

호몰로지를 이용한 형태 분류 기법 제안

한 희 일[†]

Proposing the Technique of Shape Classification Using Homology

Hee Il Hahn[†]

ABSTRACT

Persistence Betty numbers, which are the rank of the persistent homology, are a generalized version of the size theory widely known as a descriptor for shape analysis. They show robustness to both perturbations of the topological space that represents the object, and perturbations of the function that measures the shape properties of the object. In this paper, we present a shape matching algorithm which is based on the use of persistence Betty numbers. Experimental tests are performed with Kimia dataset to show the effectiveness of the proposed method.

Key words: Shape Classification, Homology, Persistent Homology, Persistence Betty Number

1. 서 론

최근 들어 순수수학의 대표적인 분야인 위상수학의 알고리즘들이 구현 가능해짐에 따라 이들을 컴퓨터 비전, 이미지처리, 빅데이터 분석 등에 응용하고자 하는 연구가 크게 증가하고 있다. 위상구조 이론은 수학적 대상에 국소적인 성질과 대역적인 성질을 포함하도록 위상구조를 주어 그 공간의 구조와 특성을 분석하고 파악할 수 있도록 해준다. 위상수학 이론들이 다양한 분야에서 응용되기 시작한 것은 호몰로지 군(homology group)을 효과적으로 계산할 수 있는 툴이 개발되면서 부터이다. 호몰로지 군은 위상공간이 갖고 있는 다양한 차원의 홀(hole)의 수를 계산함으로써 위상구조를 분석한다. 위상수학의 다른 이론인 기본 군(fundamental group), 호모토피 군(homotopy group) 등은 구현이 거의 불가능할 정도로 복잡한데 비하여 호몰로지 군은 비교적 쉽게 계산 가능한 장점이 있다 [1]. 위상구조 이론을 컴퓨

터 비전에 활용하고자 하는 가장 큰 이유는 위상공간에 연속적인 변형이나 왜곡에 매우 강인하기 때문이다. 하지만, 이러한 강인함이 오히려 문제가 될 수도 있다. 예를 들어 삼각형과 원은 위상구조가 동일하기 때문에 위상구조 정보로는 이들을 구분할 수 없다. 따라서 위상구조 방식은 개별적인 형태 분류보다는 형태 군 분류에 적합하다. 개별적인 형태 분류를 위해서는 기하구조도 함께 이용하여야 한다.

초기에 등장한 이론으로는 형태분석(shape analysis)을 위한 툴로 유용하게 활용되고 있는 크기 이론(size theory)이 있다 [2]. 이 이론은 인식하고자 하는 객체에 대하여 적절히 정의된 함수를 이용하여 형태의 특성을 분석하고자 하는 일종의 형태 기술자(shape descriptor)라고 볼 수 있다. 초기에는 단일 함수로 형태를 정의하였으나 다차원 벡터 함수를 이용함으로써 성능을 개선시키려는 연구가 활발히 진행되고 있으며 전자에 비하여 인식성능이 보다 더 우수함이 이론적으로 증명된 바 있다. 이 기술자는

* Corresponding Author : Hee Il Hahn, Address: (449-791) Wangsan-ri Mohyeon-myeon, Cheoin-gu, Yongin, Gyeonggi-do, Korea, TEL : +82-31-330-4356, FAX : +82-31-333-4256, E-mail : hihahn@hufs.ac.kr
Receipt date : Nov. 8, 2017, Revision date : Dec. 8, 2017
Approval date : Dec. 19, 2017

[†] Dept. of Information and Communications Eng., College of Engineering, Hankuk University of Foreign Studies
* This research was supported by the Research Program 2017 funded by Hankuk University of Foreign Studies.

위상정보를 포함하기 때문에 객체 형태의 변형에 매우 강한 특성이 있다. 90년대 초반부터 이 이론은 기하와 위상정보를 이용하여 객체와 함수를 연관 지어 객체의 형태를 기술하고 비교하기 위한 틀로 제안되었는데, 이 방식은 개념적으로 모스(Morse) 이론 [3]과 매우 유사하다. 이 방식에서는 적절한 함수를 선택하는 것이 가장 중요하고 따라서 이에 대한 연구에 가장 집중되고 있지만 아직까지 최적의 방법은 알려진 바 없으며 응용에 따라 가변적으로 선택할 수밖에 없는 것이 현실이다[4].

크기 이론은 이와 거의 동시에 개발된 지속적 호몰로지(persistent homology) 이론의 0 차원 결과와 동일하므로 이제는 대부분 보다 포괄적인 후자의 방식이 주로 활용되고 있는 추세이다. 지속적 호몰로지는 매개변수에 따라 단순 복합체(simplicial complex)가 출현(birth)하거나 사라짐(death)으로 인한 호몰로지의 변화를 측정하는 이론이다. 매개변수에 따른 단순 복합체의 열을 필터레이션(filtration)이라고 부르는데, 필터레이션의 어느 순간에 위상적으로 유의미한 특징들(연결성분, 터널, void 등)이 발생하여 어느 기간 동안 유지되고 있는지를 파악함으로써 주어진 객체의 위상구조를 분석할 수 있다. 응용에 따라서는 이를 더 압축하여 지속적 호몰로지 군의 랭크(rank)만을 이용할 수도 있는데, 이를 지속적 베티 수(persistent Betty number: 이하 PBN이라 표기함)라고 부른다 [5].

PBN의 안정성 문제는 가장 중요한 이슈이고 이에 관한 연구는 다양한 형태로 진행되고 있다. 여기서 안정성 문제란 객체를 표현하는 위상공간의 왜곡과 객체의 위상특성을 측정하는 함수의 왜곡에 얼마나 강인한지에 대한 분석을 포함한다. 이에 근거하여 본 논문에서는 0 차원 지속적 베티 수를 이용하여 이진화된 객체와 윤곽선으로 표현된 객체의 군을 분류하는 알고리즘을 구현한다.

본 논문의 구성은 다음과 같다. 2절에서는 지속적 호몰로지와 PBN에 대한 이론을 간략히 소개하고 이를 구하는 방식을 설명한다. 3절에서는 PBN을 이용하여 형태를 분류하는 기법을 설명한다. 이를 이용하여, Kimia 테스트 이미지 DB [6]에 주어진 이진화된 이미지에서 각각 PBN을 구하고 이들 간의 거리를 구함으로써 형태의 범주를 분류한 실험결과와 함께 윤곽선 이미지에 대해서도 동일한 실험을 수행하여

그 결과를 4절에서 확인한다. 마지막으로 5절에서는 결론을 맺고 향후 연구 진행방향에 대하여 논의한다.

2. 배경 이론

2.1 지속적 호몰로지

지속적 호몰로지는 형태와 함수 등의 위상적 특징 정보를 측정하기 위한 대수적 알고리즘이다. 기하구조의 연결성에 대한 모든 정보를 명확히 알면 호몰로지를 이용하여 그 구조의 위상특성을 구할 수 있다. 하지만, 어떤 기하구조에서 무작위로 추출된 객체로 주어지면 이들이 어떻게 연결되어 있는지 정확히 알 수 없으므로 호몰로지를 바로 적용하는데 어려움이 발생한다. 이를 위하여 지속구간(persistence) 개념이 도입된다. 지속적 호몰로지를 구하기 위해서는 우선 필터레이션 $0 = K^0 \subseteq K^1 \subseteq \dots \subseteq K^m = K$ 를 생성하여야 한다. 여기서 K^i 는 인자 i 에 따른 객체군을 나타낸다. 지속적 호몰로지란 필터레이션을 따라 계산한 호몰로지를 말한다. 여기서 객체 $\sigma \in K^i$ 를 만족시키는 인자 i 의 최소값은 σ 의 필터레이션 인자로 정의되는데, σ 가 k 차원 홀을 필터레이션 인자 s 에서 생성하고 t 에서 소멸시킬 때, 그 구간 $[s, t) = \{x | s \leq x < t\}$ 를 k 차원 홀의 지속구간이라고 부른다. K^s 의 p 지속구간 k 차원 호몰로지 군(homology group)은 다음과 같은 상군(quotient group)으로 정의되는데 [5,7],

$$H_k^{s,p} = Z_k^s / (B_k^{s+p} \cap Z_k^s) \tag{1}$$

여기서, $p = t - s$ 이고, Z_k^s 는 K^s 의 k -순환 군(cycle group)을, B_k^{s+p} 는 K^{s+p} 의 k -경계 군(boundary group)을 각각 나타낸다. 이와 같이 매개변수에 따라 위상적 특징이 출현하고 사라짐이 발생하는데, 이들의 쌍은 유일하게 존재하고 호몰로지 군의 준동형 맵(homomorphism)을 이용하여 정의된다. 여기서 지속구간이 짧으면 사슬이 발생한 후 곧 내부가 채워져 사라지는 형상을 나타내므로 위상 잡음으로 간주되는 반면, 긴 구간은 큰 사슬을 의미하므로 중요한 위상 특징을 제공한다. 모스 함수나 단순 복합체 등, 대상에 따라 지속적 호몰로지를 구하는 방식이 많이 다르나 본 논문에서 활용하는 모스 함수에 국한시켜 설명하기로 한다.

2.2 PBN

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 는 매끄러운 함수(smooth function)이고 $f'(x) \neq 0$ 인 서로 다른 극점만을 갖고 있다고 가정한다. 모든 $t \in \mathbb{R}$ 에서 레벨세트 $S_t = f^{-1}(-\infty, t]$ 를 정의하고, t 를 $-\infty$ 에서부터 증가시키면 레벨세트의 연결성이 그대로 유지되다가 극점에서 연결성이 변함을 알 수 있다. 즉, 국소 극소점에서 레벨세트의 연결성분이 한 개 증가하다가 국소 극대점에서 두 연결성분이 하나로 합쳐진다. 이때 그 극소점은 새로 생긴 연결성분을 나타낸다고 표현하는데, 다음과 같은 방법으로 f 의 극점들을 짝 지운다. f 가 극대점을 지나면서 두 개의 성분이 하나로 병합될 때 이들에 해당되는 두 개의 극소점 중에서 큰 값과 극대점을 짝 지운다. 나머지 작은 극소점은 병합된 연결성분을 나타낸다. 이와 같이 두 개의 점 x 와 y 가 짝 지워질 때 이의 지속구간을 $f(y) - f(x)$ 로 정의한다. 지속구간은 각각의 짝을 이차원 평면상의 점 $(f(x), f(y))$ 으로 매핑시켜 표현할 수 있는데, 이를 지속구간 다이어그램(persistence diagram)이라고 부른다. 이 다이어그램에서 각 짝에 해당되는 모든 점은 이차원 평면의 대각선 위에 존재함을 알 수 있다. 즉, 각 점은 임계값을 증가시키면서 생겨난 레벨세트의 각 연결성분이 태어난 시점($f(x)$)과 소멸한 시점($f(y)$)을 좌표로 표시한 것이고 각 연결성분의 지속구간은 이에 해당되는 점과 대각선과의 수직 거리로 표현된다. 예를 들어, Fig. 2에서 좌표 (7, 56)에 존재하는 점은 $56 - 7 = 49$ 의 지속구간을 갖는데, 이 값이 클수록 위상적으로 중요한 연결성분으로 간주된다.

두 개의 임계값 $p < q$ 에 해당되는 레벨세트는 $S_p \subseteq S_q$ 를 만족한다. p 에서부터 q 로 진행하면서 S_p 내의 연결성분들은 병합되기도 하고 새로 태어나기도 한다. 여기서 p 이전에 태어나서 S_q 에서 개별적인 연결성분으로 남아 있는 연결성분의 수 $\beta_0^{p,q}$ 를 PBN이라고 부르며, $f(x) \leq p < q < f(y)$ 를 만족하는 짝 (x, y) 의 개수와 동일한 값을 갖는다.

3. PBN을 이용한 형태분류 알고리즘

객체 $K \subset \mathbb{R}^n$ 의 기하와 위상적 특성을 추출하는 형태기술자를 구성하기 위하여 PBN을 이용할 수 있다. K 의 기하특성은 적절한 함수 $\vec{\phi} = (\phi_1, \dots, \phi_k)$ 를 선택하여 구한다. 여기서 각 성분 ϕ_i 는 형태정보를 기술한

다. K 의 위상특성은 이의 레벨세트를 이용하여 구한다. 여기서 K 의 레벨세트는 다음과 같이 구한다.

$$K(\vec{\phi} \leq \vec{u}) = \{x \in K: \phi_i(x) \leq u_i, i = 1, \dots, k\} \quad (2)$$

앞으로는 표기의 편의를 위하여 $\vec{u} = (u_1, \dots, u_k)$ 와 $\vec{v} = (v_1, \dots, v_k)$ 에서 모든 i 에 대하여 $u_i \leq v_i$ 이면 간단히 $\vec{u} \leq \vec{v}$ 로 표기하기로 한다. $K(\vec{\phi} \leq \vec{u})$ 는 $K(\vec{\phi} \leq \vec{v})$ 에 포함된다. 즉 $K(\vec{\phi} \leq \vec{u}) \subseteq K(\vec{\phi} \leq \vec{v})$ 이다. 따라서 위에서 설명한 지속적 호몰로지 이론을 이용하여 형태의 위상공간을 벡터공간으로 변환할 수 있으므로 형태의 위상정보를 쉽게 구할 수 있다. 준동형 맵 $\pi_q^{(\vec{u}, \vec{v})}: H_q(\vec{\phi} \leq \vec{u}) \rightarrow H_q(\vec{\phi} \leq \vec{v})$ 는 포함 맵(inclusion map) $i^{(\vec{u}, \vec{v})}: K(\vec{\phi} \leq \vec{u}) \rightarrow K(\vec{\phi} \leq \vec{v})$ 에 의해 유도된다고 가정한다. 여기서 $q \in \mathbb{Z}$, $\vec{u} \leq \vec{v}$ 이고 H_q 는 q 차원 호몰로지 군을 나타낸다. 그러면 q 차원 PBN은 $im \pi_q^{(\vec{u}, \vec{v})}$ 의 랭크로 정의된다. 여기서, im 은 image의 약자로 지역을 의미한다.

객체는 컴팩트 공간 $X \subseteq \mathbb{R}^n$ 의 부공간 K 로 가정한다. 객체의 형태 특성은 측정함수 $\vec{\phi}: X \rightarrow \mathbb{R}^k$ 를 통하여 기술될 수 있는데, PBN에 대한 오차정도를 측정하기 위하여 다음과 같은 특성을 가진 거리함수 D 가 존재한다고 가정한다.

$$D(\beta_{\vec{\phi}}, \beta_{\vec{\psi}}) \leq \|\vec{\phi} - \vec{\psi}\|_{\infty} \quad (3)$$

위 식을 안정화 특성 부등식이라고 부르는데, 이는 서로 다른 측정함수를 이용하여 구한 PBN 간의 거리는 두 측정함수 간의 거리보다 작다는 것을 의미한다. 위상을 변경시킬 정도의 잡음 하에서도 PBN의 안정화를 얻기 위한 방법은 K 에 잡음이나 왜곡이 가

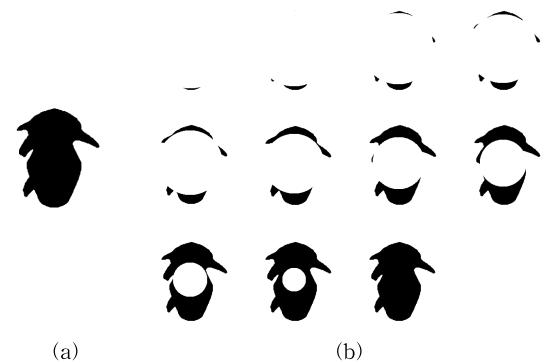


Fig. 1. Filtration obtained from the binary image. (a) Input binary image (b) Its filtration.

해져서 형태가 크게 변형되더라도 이러한 영향에 강한 함수를 찾는 것이다. 본 논문에서는 측정함수 $\phi_K(x)$ 로 K 의 질량중심과 화소 x 간의 거리함수를 이용한다. 임의의 두 개의 객체 K_1 과 K_2 에 대하여 각각 측정함수 ϕ_{K_1} 과 ϕ_{K_2} 를 구하면, 식 (3)에 따라 $D(\beta_{\phi_1}, \beta_{\phi_2}) \leq \max \|\phi_1 - \phi_2\|$ 를 만족시킨다[2, 8].

Fig. 1(b)는 좌에서 우로 위에서부터 아래의 진행 방향으로 인자가 증가한다. 이와 같이 필터레이션이 주어지면 이를 이용하여 Fig. 2에 제시한 바와 같이 PBN에 대한 지속구간 다이어그램을 구할 수 있다.

예를 들어, 질량중심에서 각 화소까지의 거리를 측정함수로 이용하여 Fig. 1(a)에 주어진 이진화 이미지의 필터레이션 $0 = K^0 \subseteq K^1 \subseteq \dots \subseteq K^m = K$ 를 Fig. 1(b)와 같이 구할 수 있다. 이를 위하여 우선 질량중심에서 가장 먼 화소와의 거리 d_{max} 를 구하여야 한다. d_{max} 보다 먼 거리에 있는 화소는 존재하지 않으므로 이에 해당되는 K^0 는 공집합임을 알 수 있다. d_{max} 를 작은 값을 임계값으로 이보다 같거나 먼 거리에 있는 영역 K^1 은 Fig. 1(b)의 좌측 상단(K^2 에 해당됨))과 유사한 모습으로 나타날 것이다. 계속해서 임계값을 줄여가면서 이 과정을 반복하면 Fig. 1(b)와 같은 세그멘테이션 영역의 열을 구할 수 있는데 이를 필터레이션이라고 한다. Fig. 1(b)는 필터레이션 중의 일부를 발췌하여 보여주고 있다. 여기서 K^1 에 등장한 작은 영역은 $s=1$ 일 때 태어나서 $t=100$ 즉, K^{100} 까지 생존하고 있으므로 Fig. 2의 좌표 (1, 100)에 한 점으로 나타난다. 하지만 Fig. 1(b)의 상단 좌측에서 두 번째 이미지(K^4)의 두 영역 중 왼쪽의 작은

점은 잠시 $s=4$ 일 때 태어나서 잠시 생존하다가 K^{23} 에 합병되어 사라짐을 확인할 수 있다. 이러한 정보가 Fig. 2의 좌표 (4, 23)에 해당되는 점으로 기록된다. 이 때, 구간 $[4, 23) = \{x|4 \leq x < 23\}$ 를 그 영역의 지속구간이라고 부른다. 따라서 지속구간이 작으면 중요도가 거의 없는 영역으로 해석될 수 있으므로 이를 위상잡음이라고 부른다. 반면에 지속구간이 길면 길수록 객체의 형태를 기술하는 매우 중요한 정보를 저장하고 있으므로 본 논문에서는 지속구간이 10 이상인 점만을 고려한다.

두 개의 이미지로부터 구한 PBN β_{I_1} 과 β_{I_2} 간의 거리는 다음과 같이 구한다.

$$d(\beta_{I_1}, \beta_{I_2}) = \min_{\sigma} \max_{p \in \beta_{I_1}} \delta(p, \sigma(p)) \tag{4}$$

여기서 $\sigma: \beta_{I_1} \rightarrow \beta_{I_2}$ 는 모든 가능한 전단사 함수를 나타내고, δ 는

$$\delta((p_1, q_1), (p_2, q_2)) = \min \left\{ \max(|p_1 - p_2|, |q_1 - q_2|), \max\left(\frac{|q_1 - p_1|}{2}, \frac{|q_2 - p_2|}{2}\right) \right\} \tag{5}$$

으로 정의된다. 이 식을 살펴보면, 위상잡음으로 간주되는 대각선상에 있는 점은 거리함수 $d(\beta_{I_1}, \beta_{I_2})$ 에 전혀 반영되지 않음을 알 수 있다. 또한 β_{I_1} 과 β_{I_2} 가 서로 다른 개수의 점을 가지면, 대응되지 않는 점은 가장 근접한 대각선상의 점으로 짝을 이루게 한다.

4. 실험 및 토론

본 논문에서는 K 의 질량중심과 화소 x 간의 거리함수 $\phi_K(x)$ 를 측정함수로 이용한다. 측정함수는 모든 화소에 대하여 정의되고 연속이어야 한다. 제안 알고리즘의 동작을 확인하기 위하여 Kimia 데이터셋을 이용한다 [6]. 이 데이터셋은 9 개의 범주로 구성되고 각 범주 당 11개의 형태 이미지를 포함한다. 각 범주에 속하는 형태는 위상구조가 거의 유사하므로 본 논문의 목적은 각 형태를 개별적으로 분류하기 보다는 어느 범주에 속하는지를 판별하는데 있다. Fig. 3은 5개의 범주에서 각각 2개의 이미지를 선택한 예를 보여준다.

첫 번째 실험에서는 두 개의 이진화된 이미지 I_1 과 I_2 로부터 측정함수를 이용하여 레벨셋을 구함으로써 필터레이션 $0 = K^0 \subseteq K^1 \subseteq \dots \subseteq K^m = K$ 을 구성하

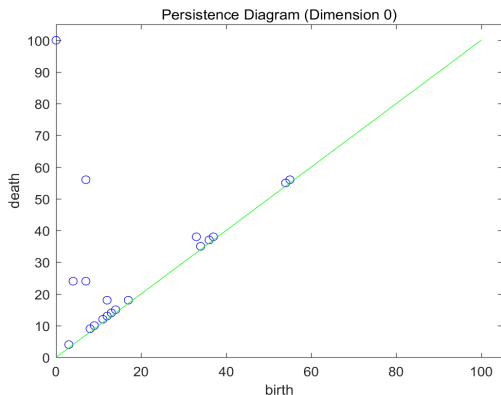


Fig. 2. Persistence diagram corresponding to the filtration given in Fig. 1(b).

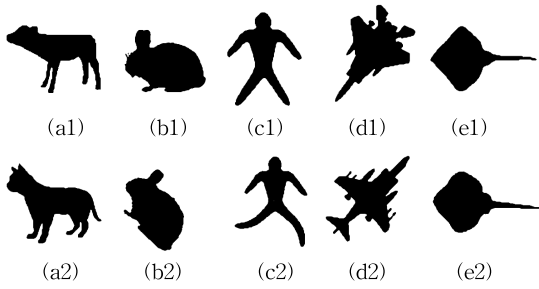


Fig. 3. Examples of binary images in Kimia dataset. (a1) ani01 (b1) bun03 (c1) dud00 (d1) jet01 (e1) kk01 (a2) ani03 (b2) bun08 (c2) dud07 (d2) jet04 (e2) kk02.

고 각 K^i 내에 존재하는 연결성분의 PBN을 구하여 지속구간 다이어그램으로 나타낸다. Fig. 4는 Fig. 3에 제시한 첫 세 그룹의 이미지에서 구한 지속구간 다이어그램을 보여준다. 지속구간 다이어그램의 각 점은 해당 연결성분의 생성과 소멸시점을 좌표로 표시한 것이다. 따라서 모든 점은 대각선 위의 반평면상에 존재하며 대각선에 근접한 점일수록 잠시 동안 생존하다가 소멸된 객체에 해당되므로 중요도가 떨어지거나 위상잡음일 가능성이 매우 높은 객체에 속한다. 실험에서는 대각선에서 일정거리(본 논문에서는 10으로 정함) 이상 떨어진 점만을 고려한다.

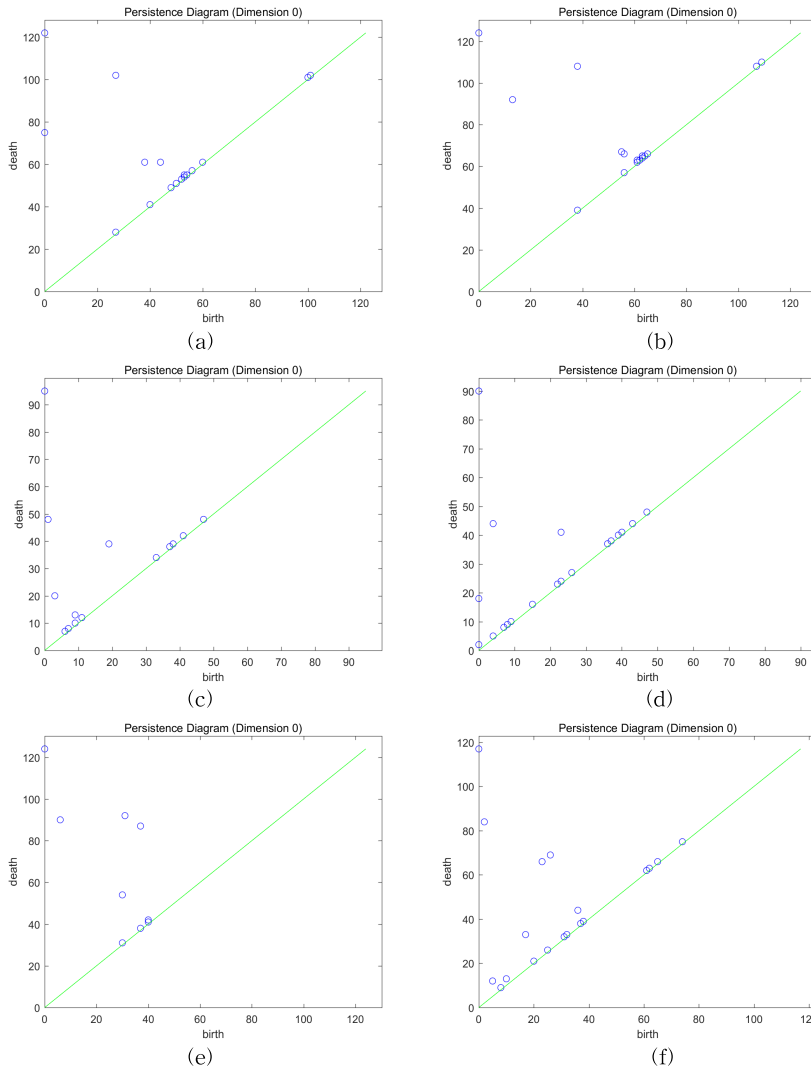


Fig. 4. Persistence diagrams computed from the filtrations of the following binary images. (a) ani01 (b) ani03 (c) bun03 (d) bun08 (e) dud00 (f) dud07

지속구간 다이어그램을 보면 몇 개의 점으로 구성되어 있고 맨 위에 한 개의 점이 나타나는데, 이는 객체의 질량 중심에서 멀리 떨어져 있을 때에는 여러 개의 객체로 나타나다가 거리가 줄어들수록 한 개의 점으로 병합되는 모습을 보여준다. 임의의 두 개의 이미지로부터 구한 PBN β_{I_i}, β_{I_j} 간의 거리는 식 (4)를 이용하여 구할 수 있다.

구현 알고리즘의 동작을 확인하기 위하여 Fig. 3의 각 이미지에서 구한 PBN 간의 거리 $d(\beta_{I_i}, \beta_{I_j})$ 를 계산하여 그 결과를 Table 1에 제시하였다. 이 표를 보면, ani01은 dud07과 거리가 가장 가깝고 동일한 범주에 속하는 ani03을 두 번째로 가까운 형태로 인식하고 있는데, 이는 PBN의 관점에서 ani01과 dud07은 위상적으로 거의 일치하기 때문이다. 그 외에는 오류 없이 정확하게 동일한 범주에 속하는 형태 간의 거리가 가장 작음을 확인할 수 있다. 이를 확장하여 Kimia 데이터세트의 모든 형태를 이용하였을 때

인식률은 Table 3에 제시하였다.

다음 실험에서는 Fig. 3의 이진화된 이미지 대신에 Fig. 5에 주어진 바와 같이 윤곽선으로 주어진 이미지를 이용하여 위와 동일한 실험을 진행하였다. Table 2는 Fig. 5의 각 이미지에서 구한 PBN 간의 거리 $d(\beta_{I_i}, \beta_{I_j})$ 를 보여준다. 이 표에서 알 수 있는 바와 같이, 위 실험결과와는 달리 ani01과 ani03은 각각 jet01, jet02와 각각 최소 정합거리를 보여주고 있는데, 그 이유는 이들 모두 다섯 개의 덩어리로 구성된 형태이어서 위상구조가 유사하기 때문일 것으로 해석된다. 하지만, jet01은 jet02와, jet02는 jet01과 각각 최소 정합거리를 갖고 있어서 정확하게 분류하고 있다. 그 외의 이미지에 대해서는 정확하게 분류하고 있음을 확인할 수 있다. 99 개의 전체 이미지에 대한 인식률은 Table 3에 나타난 바와 같이 앞의 실험결과 보다는 다소 떨어지지만 비교적 우수한 인식률을 보여주는 것으로 해석될 수 있다.

Table 1. The matching distances between the persistence diagrams computed from the binary images

	ani01	ani03	bun03	bun08	dud00	dud07	jet01	jet02	kk01	kk02
ani01		23.0	41.0	41.5	25.0	20.0	41.5	38.0	41.5	41.5
ani03	23.0		35.0	39.0	25.0	35.0	40.5	40.5	40.5	43.0
bun03	41.0	35.0		4.0	37.5	39.0	52.0	46.0	63.0	67.0
bun08	41.5	39.0	4.0		37.5	39.0	55.0	49.0	66.0	70.0
dud00	25.0	25.0	37.5	37.5		16.0	37.5	37.5	37.5	38.0
dud07	20.0	35.0	39.0	39.0	16.0		37.0	36.8	39.0	39.0
jet01	41.5	40.5	52.0	52.0	37.5	37.0		17.0	25.0	25.0
jet02	38.0	40.5	46.0	49.0	37.5	36.8	17.0		38.2	28.5
kk01	41.5	40.5	63.0	66.0	37.5	39.0	25.0	38.2		8.0
kk02	41.5	43.0	67.0	70.0	38.0	39.0	25.0	28.5	8.0	

Table 2. The matching distances between the persistence diagrams computed from the boundary images given in Fig. 5

	ani01	ani03	bun03	bun08	dud00	dud07	jet01	jet02	kk01	kk02
ani01		22.0	28.0	33.0	38.0	34.0	21.0	26.0	36.8	36.8
ani03	22.0		30.0	35.0	38.0	28.3	16.0	21.0	28.3	28.3
bun03	28.0	30.0		5.0	38.0	40.5	40.0	40.0	40.0	38.0
bun08	33.0	35.0	5.0		41.0	40.5	45.0	45.0	40.0	38.0
dud00	38.0	38.0	38.0	41.0		16.0	38.0	41.0	53.7	53.7
dud07	34.0	28.3	40.5	40.5	16.0		29.0	36.1	57.3	57.3
jet01	21.0	16.0	40.0	45.0	38.0	29.0		11.0	26.9	26.9
jet02	26.0	21.0	40.0	45.0	41.0	36.1	11.0		36.8	36.8
kk01	36.8	28.3	40.0	40.0	53.7	57.3	26.9	36.8		4.0
kk02	36.8	28.3	38.0	38.0	53.7	57.3	26.9	36.8	4.0	

Table 3. Comparison of the performances of the algorithms using the Kimia dataset

	1st	2nd	3rd	4th	5th	6th	7th	8th	9th	10th	11th
Belongie	97	91	88	85	84	77	75	66	56	37	
Bernier	99	97	94	92	84	76	69	65	46	37	25
Frosini	99	95	91	88	85	82	80	76	63	53	40
Zhou	99	99	98	97	97	95	93	86	87	67	
Our method 1	99	93	90	87	82	78	75	68	60	55	41
Our method 2	99	89	85	81	78	73	66	58	50	44	31

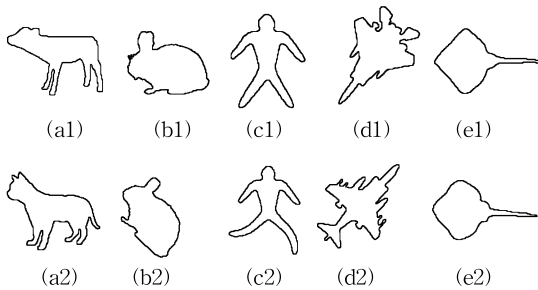


Fig. 5. Examples of boundaries extracted from the binary images in Kimia dataset. (a1) ani01 (b1) bun03 (c1) dud00 (d1) jet01 (e1) kk01 (a2) ani03 (b2) bun08 (c2) dud07 (d2) jet04 (e2) kk02.

본 논문에서 이용한 데이터세트는 9 개의 범주로 구성되고 각 범주 당 11 개의 형태 이미지를 포함하므로, 자기 자신을 포함하여 정합거리가 가장 작은 11 개의 객체가 동일한 범주에 속할 때 이 실험에서 가장 이상적인 결과라고 볼 수 있다. 제안 알고리즘의 성능을 분석하고 동일한 데이터세트를 이용한 타 알고리즘 [8, 9, 10, 11] 과의 성능 비교를 위하여 표 3에 인식결과를 제시하였다. 각 알고리즘 별 11 개의 숫자는 인식률을 나타내는 바, n 번째 숫자는 n 번째로 인식된 객체 (n 번째로 작은 정합거리를 갖는 객체)가 인식하고자 하는 객체(query shape)와 동일한 범주에 속하는 경우의 합을 나타낸다.

Sebastian, et al [6] 과 Frosini, et al [8] 가 객체의 위상정보를 활용한 방식에 속한다. 전자는 인식률이 그래프로 제시되어 Table 3에 포함되지 않았다. 이 방식은 이진 객체 이미지에서 스켈레톤을 구하고 이를 그래프(shock graph라고 명명함)로 간주하고 그래프 간의 유사도를 측정하는 방식으로 객체를 인식하고 있는데, 동일한 범주에 속하는 객체임에도 불구하고 스켈레톤의 형태변화가 심하여 가지치기(pruning) 등의 전처리 부담이 큰데 비해 인식률이 상대적으로

으로 높지 않은 단점이 있다. 후자의 방식은 본 논문과 동일하게 PBN을 이용하여 객체를 인식한다. 이 방식은 퍼지(fuzzy) 정보, 영역 간의 하우스도르프 거리(Hausdorff distance)와 바틀넥 거리(bottleneck distance) 등, 여러 정보들을 특징벡터로 활용하기 때문에 제안 알고리즘보다 성능은 다소 우수하나 계산량이 크게 증가하는 단점이 있다. Table 3에 제시한 바와 같이, 타 알고리즘에 비하여 제안 알고리즘의 성능은 다소 떨어지지만 이진 이미지나 윤곽선 이미지에 적용 가능하고, 전처리 과정이 전혀 없어 구조가 상대적으로 간단하므로 응용에 더 적합할 것으로 기대된다. 제안 알고리즘은 한 이미지에서 PBN을 구하는데 2.59GHz 8GB RAM 사양의 PC에서 평균 2 초 이내의 시간이 소요된다.

4. 결 론

본 논문에서는 이진화된 이미지와 윤곽선 이미지에 대하여 이들의 질량중심과 화소 x 간의 거리함수 $\phi_A(x)$ 를 측정함수로 이용하여 PBN을 계산함으로써 이미지의 형태를 분석하고 분류하는 알고리즘을 구현하였다. 이 알고리즘은 객체의 기하적 변형과 왜곡에는 매우 강인하지만, 객체 내 연결성분의 수를 변화시키는 위상 왜곡에는 민감한 단점을 보인다. 이러한 문제를 해결하기 위해서는 적절한 전처리 과정과 함께 측정함수를 보완하는 작업이 필요하다. 크기 이론을 적용한 알고리즘에 의하면, 여러 개의 측정함수를 동시에 이용하면 성능개선이 가능함이 알려져 있다. 또한, 현 수준에서는 0 차원 PBN만 구현하여 사용하고 있으나 향후에는 1 차원 PBN을 구하는 알고리즘을 추가하여 이미지 내의 홀(hole)의 존재유무와 개수를 주요한 위상정보로 활용하고자 한다. 이와 함께 PBN에 적합한 측정함수를 발굴하여 성능을 보완

하는 연구로 확장할 계획이다.

REFERENCE

[1] H. Hahn, "Topological Analysis of Spaces of Waveform Signals," *Journal of Korea Multi-media Society*, Vol. 19, No. 2, pp. 146-154, 2016.

[2] S. Biasotti, A. Cerri, P. Frosini, D. Giorgi, and C. Landi, "Multidimensional Size Functions for Shape Comparison," *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, Vol. 32, No. 2, pp. 161-178, 2008.

[3] J.W. Milnor, *Morse Theory*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, U.S.A., 1963.

[4] H. Edelsbrunner, D. Letscher, and A. Zomorodian, "Topological Persistence and Simplification," *Discrete Computational Geometry* 28, Vo. 28, No. 4, pp. 511-533, 2002.

[5] H. Edelsbrunner, J. Harer and A. Zomorodian, "Hierarchical Morse-Smale Complexes for Piecewise Linear 2-Manifolds," *Discrete and Computational Geometry*, Vol. 30, No. 1, pp. pp. 87-107., 2003.

[6] T. Sebastian, P. Klein, and B. Kimia, "Recognition of Shapes by Editing Shock Graphs," *IEEE Transaction on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, Vol. 1, pp. 755-762, 2001.

[7] A. Zomorodian and G. Carlsson, "Computing Persistent Homology," *Discrete Computational Geometry*, Vol. 33, No. 2, pp. 249-274, 2005.

[8] P. Frosini and C. Landi, "Persistent Betty Number for a Noise Tolerant Shape-based Approach to Image Retrieval," *Pattern Recognition Letters*, No. 34, No. 8, pp. 863-872, 2013.

[9] S. Belongie, J. Malik, and J. Puzicha, "Shape Matching and Object Recognition Using Shape Contexts," *IEEE Transactions on Pattern Analysis Machine Intelligence*, Vol. 24, No. 4, pp. 509-522, 2002.

[10] T. Bernier and J. Landry, "New Method for Representing and Matching Shapes of Natural Objects," *Pattern Recognition*. Vol. 36, No. 8, pp. 1711-1723, 2003.

[11] R. Zhou and L. Zhang, "Shape Retrieval Using Pyramid Matching with Orientation Features," *Proceeding of IEEE Intrenation Conference on Intelligenct Computing and Intelligent Systems*, Vol. 4, pp. 431-434, 2009.



한 희 일

1980년 3월 ~ 1984년 2월 서울대학교 제어계측 공학과 공학사
 1984년 3월 ~ 1986년 2월 서울대학교 제어계측 공학과 공학석사

1992년 8월 ~ 1995년 12월 University of Arizona 전기 및 컴퓨터 공학과 공학박사
 1987년 1월 ~ 1998년 3월 한국전자통신연구원, 선임연구원
 1998년 3월 ~ 현재 한국외국어대학교 정보통신공학과 교수
 관심분야 : 신호처리, 영상처리, 컴퓨터비전, 패턴인식, 미분기하 및 위상수학