

불완전한 전반부 정합 하에서의 관측기 기반 구간 2형 T-S 퍼지 시스템의 H_∞ 퍼지 제어기 설계

Observer-based H_∞ Fuzzy Controller Design of Interval Type-2 Takagi-Sugeno Fuzzy Systems Under Imperfect Premise Matching

황 성 환* · 박 진 배* · 주 영 훈**
(Sounghwan Hwang · Jin Bae Park · Young Hoon Joo)

Abstract - In this paper, we design an observer-based H_∞ fuzzy controller for interval type-2 Takagi-Sugeno (T-S) fuzzy systems under imperfect premise matching. The designed observer-based controller can effectively estimate the state of the system and make fuzzy system satisfy the H_∞ disturbance attenuation performance. Using the slack matrix, the derived stabilization condition is expressed in terms of a linear matrix inequality. Finally, the effectiveness of the proposed method is verified through a simulation example.

Key Words : Interval Type-2 T-S Fuzzy System, H_∞ Control, Lyapunov function, LMI, Imperfect Premise Matching

1. 서 론

최근 시스템의 복잡성이 증가하고 규모가 커짐에 따라 시스템은 다양한 형태의 비선형성을 가지게 되었다. 이에 따라 비선형 시스템 제어의 필요성이 대두되어 왔으며 다양한 비선형 시스템 제어 이론에 대한 연구가 활발하게 진행되고 있다. 그 중 Takagi-Sugeno (T-S) 퍼지 모델 [1]-[3]은 비선형 시스템을 소속 함수와 선형 부분 시스템들의 선형 결합으로 표현하여 나타내는 기법으로 이를 이용하면 선형 시스템 이론을 적용시킬 수 있기 때문에 많은 주목을 받고 있다.

일반적으로 T-S 퍼지 모델은 소속 함수의 불확실성 유무에 따라 1형과 2형 모델로 나눌 수 있다. 1형 퍼지 모델에 대한 소속 함수는 시스템의 불확실성에 대한 정보를 포함하지 않기 때문에, 시스템이 불확실성을 가질 경우, 제어기의 성능이 나빠질 수 있다. 이에 [4]에서는 이러한 한계점을 극복하기 위해 2형 퍼지 모델을 제안하였다. 2형 퍼지 모델은 1형 모델과는 달리 시스템의 불확실성을 상한과 하한 소속 함수를 이용하여 처리할 수 있는 장점이 있다. 더 나아가 [5]-[6]에서는 2형 퍼지 모델의 개념을 확장하여 구간 2형 퍼지 모델 기법을 제안하였다.

일반적으로, 시스템에 외란이 존재하면 시스템을 불안정하게 만들 수 있기 때문에 외란 감쇠 제어 기법의 중요성이 대두되고

있다. 이에 따라 여러 가지 제어 기법들이 연구되고 있는데, 그 중 H_∞ 제어 기법은 외란 입력과 평가 출력으로 구성된 전달함수의 H_∞ 노름 (norm)을 측정하고, 그것이 희망하는 값보다 작게 만들어 목표하던 성능을 달성시키는 최적 기법이다 [7]-[8]. 그 중에서도 T-S 퍼지 모델링을 활용한 설계 기법이 많은 주목을 받고 있다 [10]. 기존에 연구된 T-S 퍼지 관측기 기반 H_∞ 제어기 설계 기법들은 대부분 1형 모델을 바탕으로 진행됐으며 아직까지 구간 2형 모델을 이용한 연구는 미진한 실정이다.

본 논문에서는 불완전한 전반부 정합 하에서의 관측기 기반 구간 2형 T-S 퍼지 시스템의 H_∞ 퍼지 제어기 설계에 대해 다룬다. 설계된 관측기 기반 제어기는 안정화 되지 않은 구간 2형 T-S 퍼지 시스템에 대해 시스템의 상태를 효과적으로 추종할 수 있으며 H_∞ 제어 성능 조건을 만족한다. 슬랙 행렬을 포함하여 유도된 안정화 조건은 선형 행렬 부등식으로 표현된다. 마지막으로 제안하는 방법의 효용성을 시뮬레이션 예제를 통해 검증한다.

표기법 : $He\{A\}$ 는 $A+A^T$ 를 의미하며, *는 대칭 위치에서 전치되었음을 의미한다.

2. 문제 설정

2.1 구간 2형 T-S 퍼지 모델

다음의 외란이 포함된 구간 2형 T-S 퍼지 시스템을 고려하자.

$$\text{Rule } i: \text{ IF } \zeta_1(t) \text{ is } \widetilde{M}_1^i \text{ and } \dots \text{ and } \zeta_\psi(t) \text{ is } \widetilde{M}_\psi^i, \\ \text{ THEN } \dot{x}(t) = A_i x(t) + B_{1i} d(t) + B_{2i} u(t),$$

† Corresponding Author : Dept. of Electrical and Electronic Engineering, Yonsei University, Korea.

E-mail : jbpark@yonsei.ac.kr

* Dept. of Electrical and Electronic Engineering, Yonsei University, Korea.

** Dept. of Control and Robotics Engineering, Kunsan National University, Korea.

Received : April 12, 2017; Accepted : September 26, 2017

$$\begin{aligned} z(t) &= C_{1i}x(t) + D_{1i}d(t) + D_{2i}u(t), \quad (1) \\ y(t) &= C_{2i}x(t), \quad (1 \leq i \leq r), \end{aligned}$$

여기서 Rule i 는 i 번째 퍼지 규칙을 나타내고, \widetilde{M}_j^i 는 i 번째 규칙에서 전제변수 $\zeta_j(t)$, ($1 \leq j \leq \psi$)에 해당하는 구간 2형 퍼지 집합이다. $x(t) \in R^n$ 는 상태 벡터, $u(t) \in R^m$ 은 입력 벡터, $y(t) \in R^h$ 는 출력 벡터, $z(t) \in R^q$ 는 제어가 된 출력 벡터, $d(t) \in L_2^l[0, \infty)$ 은 외란 벡터를 의미한다. 또한 $A_i \in R^{n \times n}$, $B_{1i} \in R^{n \times l}$, $B_{2i} \in R^{n \times m}$, $C_{1i} \in R^{q \times n}$, $C_{2i} \in R^{h \times n}$, $D_{1i} \in R^{q \times l}$, $D_{2i} \in R^{q \times m}$ 은 각각 시스템의 특성을 표현하는 행렬이다. i 번째 소속 함수는 다음과 같이 i 번째 소속 함수의 상한과 하한으로 이루어진 구간 집합으로 쓸 수 있다.

$$\widetilde{w}_i(\zeta(t)) = [w_i^L(\zeta(t)) \ w_i^U(\zeta(t))], \quad (1 \leq i \leq r),$$

여기서 $w_i^L(\zeta(t))$ 와 $w_i^U(\zeta(t))$ 는 다음을 만족한다.

$$w_i^L(\zeta(t)) = \underline{\mu}_{\widetilde{M}_1^i}(\zeta_1(t)) \times \underline{\mu}_{\widetilde{M}_2^i}(\zeta_2(t)) \times \cdots \times \underline{\mu}_{\widetilde{M}_\psi^i}(\zeta_\psi(t)) \geq 0,$$

$$w_i^U(\zeta(t)) = \overline{\mu}_{\widetilde{M}_1^i}(\zeta_1(t)) \times \overline{\mu}_{\widetilde{M}_2^i}(\zeta_2(t)) \times \cdots \times \overline{\mu}_{\widetilde{M}_\psi^i}(\zeta_\psi(t)) \geq 0,$$

다음으로 $\underline{\mu}_{\widetilde{M}_\alpha^i}(\zeta(t))$ 와 $\overline{\mu}_{\widetilde{M}_\alpha^i}(\zeta(t))$ 는 i 번째 범칙에서 α 번째 전제변수의 하한과 상한 소속 함수로 각각 $\underline{\mu}_{\widetilde{M}_\alpha^i}(\zeta(t)) \in [0, 1]$ 과 $\overline{\mu}_{\widetilde{M}_\alpha^i}(\zeta(t)) \in [0, 1]$ 의 조건을 만족한다. 따라서 구간 2형 T-S 퍼지 모델은 다음과 같이 표기할 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \sum_{i=1}^r w_i(\zeta(t)) \{A_i x(t) + B_{1i} d(t) + B_{2i} u(t)\}, \\ z(t) &= \sum_{i=1}^r w_i(\zeta(t)) \{C_{1i} x(t) + D_{1i} d(t) + D_{2i} u(t)\}, \quad (2) \\ y(t) &= \sum_{i=1}^r w_i(\zeta(t)) C_{2i} x(t), \quad (1 \leq i \leq r), \end{aligned}$$

이때 $w_i(\zeta(t)) = w_i^L(\zeta(t)) \underline{v}_i(\zeta(t)) + w_i^U(\zeta(t)) \overline{v}_i(\zeta(t))$, $\sum_{i=1}^r w_i(\zeta(t)) = 1$, $w_i(\zeta(t)) \in [0, 1]$ 이며 $\underline{v}_i(\zeta(t))$ 과 $\overline{v}_i(\zeta(t))$ 는 소속 함수의 불확실성을 나타내는 미지의 비선형 함수로 모든 i 에 대해 다음을 만족한다. $\underline{v}_i(\zeta(t)) \in [0, 1]$, $\overline{v}_i(\zeta(t)) \in [0, 1]$, $\underline{v}_i(\zeta(t)) + \overline{v}_i(\zeta(t)) = 1$.

2.1 관측기 기반 구간 2형 T-S 퍼지 제어기 설계

관측기의 구간 2형 T-S 퍼지 규칙은 다음과 같다.

$$\text{Rule } i: \text{ IF } \zeta_1(t) \text{ is } \widetilde{M}_1^i \text{ and } \cdots \text{ and } \zeta_\psi(t) \text{ is } \widetilde{M}_\psi^i,$$

$$\begin{aligned} \text{THEN } \hat{x}(t) &= A_i \hat{x}(t) + B_{1i} d(t) + B_{2i} u(t) \\ &\quad + L_i (y(t) - \hat{y}(t)), \quad (3) \\ \hat{y}(t) &= C_{2i} \hat{x}(t), \quad (1 \leq i \leq r), \end{aligned}$$

여기서 $\hat{x}(t) \in R^n$ 는 관측된 시스템의 상태 벡터, $\hat{y}(t) \in R^h$ 는 관측된 출력 벡터, 그리고 $L_i \in R^{n \times h}$ 는 관측기의 이득 값이다. 식 (3)에 중심값-평균 비퍼지화, 곱셈 추론, 싱글톤 (singleton) 퍼지화를 적용하면 다음을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}(t) &= \sum_{i=1}^r w_i(\zeta(t)) (A_i \hat{x}(t) + B_{1i} d(t) + B_{2i} u(t) \\ &\quad + L_i (y(t) - \hat{y}(t))), \quad (4) \\ \hat{y}(t) &= \sum_{i=1}^r w_i(\zeta(t)) C_{2i} \hat{x}(t), \quad (1 \leq i \leq r), \end{aligned}$$

가정 [9]: 식 (2)와 (4)에서 전제 변수 $\zeta(t)$ 는 측정 가능한 상태 벡터, 출력 벡터 또는 측정 가능한 상태 벡터들의 선형 합으로 나타낸다.

다음으로 불완전한 전반부 기반 제어기의 T-S 퍼지 규칙은 다음과 같이 구성된다.

$$\begin{aligned} \text{Rule } j: \text{ IF } z_1(t) \text{ is } \widetilde{N}_1^j \text{ and } \cdots \text{ and } z_\psi(t) \text{ is } \widetilde{N}_\psi^j, \\ \text{THEN } u(t) &= K_j \hat{x}(t), \quad (1 \leq j \leq r), \end{aligned}$$

여기서 $K_j \in R^{m \times n}$ 는 제어기의 이득이다. 다음으로 구간 2형 T-S 퍼지 제어기의 상태 방정식은 아래와 같다.

$$u(t) = \sum_{j=1}^r m_j(z(t)) K_j \hat{x}(t), \quad (1 \leq j \leq r), \quad (5)$$

여기서 $m_j(z(t))$ 는 다음의 조건을 만족한다.

$$\begin{aligned} 0 \leq m_j(z(t)) \leq 1, \quad \sum_{j=1}^r m_j(z(t)) = 1, \\ m_j(z(t)) = \frac{\mu_{\widetilde{N}_1^j}(z_1(t)) \times \cdots \times \mu_{\widetilde{N}_\psi^j}(z_\psi(t))}{\sum_{k=1}^r (\mu_{\widetilde{N}_1^k}(z_1(t)) \times \cdots \times \mu_{\widetilde{N}_\psi^k}(z_\psi(t)))}. \end{aligned}$$

본 논문의 이어지는 내용에서는 표현의 간결함을 위해 전제 변수 표현 $\zeta(t)$ 과 시간에 대한 표현 t 를 생략하고, $w_i(\zeta(t)) = w_i$, $m_j(z(t)) = m_j$, $x(t) = x$ 으로 표현한다.

식 (2), (4), (5)를 바탕으로 관측기 기반 제어기의 상태 방정식은 다음과 같이 표현된다.

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r w_i m_j [A_i x + B_{2i} K_j \hat{x} + B_{1i} d], \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} = & \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^r w_i m_j w_k [(A_i + B_{2i} K_j) \hat{x} + B_{1i} d \\ & + L_i C_{2k} (x - \hat{x})]. \end{aligned} \quad (7)$$

한편, 관측된 시스템의 상태 벡터 \hat{x} 와 실제 시스템의 상태 벡터 x 와의 차이를 $e = x - \hat{x}$ 라고 정의하면 오차에 대한 상태 방정식은 다음과 같다.

$$\dot{e} = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^r w_i m_j w_k (A_i - L_i C_{2k}) e. \quad (8)$$

위의 결과를 바탕으로 시스템의 상태 벡터 x 와 오차 벡터 e 가 결합된 상태 방정식은 다음과 같이 구성된다.

$$\dot{\bar{x}} = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^r w_i m_j w_k \left\{ \begin{bmatrix} A_i + B_{2i} K_j & -B_{2i} K_j \\ 0 & A_i - L_i C_{2k} \end{bmatrix} \bar{x} + \begin{bmatrix} B_{1i} \\ 0 \end{bmatrix} d \right\}, \quad (9)$$

여기서 $\bar{x} = \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix}$ 는 결합 시스템의 상태 벡터이다.

결합 시스템의 상태 벡터 \bar{x} 와 제어가 된 출력 벡터 z 를 간단하게 표현하면 다음과 같이 구성된다.

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{x}} \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_u & B_u \\ C_u & D_u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x} \\ d \end{bmatrix}, \quad (10)$$

이때

$$A_u = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^r w_i m_j w_k \begin{bmatrix} A_i + B_{2i} K_j & -B_{2i} K_j \\ 0 & A_i - L_i C_{2k} \end{bmatrix},$$

$$B_u = \sum_{i=1}^r w_i \begin{bmatrix} B_{1i} \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$C_u = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r w_i m_j [C_{1i} + D_{2i} K_j \quad -D_{2i} K_j],$$

$$D_u = \sum_{i=1}^r w_i D_{1i} \text{이다.}$$

본 논문에서 해결하고자 하는 문제는 다음과 같다.

문제 1 : 외란을 포함하는 구간 2형 T-S 퍼지 시스템 (9)에 대하여 아래의 조건을 만족하는 외란에 강인한 제어기 (5)를 설계한다.

- (1) 외란 함수 $d(t) = 0$ 일 경우 폐 루프 구간 2형 T-S 퍼지 시스템 (9)의 평형점은 점근적으로 안정하다.
- (2) 초기조건이 0일 때, 폐 루프 구간 2형 T-S 퍼지 시스템 (9)은 다음의 조건을 만족한다.

$$\int_0^\infty z^T(t)z(t)dt < \gamma^2 \int_0^\infty d^T(t)d(t)dt, \quad (11)$$

여기서 γ 은 사전에 정의된 양의 스칼라 값이다.

3. 외란에 강인한 구간 2형 T-S 퍼지 시스템의 안정화 조건

본 장에서는 문제 1의 조건을 해결함으로써 관측기 기반 구간 2형 T-S 퍼지 제어기 설계를 수행한다. 문제 1을 해결하기 위한 방법으로 다음의 Lyapunov 함수를 고려한다 :

$$V(\bar{x}(t)) = \bar{x}^T(t)P\bar{x}(t), \quad (12)$$

여기서 P 는 두 개의 양한정 행렬 $P_1 \in R^{n \times n}, P_2 \in R^{n \times n}$ 로 이루어진 행렬로 $P = \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix} \in R^{2n \times 2n} > 0$ 의 조건을 만족한다.

다음 정리는 위의 Lyapunov 함수를 기반으로 문제 1에 대한 해를 제시한다.

정리 1 : 주어진 양의 스칼라 값 γ 에 대해, 아래의 부등식 조건을 만족하는 양한정 행렬 $P_1 > 0, P_2 > 0$, 대칭 행렬 $S_{ik} \in R^{n \times n}, A_{ij} \in R^{\Sigma \times \Sigma}, T_{jk} \in R^{\Sigma \times \Sigma}, W_{ijk} \in R^{\Sigma \times \Sigma}$, 그리고 행렬 $N_i \in R^{m \times n}, J_i \in R^{n \times q}$ 이 존재하면 구간 2형 T-S 퍼지 시스템 (9)은 문제 1의 외란에 강인한 설계 조건을 만족한다. ($\Sigma = 2n + l + q$)

$$P_1 > 0, \quad (13)$$

$$\Theta_{ijk} - A_{ij} < 0, \quad (1 \leq i, j, k \leq r), \quad (14)$$

$$\rho_k \Theta_{ijk} + (1 - \rho_k) A_{ij} - T_{jk} < 0, \quad (1 \leq i, j, k \leq r), \quad (15)$$

$$\rho_k \Theta_{iik} + (1 - \rho_k) A_{ii} - T_{ik} - W_{iik} < 0, \quad (1 \leq i < k \leq r), \quad (16)$$

$$\begin{aligned} & v_i (\rho_k \Theta_{ijk} + (1 - \rho_k) A_{ij} - T_{jk} - W_{ijk}) \\ & + v_j (\rho_k \Theta_{jik} + (1 - \rho_k) A_{ij} - T_{ik} - W_{jik}) < 0, \\ & (1 \leq i < j \leq r), (1 \leq k \leq r), \end{aligned} \quad (17)$$

$$T_{ik} + v_i W_{iik} < 0, \quad (1 \leq i < k \leq r), \quad (18)$$

$$\begin{aligned} & T_{jk} + v_i W_{ijk} + T_{ik} + v_j + W_{jik} < 0, \\ & (1 \leq i < j \leq r), (1 \leq k \leq r), \end{aligned} \quad (19)$$

$$P_2 > 0, \quad (20)$$

$$A_i^T P_2 - C_{2i}^T J_i^T + P_2 A_i - J_i C_{2i} < X_1^{-1} S_{ii} X_1^{-1}, (1 \leq i \leq r) \quad (21)$$

$$\begin{aligned} & A_i^T P_2 - C_{2k}^T J_i^T + P_2 A_i - J_i C_{2k} + A_k^T P_2 - C_{2i}^T J_k \\ & + P_2 A_j - C_{2i} J_k < X_1^{-1} S_{ik} X_1^{-1} + X_1^{-1} S_{ki} X_1^{-1}, \\ & (1 \leq i < k \leq r), \end{aligned} \quad (22)$$

이때 $X_1 = P_1^{-1}, K_i = N_i X_1^{-1}, L_i = P_2^{-1} J_i$ 이고 $\rho_i \in [0, 1], v_i \in [0, 1]$ 는 $w_i - \rho_i m_i \geq 0, w_i - v_i m_i \geq 0, (1 \leq i \leq r)$ 를 만족하도록 사전에 선택된 스칼라 값이며 대칭 행렬 Θ_{ijk} 는 아래와 같다.

$$\Theta_{ijk} = \begin{bmatrix} He\{X_1 A_i^T + N_j^T B_{2i}^T\} & * & * & * \\ -N_j^T B_{2i}^T & S_{ik} & * & * \\ B_{1i}^T & 0 & -\gamma^2 I & * \\ C_{1i} X_1 + D_{2i} N_j & -D_{2i} N_j & D_{1i} & -I \end{bmatrix}$$

증명 : 식 (9)을 이용하여 식 (12)의 Lyapunov 함수를 미분하면 다음과 같다.

$$\dot{V}(\bar{x}) = \dot{\bar{x}}^T P \bar{x} + \bar{x}^T P \dot{\bar{x}} = (A_u \bar{x} + B_u d)^T P \bar{x} + \bar{x}^T P (A_u \bar{x} + B_u d), \quad (23)$$

여기에 문제 1의 식(11)을 만족하기 위해 식 (23)에 $z^T z - \gamma^2 d^T d$ 을 더하면 다음 식을 얻는다.

$$\begin{aligned} \dot{V}(\bar{x}) + z^T z - \gamma^2 d^T d &= \dot{V}(\bar{x}) + (C_u \bar{x} + D_u d)^T (C_u \bar{x} + D_u d) - \gamma^2 d^T d \\ &= \bar{x}^T (A_u^T P + P A_u + C_u^T C_u) \bar{x} + \bar{x}^T (P B_u + C_u^T D_u) d \\ &\quad + d^T (B_u^T P + D_u^T C_u) \bar{x} - d^T (\gamma^2 I - D_u^T D_u) d \\ &= \begin{bmatrix} \bar{x} \\ d \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A_u^T P + P A_u + C_u^T C_u & P B_u + C_u^T D_u \\ B_u^T P + D_u^T C_u & -(\gamma^2 I - D_u^T D_u) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x} \\ d \end{bmatrix} < 0. \end{aligned}$$

위의 식 행렬부분에 Schur complement를 적용하면 다음과 같은 부등식을 얻을 수 있다.

$$\Omega_{ijk} = \begin{bmatrix} A_u^T P + P A_u & * & * \\ B_u^T P & -\gamma^2 I & * \\ C_u & D_u & -I \end{bmatrix} < 0, \quad (24)$$

식 (24)의 양변에 행렬 $P_m = \text{diag}\{P_1^{-1}, P_1^{-1}, I, I\}$ 를 이용한 Congruence transformation을 취하면 아래의 부등식 조건을 만족 한다:

$$\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^r w_i m_j w_k \zeta^T \Theta_{ijk} \zeta < 0, \quad (25)$$

$$\Theta_{ijk} = \begin{bmatrix} He\{X_1 A_i^T + N_j^T B_{2i}^T\} & * & * & * \\ -N_j^T B_{2i}^T & S_{ik} & * & * \\ B_{1i}^T & 0 & -\gamma^2 I & * \\ C_{1i} X_1 + D_{2i} N_j & -D_{2i} N_j & D_{1i} & -I \end{bmatrix}, \quad (26)$$

이때 S_{ik} , ($1 \leq i, k \leq r$)은 식 (25)의 선형 행렬 부등식을 해결하기 위한 대칭 행렬을 의미하며 $\zeta = \begin{bmatrix} \bar{x} \\ d \end{bmatrix}$ 를 만족한다.

불완전한 전반부 정합 하에서의 안정화 조건을 유도하기 위해 다음의 null terms를 도입한다.

$$\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^r w_i m_j \{m_k - w_k\} \zeta^T A_{ij} \zeta$$

$$= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r w_i m_j \left\{ \sum_{k=1}^r m_k - \sum_{k=1}^r w_k \right\} \zeta^T A_{ij} \zeta = 0, \quad (27)$$

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^r m_j m_k \{m_i - w_i\} \zeta^T T_{jk} \zeta \\ &= \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^r m_j m_k \left\{ \sum_{i=1}^r m_i - \sum_{i=1}^r w_i \right\} \zeta^T T_{jk} \zeta = 0, \end{aligned} \quad (28)$$

이때 A_{ij} 와 T_{jk} 는 임의의 대칭 행렬이다.

다음으로 아래와 같은 부등식 조건을 정리할 수 있다.

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^r w_i m_j w_k \zeta^T \Theta_{ijk} \zeta \\ &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^r w_i m_j \{w_k + \rho_k m_k - \rho_k m_k\} \zeta^T \Theta_{ijk} \zeta \\ &\quad + \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^r w_i m_j \{m_k - \rho_k m_k\} \zeta^T A_{ij} \zeta \\ &\quad - \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^r w_i m_j \{w_k - \rho_k m_k\} \zeta^T A_{ij} \zeta. \end{aligned} \quad (29)$$

식 (29)을 간소화하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^r w_i m_j w_k \zeta^T \Theta_{ijk} \zeta \\ &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^r w_i m_j m_k \zeta^T (\rho_k \Theta_{ijk} + (1 - \rho_k) A_{ij}) \zeta \\ &\quad + \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^r w_i m_j \{w_k - \rho_k m_k\} \zeta^T (\Theta_{ijk} - A_{ij}) \zeta. \end{aligned} \quad (30)$$

여기서 식 (14)와 조건 $w_i - \rho_i m_i \geq 0$ 을 고려하면 식 (30)은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^r w_i m_j w_k \zeta^T \Theta_{ijk} \zeta \\ &\leq \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^r w_i m_j m_k \zeta^T (\rho_k \Theta_{ijk} + (1 - \rho_k) A_{ij}) \zeta \\ &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^r w_i m_j m_k \zeta^T (\rho_k \Theta_{ijk} + (1 - \rho_k) A_{ij}) \zeta \\ &\quad + \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^r m_j m_k \{m_i - w_i + v_i m_i - v_i m_i\} \zeta^T T_{jk} \zeta \\ &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^r m_j m_k m_i \zeta^T v_i (\rho_k \Theta_{ijk} + (1 - \rho_k) A_{ij} - T_{jk} - W_{ijk}) \zeta \\ &\quad + \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r m_j m_k \{w_i - v_i m_i\} \zeta^T (\rho_k \Theta_{ijk} + (1 - \rho_k) A_{ij} - T_{jk}) \zeta \\ &\quad + \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^r m_j m_k m_i \zeta^T (T_{jk} + v_i W_{ijk}) \zeta. \end{aligned} \quad (31)$$

여기서 식 (15)와 조건 $w_i - v_i m_i \geq 0$ 을 고려하면 식 (31)은 아래와 같다.

$$\begin{aligned}
 & \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^r w_i m_j w_k \zeta^T \Theta_{ijk} \zeta \\
 & \leq \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^r m_j m_k m_i \zeta^T v_i (\rho_k \Theta_{ijk} + (1 - \rho_k) A_{ij} - T_{jk} - W_{ijk}) \zeta \\
 & \quad + \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^r m_j m_k m_i \zeta^T (T_{jk} + v_i W_{ijk}) \zeta \\
 & = \sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^r m_i m_k \zeta^T v_i (\rho_k \Theta_{iik} + (1 - \rho_k) A_{ii} - T_{ik} - W_{iik}) \zeta \\
 & \quad + \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^r m_i m_j m_k \\
 & \quad \times \zeta^T \{ v_i (\rho_k \Theta_{ijk} + (1 - \rho_k) A_{ij} - T_{jk} - W_{ijk}) \\
 & \quad + v_j (\rho_k \Theta_{jik} + (1 - \rho_k) A_{ji} - T_{ik} - W_{jik}) \} \zeta \\
 & \quad + \sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^r m_i m_k \zeta^T (T_{ik} + v_i W_{iik}) \zeta + \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^r m_i m_j m_k \zeta^T \\
 & \quad \times \{ (T_{jk} + v_i W_{ijk}) + (T_{ik} + v_j W_{jik}) \} \zeta. \tag{32}
 \end{aligned}$$

위의 부등식 (29)-(32) 조건을 만족하는 대칭행렬 S_{ik} 와 X_1 을 구할 수 있으면 다음의 부등식 조건으로 관측기의 이득 값 L_i 을 구할 수 있다.

$$\begin{aligned}
 & A_i^T P_2 - C_{2i}^T J_i^T + P_2 A_i - J_i C_{2i} < X_1^{-1} S_{ii} X_1^{-1}, \quad (1 \leq i \leq r) \\
 & A_i^T P_2 - C_{2k}^T J_i^T + P_2 A_i - J_i C_{2k} + A_k^T P_2 - C_{2i}^T J_k^T + P_2 A_k \\
 & - J_k C_{2i} < X_1^{-1} S_{ik} X_1^{-1} + X_1^{-1} S_{ki} X_1^{-1}, \quad (1 \leq i < k \leq r). \tag{33}
 \end{aligned}$$

위 내용을 바탕으로 불안정한 전반부 정합 하에서의 관측기 기반 구간 2형 T-S 퍼지 모델 (9)이 안정화되기 위한 충분조건을 만족하는 선형 행렬 부등식 (13)-(22)를 유도할 수 있다. ■

참고 1: 정리 1의 조건은 다음의 절차를 통해 수치적으로 해석할 수 있다.

- 1) 식 (2)를 통해 T-S 퍼지 시스템을 구성하고 상한, 하한 소속 함수를 선정한다.
- 2) 문제 1을 해결하기 위한 양의 스칼라 값 γ 을 정한다.
- 3) 선형 행렬 부등식 (13)-(19)를 통해 X_1 , S_{ik} 을 구하고 그 값을 바탕으로 선형 행렬 부등식 (20)-(21)을 풀어 P_2 , J_i 값을 구한다.
- 4) 제어기와 관측기의 이득 값 $K_i = N_i X_1^{-1}$, $L_i = P_2^{-1} J_i$ 를 구한 후, 관측기 기반 제어기 (7)를 설계한다.

4. 시뮬레이션 예제

본 논문에서 제안하는 방법은 다음의 역 진자 시스템 [6]을

통해 증명한다.

$$\ddot{x}_2 = \frac{g \sin(x_1) - am_p L x_2^2 \sin(2x_1)/2 - a \cos(x_1) u}{4L/3 - am_p \cos^2(x_1)} + d, \tag{34}$$

여기서 x_1 는 축으로부터 진자의 각도, x_2 는 진자의 각속도, d 는 외란 함수, $g=9.8m/s^2$, m_p 는 진자의 질량, M_c 는 수레의 질량, L 은 진자의 길이를 의미하며 아래의 조건을 만족한다.

$$\begin{aligned}
 x_1 & \in [x_{1\min} \ x_{1\max}] = \left[-\frac{5\pi}{12} \ \frac{5\pi}{12} \right], \\
 x_2 & \in [x_{2\min} \ x_{2\max}] = [-5 \ 5], \\
 m_p & \in [m_{p\min} \ m_{p\max}] = [2 \ 3] \text{kg}, \quad M_c \in [8 \ 12] \text{kg}, \\
 a & = 1/(m_p + M_c),
 \end{aligned}$$

구간 2형 T-S 퍼지 모델링 기법을 이용하면 식 (34)는 아래와 같이 소속 함수와 선형 부분 시스템의 선형 함으로 나타낼 수 있다.

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^4 w_i (A_i x + B_{1i} d + B_{2i} u),$$

$$\text{여기서 } x = [x_1 \ x_2]^T, \quad A_1 = A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ F_{1\min} & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_3 = A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ F_{1\max} & 0 \end{bmatrix}, \quad B_{21} = B_{23} = \begin{bmatrix} 0 \\ F_{2\min} \end{bmatrix},$$

$$B_{22} = B_{24} = \begin{bmatrix} 0 \\ F_{2\max} \end{bmatrix}, \quad B_{1i} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad D_{1i} = 0, \quad C_{1i} = [1 \ 0],$$

$$D_{2i} = 0.0005, \quad (1 \leq i \leq 4),$$

$$F_{1\min} = 10.0078, \quad F_{1\max} = 18.48, \quad F_{2\min} = -0.176,$$

$$F_{2\max} = -0.026,$$

$$F_1 = \frac{g - am_p L x_2^2 \cos(x_1)}{4L/3 - am_p L \cos^2(x_1)} \left(\frac{\sin(x_1)}{x_1} \right),$$

$$F_2 = \frac{-a \cos(x_1)}{4L/3 - am_p L \cos^2(x_1)}.$$

여기서 파라미터 m_p 와 M_c 는 일정 구간 내에서 불확실성을 가지므로 시스템의 소속 함수는 하한, 상한 소속 함수로 나타 낼 수 있다.

시스템의 소속 함수	
하한 소속 함수	상한 소속 함수
$\underline{\mu}_{M_i^t} = \underline{\mu}_{M_i^t} = \frac{-F_1 + F_{1\max}}{F_{1\max} - F_{1\min}};$	$\bar{\mu}_{M_i^t} = \bar{\mu}_{M_i^t} = \frac{F_1 - F_{1\min}}{F_{1\max} - F_{1\min}};$
$\underline{\mu}_{M_i^s} = \underline{\mu}_{M_i^s} = \frac{F_1 - F_{1\min}}{F_{1\max} - F_{1\min}},$	$\bar{\mu}_{M_i^s} = \bar{\mu}_{M_i^s} = \frac{-F_1 + F_{1\max}}{F_{1\max} - F_{1\min}},$
$x_2 = 0, m_p = m_{p\max},$	$x_2 = x_{2\max}, m_p = m_{p\min},$
$M_c = M_{c\min},$	$M_c = M_{c\max},$

$$w_i^L = \frac{\underline{\mu}_{M_1} \times \underline{\mu}_{M_2}}{\sum_{l=1}^4 (\underline{\mu}_{M_1} \times \underline{\mu}_{M_2})}, w_i^U = \frac{\bar{\mu}_{M_1} \times \bar{\mu}_{M_2}}{\sum_{l=1}^4 (\bar{\mu}_{M_1} \times \bar{\mu}_{M_2})}$$

다음으로 제어기의 소속 함수는 아래와 같다.

$$m_1 = 0.2e^{-\frac{x_1^2}{0.5}}, m_2 = 0.7 - 0.5e^{-\frac{x_1^2}{0.5}},$$

$$m_3 = 0.2e^{-\frac{x_1^2}{1.5}}, m_4 = 0.3 - 0.5e^{-\frac{x_1^2}{1.5}}.$$

정리 1에서 제시한 조건 $w_i - \rho_i m_i > 0$, $w_i - v_i m_i > 0$ 을 만족시키기 위해 $\rho_1 = 0.5$, $\rho_2 = 0.1$, $\rho_3 = 0.2$, $\rho_4 = 0.3$, $v_1 = 0.5$, $v_2 = 0.125$, $v_3 = 0.5$, $v_4 = 0.4$ 으로 설정한다. 성능 지표인 $\gamma = 1.5$ 일 때, 정리 1을 통해 다음의 이득 행렬을 얻을 수 있다.

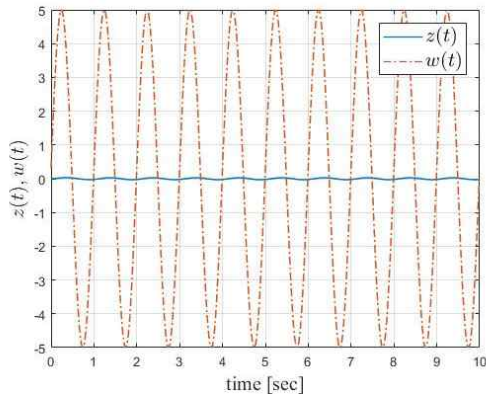
$$K_1 = [1896.9 \ 446.8], K_2 = [3393.1 \ 802.9],$$

$$K_3 = [1753 \ 410.6], K_4 = [3383 \ 796.4],$$

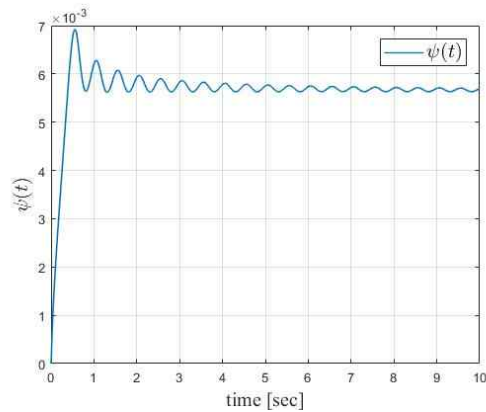
$$L_1 = 1.0120 \ 11.6512]^T, L_2 = [0.8918 \ 11.3750]^T,$$

$$L_3 = [0.9334 \ 19.8630]^T, L_4 = [1.0883 \ 19.9055]^T.$$

그림 1은 외란 함수 $d(t) = 5\sin(2\pi t)$ 이고 시스템의 초기값이 $x(0) = [0 \ 0]$ 일 때의 $w(t)$, $z(t)$, 그리고 외란 감쇠비율 $\psi(t)$ 의 궤적을 보여준다. 시뮬레이션 결과 $\psi(\infty) = 0.0058$ 이며 이는 설정치인 $\gamma = 1.5$ 보다 작음을 확인할 수 있다. 그림 2에서는 실제 시스템의 초기 값이 $x(0) = [0.5 \ 0.2]$ 인 조건에서 상태 변수 $x(t)$ 와 추종하는 값 $\hat{x}(t)$ 의 초기 값이 $\hat{x}(0) = [0, 0]$ 일 때 상태 변수의 궤적을 나타낸다. 그림 2를 통해 최종적으로 상태 변수의 오차가 0으로 수렴하는 것을 확인할 수 있다. 따라서 본 논문에서 제안한 외란에 강인한 안정화 조건을 만족하며 동시에 효과적으로 상태를 추정하는 것을 볼 수 있다.

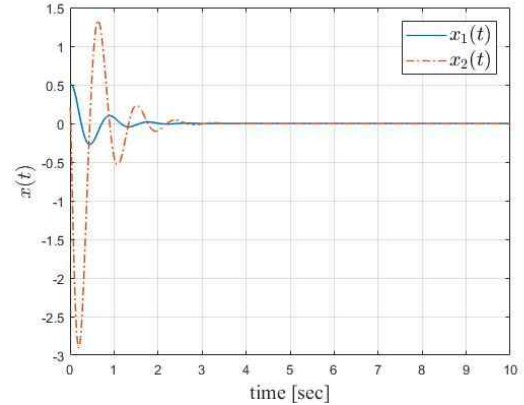


(a)

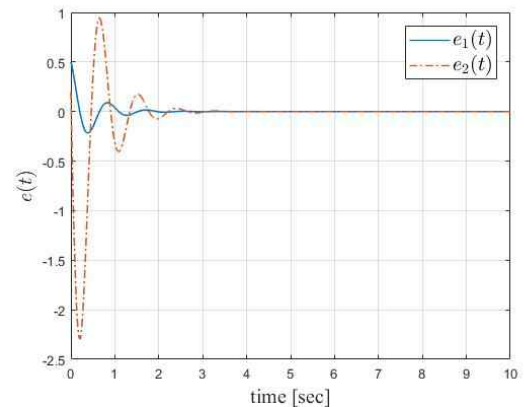


(b)

그림 1 (a) $z(t)$ 와 $w(t)$ 의 궤적 (b) 시간에 따른 외란 감쇠 비율
Fig. 1 (a) Trajectories of $z(t)$ and $w(t)$, (b) the energy of the ratio of $z^T(t)z(t)$ to $w^T(t)w(t)$



(a)



(b)

그림 2. (a) 상태변수 $x_1(t)$ 와 $x_2(t)$ 의 궤적 (b) 오차 상태변수 $e_1(t)$, $e_2(t)$ 의 궤적

Fig. 2 (a) Trajectories of $x_1(t)$ and $x_2(t)$, (b) trajectories of $e_1(t)$ and $e_2(t)$

5. 결 론

본 논문에서는 불완전한 전반부 정합 하에서의 관측기 기반 구간 2형 T-S 퍼지 시스템의 H_∞ 퍼지 제어기 설계에 대해 다루었다. Lyapunov 함수를 이용한 안정화 조건과 외란에 강인한 H_∞ 제어 성능 조건을 고려하여 구간 2형 T-S 퍼지 시스템의 안정화 조건을 유도 하였다. 설계된 관측기 기반 제어기는 안정화 되지 않은 구간 2형 T-S 퍼지 시스템에 대해 시스템의 상태를 효과적으로 추종할 수 있으며 H_∞ 제어 성능 조건을 만족하였다. 슬랙 행렬을 포함하여 유도된 안정화 조건은 선형 행렬 부등식으로 표현됐으며 마지막으로, 제어기의 효용성을 시뮬레이션 예제를 통해 검증하였다.

감사의 글

이 논문은 연세대학교 바른ICT연구소의 지원을 받아 수행된 연구 결과입니다.

References

[1] T. Takagi and M. Sugeno, "Fuzzy Identification of Systems and Its Applications to Modeling and Control," IEEE Trans, Sys, Man, and Cybern., vol. SMC-15, no. 1, pp. 116-132, Jan, 1985.

[2] K. Tanaka and H. O. Wang, "Fuzzy Control Systems Design and Analysis: A Linear Matrix Inequality Approach," New York: Wiley, 2001.

[3] X. J. Ma and Z. Q. Sun, "Analysis and Design of Fuzzy Controller and Fuzzy Observer," IEEE Trans, Fuzzy Syst., vol. 6, no. 1, Feb 1998.

[4] S. Coupland and R. John, "Geometric type-1 and type-2 fuzzy logic systems," IEEE Trans, Fuzzy Syst., vol. 15, no. 1, pp. 3-15, Feb 2007.

[5] J. M. Mendal, R. I. John, and F. Liu, "Interval type-2 fuzzy logic systems made simple," IEEE Trans. Fuzzy Syst., vol. 14, no. 6, pp. 808-821, Dec 2006.

[6] H. K. Lam and L. D. Seneviratne, "Stability Analysis of Interval Type-2 Fuzzy-Model-Based Control Systems," IEEE Trans, Sys, Man, and Cybern., vol. 38, no. 3, pp. 123-123, 2008.

[7] H. J. Lee, J. B. Park, and G. Chen, "Robust Fuzzy Control of Nonlinear Systems with Parametric Uncertainties," IEEE Trans, Fuzzy Syst., vol. 9, no. 2, Apr 2001.

[8] K. R. Lee, E. T. Jeung, and H. B. Park, "Robust fuzzy H_∞ control for uncertain nonlinear systems via state feedback: an LMI approach," Fuzzy Sets and Systems, vol.

120, pp. 123-134, 2001.

[9] C. Tseng, B. Chen, and H. J. Uang "Fuzzy Tracking Control Design for Nonlinear Dynamic Systems via T-S Fuzzy Model," IEEE Trans, Fuzzy Syst., vol. 9, no. 3, June 2001.

[10] J. J. E. Slotine and W. Li "Applied Nonlinear Control," Prentice-Hall International Editions.

[11] L. Xiaodong and Z. Qingling, "New approaches to H_∞ controller designs based on fuzzy observers for T-S fuzzy systems via LMI," Automatica 39, 1571-1582, 2003.

[12] H. K. Lam and M. Narimani, "Stability Analysis and Performance Design for Fuzzy-Model-Based Control Under Imperfect Premise Matching," IEEE Trans, Fuzzy Syst., vol. 17, no. 4, Aug 2009.

[13] H. J. Kim, J. B. Park, Y. H. Joo, " H_∞ fuzzy filter for non-linear sampled-data systems under imperfect premise matching," IET Control Theory Appl., vol. 11, no. 5, pp. 747-755, 2017.

저 자 소 개



황 성 환 (Soungwan Hwang)

2017년 : 광운대학교 로봇학부 졸업
 2017~현재 : 연세대학교 전기전자공학과 석사과정
 관심분야 : Nonlinear and fuzzy control
 E-mail : hshwan2k@naver.com



박 진 배 (Jin Bae Park)

1977년 : 연세대학교 전기공학과 졸업.
 1985~1990년 : Kansas State University 전기 및 컴퓨터 공학과 졸업 (공학박사)
 1990~1991년: Kansas State University 전기 및 컴퓨터 공학과 조교수
 2006~2010년 : Int. Journal of Control, Robot, and Systems Editor-in-Chief
 2013년 : 제어로봇시스템학회 회장
 2014~2016년 : 연세대학교 부총장
 1992~현재 : 연세대학교 전기전자공학과 교수
 관심분야 : Nonlinear control, Drone, Fuzzy logic control, Neural networks, Robotics, 3D map, Intelligent control
 E-mail : jbpark@yonsei.ac.kr



주 영 훈 (Young Hoon Joo)

1982년, 1984년, 1995년 : 연세대학교 전기 공학과 졸업 (공학사, 공학석사, 공학박사).
1986~1995년 : 삼성전자(주) 생산기술센터 팀장. 1995~현재 : 군산대학교 제어로봇공학과 교수. 2009년 : 한국지능시스템학회 회장

2013~2014년 : 대한전기학회 부회장

2016~현재 : 대한전기학회 부회장

2016~현재 : 제어로봇시스템학회 부회장

관심 분야 : Intelligent robot, Robot vision, Intelligent control, Wind-farm control, Human-robot interaction, Intelligent surveillance systems

E-mail : yhjoo@kunsan.ac.kr