3*(2), 159-171.

박선화 (2000). 수열의 극한 개념에 대한 인지적 장애의 극복 방안 연구. 수학교육학연구 10(2), 247-262.

Park, S. H. (2000). A Study on a model of overcoming cognitive obstacles related to the limits of mathematical sequences. *The Journal of Educational Research in Mathematics 10*(2), 247-262.

박임숙 (2002). 고등학교에서 수열의 극한 개념의 지도에 관한 소고. 수학교육논문집 13(1), 287-304.

Park, I. S. (2002). A study on teaching of the limit concept in high school. *Communications of mathematical education 13*(1), 287-304.

신보미 (2009). 고등학생들의 정적분 개념 이해. 학교수학 11(1), 93-110.

Shin, B. M. (2009). High school students' understanding of definite integral. *School Mathematics 11*(1), 93-110.

우정호 (2001). 수학학습-지도원리와 방법. 서울: 서울대학교출판부.

Woo, J. H. (2001). *Learning mathematics-guiding principles and method*. Seoul: Seoul National University.

이동근 (2017). 고등학교 1학년 학생들의 시간, 속력, 거리의 관계에서 평균속력에 대한 인식과 평균속력 함수 구성에 대한 연구. 박사학위 논문, 한국교원대학교.

Lee, D. G. (2017). *A study on 1st year high school students' construction of average speed concept and average speed functions in relation to time, speed, and distance*. Unpublished doctoral dissertation. Korea National University of Education.

이동근, 김숙희 (2017). 지수함수 형태의 거리함수에서 미분계수의 절차적 지식 구성과 표현의 변화에 대한 사례연구. 학교수학 19(4), 639-661.

Lee, D. G. & Kim, S.H. (2017). A case study on the change of procedural knowledge composition and expression of derivative coefficient in exponential function type distance. *School Mathematics 19*(4), 639-661.

이동근, 신재홍 (2017). 구간에서의 변화율에 대한 인식과 표현에 대한 연구. 수학교육학연구 27(1), 1-22.

Lee, D. G.. & Shin, J. H. (2017). Students' recognition and representation of the rate of change in the given range of intervals. *The Journal of Educational Research in Mathematics 27*(1), 1-22.

이승우 (2016). 무한 등비급수의 합에 대한 Archimedes의 아이디어의 은유적 모델과 그 교육적 활용. 학교수학 18(1), 215-229.

Lee, S. W. (2016). The metaphorical model of Archimedes' idea on the sum of geometrical series. *School Mathematics 18*(1), 215-229.

이지현 (2014). 예비교사들은 $0.99\cdots<1$라는 주장을

어떻게 반박하는가? 학교수학 16(3), 491-502.

Lee, J. H. (2014). How do pre-service teachers disprove $0.99\cdots < 1$? *School Mathematics 16*(3), 491-502.

전명남 (2003). 무한 개념이해 수준의 발달과 반성적 추상. 수학교육 42(3), 303-325.

Jeon, M. N. (2003). The concept understanding of infinity and infinite process and reflective abstraction. *The Mathematical Education 42*(3), 303-325.

조한혁, 최영기 (1999). 정적 동적 관점에서의 순환소수. 학교수학 1(2), 605-615.

Cho, H. H. & Choi, Y. G. (1999). The repeating decimal from the static and dynamic view point. *School Mathematics 1*(2), 605-615.

홍진곤 (2008). 무한 개념의 이해에 관하여. 수학교육학연구 18(4), 469-482.

Hong, J. K. (2008). On the understanding of infinity. *The Journal of Educational Research in Mathematics 18*(4), 469-482.

Buchholtz, N., Leung, F. K., Ding, L., Kaiser, G., Park, K., & Schwarz, B. (2013). Future mathematics teachers' professional knowledge of elementary mathematics from an advanced standpoint. *ZDM, 45*(1), 107-120.

Glasersfeld, E. (1999). 급진적 구성주의, (김판수, 박수자, 심성보, 유병길, 이형철, 임채성, 허승희 역), 서울 : 원미사. (원저 1995년 출판)

King, D. A. (1968). *A History of Infinite Series* (Doctoral dissertation Paper, Peabody College for Teachers of Vanderbilt University).

Knopp, K. (1956). *Infinite sequences and series*. Mineola, NY: Dover Publications.

Randolph, J. F. (1957). Limits. In NCTM (Ed.) *Insights into Modern Mathematics* (pp.200-240). Washington, DC: NCTM.

Steffe, L. P. & Wiegel, H. G. (1996). On the nature of a model of mathematical learning. In L.P. Steffe, P. Nesher, P. Cobb, G. A. Goldin, & B. Greer (Eds.), *Theories of mathematical learning* (pp. 477-498). Mahwah, NJ: Erlbaum.

A case study on student's thoughts and expressions on various types of geometric series tasks

Lee, Dong Gun
MunJung High School, Republic of Korea
E-mail : jakin7@hanmail.net

This study started with the following questions.

Suppose that students do not accept various forms of geometric series tasks as the same task. Also, let's say that the approach was different for each task. Then, when they realize that they are the same task, how will students connect the different approaches?

This study is a process of pro-actively confirming whether or not such a question can be made. For this purpose, three students in the second grade of high school participated in the teaching experiment. The results of this study are as follows. It also confirmed how the students think about the various types of tasks in the geometric series. For example, students have stated that the value is 1 in a series type of task. However, in the case of the 0.999... type of task, the value is expressed as less than 1. At this time, we examined only mathematical expressions of students approaching each task. The problem of reachability was not encountered because the task represented by the series symbol approaches the problem solved by procedural calculation. However, in the 0.999... type of task, a variety of expressions were observed that revealed problems with reachability.

The analysis of students' expressions related to geometric series can provide important information for infinite concepts and limit conceptual research. The problems of this study may be discussed through related studies. Perhaps more advanced research may be based on the results of this study. Through these discussions, I expect that the contents of infinity in the school field will not be forced unilaterally because there is no mathematical error, but it will be an opportunity for students to think about the learning method in a natural way.

* ZDM Classification : C30
* 2000 Mathematics Subject Classification : 97C30
* Key words : series, geometric series, infinite, reachability, limit