

시각적 이미지 안에서 삼각형 높이의 개념 이미지에 대한 인지적 처리과정과 인지적 부하

이 미 진 (한국교원대학교 대학원)

이 광 호 (한국교원대학교)[†]

삼각형 높이를 찾는 과정에서 눈 움직임 데이터를 통해 학생들의 삼각형 높이에 대한 이해와 그에 대한 삼각형 유형별, 배치별 인지부하 알아보고자 하였다. 6학년 26명 학생들을 대상으로 콘텐츠를 활용한 수업을 진행하고, 사전 사후검사를 실시하였다. 그 결과 삼각형 높이에 대한 삼각형 유형별, 배치별 문항에서 사전 검사에 대해 사후검사에서 정답률이 크게 상승하였으며, 아울러 각 문항별 AOI(Area of Interest)에서 시선 데이터의 빈도(FC)와 머무름(FD)이 사후검사에서 더 적게 나타났다. 주관적 인지부하는 밑변이 지면에 평행한 삼각형 보다는 회전된 삼각형 배치에서 더 높게 나타났으며, 시선 추적 데이터에서는 직각삼각형과 예각삼각형의 회전 배치된 쪽에서 더 많은 빈도와 더 많은 머무름이 감지되었다. 이를 통해 시선추적 기술은 교수설계의 피드백을 위한 학생들의 인지적 부하의 객관적인 측정을 제공할 수 있음을 알 수 있었다.

I. 서론

삼각형은 다각형을 그릴 수 있는 최소 단위로 기하 학습에 있어 매우 중요한 개념이다. 특히 다각형은 모두 삼각형으로 분할 가능하여 다각형의 넓이를 구하기 위해서는 삼각형의 넓이를 구하는 것이 필수적이다. 그런데 삼각형의 세 변은 직선으로 명시되어 있어 세 변의 길이를 아는 것은 어렵지 않으나, 삼각형의 넓이를 계산하기 위한 필수 요소인 높이는 명시적으로 표시되어 있지 않아서 높이를 파악하는데 학생들은 많은 오류를 보인다(임승현, 박영희 2011). 물론, 초등학교 교과서에는 높이에 대한 정의가 명시적으로 되어 있다.

또한 초등학교 교과서에서는 수학 개념을 정의할 때 연역적으로 정의하기 보다는 외연적 방법이나 동의적 방법을 사용하여 논리적으로는 불완전하지만 학생들에게 친숙하고 이해하기 쉬운 용어를 사용하여 정의하여 학생들의 이해를 돕는다(권유미, 안병곤 2005). 그럼에도 불구하고 학생들이 삼각형의 높이에 대한 오류를 범하는 이유는 그들이 생각하는 개념이미지와 공식적으로 주어지는 개념정의가 서로 다르기 때문이며 이 둘을 적절하게 관련짓지 못하고 별개라고 생각하기 때문이다(Wilson, 1988, 1990). 또한 Vinner의 모델에 비추어 보면 전형적인 형태의 도형 예시들을 기반으로 개념 이미지를 한정하기 때문이기도 하다. 이를 극복하기 위해 Gutierrez & Jaime(1999)는 전형적인 예시를 기초로 하여 다양한 예시들을 통해 수학적 속성을 더함으로 보다 완벽한 개념 이미지를 형성하여 개념 정의와 상호보완적인 역할을 할 수 있도록 하여야 한다고 하였다.

임승현, 박영희(2011)는 학생들이 도형의 높이 이해에 대해 가장 긴 변, 밑변과 수평 또는 수직하지 않은 변, 가장 낮은 곳에서 가장 높은 곳까지의 거리, 대각선, 내부에 높이 설정 등의 오류를 범하고 있었으며, 개념 정의를 명확하게 이해하지 못하고 있다고 하였다. 이광호, 이현주, 이주영, 송윤오(2014)의 충청지역 433명 초등학교 5학년을 대상으로 한 연구에서, 삼각형의 높이에 대한 오류 유형은, 꼭짓점에서 밑변에 높이를 그리려고 하였으나 수선으로 그리지 않은 경우, 꼭짓점이 아닌 점에서 높이를 그린 경우, 밑변이 아닌 다른 변에 대해 높이를 그린 경우, 높이가 아닌 도형의 다른 한 변을 높이로 본 경우, 높이를 선분이 아닌 직선 형태로 그린 경우가 있다고 하였으며, 이러한 오류는 밑변이 사선으로 제시된 경우나 짧은 변을 밑변으로 제시한 경우에서 많이 나타났다. Gutierrez와

* 접수일(2017년 10월 17일), 심사(수정)일(2017년 10월 30일), 게재확정일(2017년 10월 30일)

* ZDM분류 : C33

* MSC2000분류 : 97D70

* 주제어 : 인지부하, 눈 움직임, 높이 개념, 배치

† 교신저자 : paransol@knue.ac.kr

Jaime(1999)는 예비 초등 교사들의 삼각형의 높이에 대한 오류 분석에서, 높이와 중선을 혼합한 높이 개념 오류, 수직 이등분에 의해 영향을 받은 부분적인 개념 이미지 오류, 외부의 높이를 제외한 불완전한 개념 이미지 오류, 높이의 길이를 고려하지 않는 불완전한 이미지를 반영한 오류, 삼각형의 한 변에 대한 집착을 반영한 오류 등을 보고하였다.

이러한 삼각형의 오류 유형들을 살펴보면, 삼각형 높이에 대한 수학적 속성들의 연결 짓기, 맥락 속에서 관련짓기가 제대로 되어 있지 않음을 알 수 있다. 이에 본 연구에서는 삼각형 높이에 대한 시각적 이미지 안에서 개념 이미지와 개념 정의를, 수학적 속성들과 맥락 속에서 이해하고 관련지음으로써 확고히 할 수 있는지 또, 눈 움직임 데이터로 이러한 분석이 가능한지 알아보려고 하였다.

Mayer(2010)는 눈 움직임 방법론이 특정 교수 설계에 대하여 어떻게 학습에 영향을 주는지를 이해하는데 기여할 수 있다고 하였다. 기하문제 풀이에서의 시선 추적을 통한 인지적 처리과정의 차이와 인지적 부하와의 연관성(Lin & Lin, 2013), 기하문제 풀이 동안의 눈 움직임(scanpath)과 말로 하는 프로토콜(도형에서 관련된 요소들의 언급) 등을 통한 연구와 인지적 처리과정을 시 작업 기억 크기 측정에 이용(Epelboim & Suppes, 2001)한 연구 등을 기반으로, 본 연구에서는 삼각형의 높이를 찾는 문제에서 눈 움직임을 분석해 보았다.

6학년 학생들의 삼각형 높이에 대한 눈 움직임 데이터를 분석하여 오개념과 삼각형 유형별 배치에 대한 인지적 부하를 알아보려고 하였다. 이를 해결하기 위한 4개의 콘텐츠를 활용한 학습을 통해, 삼각형 높이의 정의(꼭짓점에서 밑변에 수직으로 그은 선분)와 같이, 꼭짓점과 밑변과의 연관성, 밑변의 연장선 등과 같은, 삼각형 구성 요소와의 맥락적 이해로 개념 이미지와 개념 정의를 확고히 할 수 있는지 그리고 인지적 부하가 해소되는지를 검토하였다. 삼각형의 높이를 꼭짓점, 밑변, 수직, 최단 거리라는 요소들과의 종합적인 맥락에서 삼각형의 높이 개념을 지도할 수 있는 교수 설계에서의 시사점을 얻고자 하였다. 이를 위해 연구문제는 다음과 같이 설정하였다.

1. 눈 움직임 데이터를 통해 볼 때, 삼각형의 높이에 대한 학생들의 정답 및 오류 유형에 따른 차이를

보이는가?

2. 삼각형 높이에 대한 주관적 인지 부하와 시선추적 데이터는 관련성을 보이는가?

3. 수업에 투입된 삼각형 높이에 대한 콘텐츠들은 학생들에게 높이 개념 형성을 도우며, 인지적 부하를 해소하는가?

II. 이론적 배경

1. 인지부하

인지부하 이론은 과업이 수행될 때 인간의 인지적 시스템의 과부하를 설명하기 위해서 널리 사용되어 왔다(Sweller & Chandler, 1991). 최근 10년 동안에 그 이론은 교수적인 결과를 향상시키려는 연구자들에게 분석틀로써 널리 적용되어 왔다(Paas, Renkl & Sweller, 2003). 사람의 인지 시스템의 인지적 자원, 주의집중 또는 작업 기억은 제한적이라 한다. 그러므로 복잡한 과업은 보다 간단한 과업보다는 복잡한 시스템에서 보다 무거운 부하를 일으킨다.

인지부하는 세 가지 요소로 구성된다(Paas, Tuovinen, Tabbers & Van Gerven, 2003). 첫째, 내부적 인지부하는 주로 동시에 일어나는 많은 요소들에 의해 그리고 이러한 요소들 사이의 상호관련성에 의해 야기 된다(Sweller, Ayres & Kalyuga, 2011). 둘째, 외부적(extraneous) 인지부하는 불필요한 교수적 설계의 결과이다. 이러한 설계는 무관하지 않은 자료들의 설계들이 학습자에게 보다 높은 외부적 인지부하를 부과한다(Park, Moreno, Seufert & Brunken, 2010). 마지막 인지부하 형태인 본유적 인지부하는 학습자의 과업에 해당하는 스키마를 이전의 스키마와 통합하거나 습득할 때의 인지적 시스템의 부하로 정의된다(Holm et al. 2009; Paas & van Merriënboer, 2006). 3가지 부하 모두, 인지적 자원을 고갈시키는데도 불구하고 그것들은 학습에 뚜렷한 영향을 준다. 예를 들면, 내부와 외부적 인지부하는 학습을 방해하는 경향이 있다. 반면에 밀접한 관련이 있는 본유적 인지부하는 학습을 용이하게 한다(Plass, Moreno & Brünken, 2010)

2. 인지적 부하의 측정 방법

과업을 수행할 때의 인지적 부하를 평가하는데 주관적 측정과 객관적 측정의 두 가지 접근 방식이 쓰인다(Paas et al. 2003b). 주관적 측정에서는 학습자가 과업을 수행함으로써 받았던 인지부하를 스스로 점검하는 설문지 형식으로 기록하도록 한다. 예를 들면 미항공우주국-Task Load Index(NASA-TLX)는 과업을 수행하는데 정신적 작업량을 함께 표현하는데 6개의 하부항목(정신적 차원, 신체적 차원, 시간적 차원, 불만, 노력 그리고 수행)으로 구성하였다(Hart & Staveland, 1988). 반대로 Paas(1992)는 과업을 완성하기 위해 투입되는 인내하는 노력의 양을 측정하기 위해 각 문항의 항목에 9 수준의 Likert 척도를 설계했다.

반면에 객관적인 척도는 자주 인지적 부하의 생리적인 다양성에서의 변화를 발견하기 위하여 생리적 기술을 사용한다. 이러한 방식들은 심장활동(e.g. 심박수에서의 변화), 눈 활동(e.g. ratio of pupillary dilations), 뇌 활동(e.g. EEG뇌파검사)(Holm et al., 2009)을 포함한다. 연구자들은, 참가자가 과업을 수행하는 동안의 양적 데이터를 수집하기 위하여 특별한 기구를 사용한다. 그래서 추정되는 '실시간' 인지적 부하의 수준을 받아들인다. 객관적인 측정 페러다임은 정밀하고 자연발생적인 인지부하 측정 방식이다. 시선추적 방법론이 그래픽으로 학습하는 동안의 자각적 과정의 이해를 얻는데 유익하다고 Mayer(2010)는 제안하였으며, 더욱이 시선추적은 시선 움직임이 고정되는 위치와 시간적 진행 과정을 알 수 있게 한다(Rayner, 1998). 그러므로 시선추적은 무엇에 주의집중 하는지 순서와 절차 뿐 아니라 어떻게 주의 집중이 진행되는지를 이해하는 것을 도울 수 있다.(Mayer, 2010).

3. 기하 추론에서의 시선추적

시선추적 방법론은, 그래픽 기반 문제 풀이에서의 인지적 과정의 연구 - 개념 인지 (Groner & Groner, 1982), series problems(Groner & Groner, 1983), 공간 능력 테스트 안에서 정신적 회전 과업(Just & Carpenter, 1985), 복잡한 그래프의 이해 (Köörner, 2011), 기계적 체계 문제(Hegarty & Just, 1993), 산술적 과업(Hegarty, Mayer, & Monk, 1995), 기하적 추론 과업 (Epelboim & Suppes, 2001), 직관(통찰) 문제 Grant & Spivey, 2003; Knoblich, Ohlsson, & Raney,

2001) - 에 사용되었다. 눈 움직임 분석은 문제 풀이자의 내적인 인지 과정을 알아낼 수 있다(Knoblich, Ohlsson, & Raney, 2001; van Gog, Paas, van Merriënboer, & Witte, 2005;). 즉시적 가설과 눈-마음 이론에 기초하여(Just & Carpenter, 1985) 시선추적 방식은 그래픽 기반 문제를 풀 때, 사람의 인지적 과정을 관찰하는 방법을 연구자에게 제공 한다.

Epelboim, J. & Suppes, P. (2001)는 안구운동 기하추론 엔진(OGRE)을 통해 기하문제를 풀고 있는 동안의 눈 움직임과 시 작동 기억의 모델을 만들 것을 제안하고 기하에서 사용하는 시 작동 기억의 크기를 추산하는데 사용하였다.

Lin & Lin(2013)은 기하문제를 푸는 동안의 인지적 부하를 눈 움직임으로 보여 줄 수 있는지를 연구하였고 2014년에는 눈 움직임 데이터를 통해, 성공적 문제 풀이자와 실패한 문제 풀이자의 눈 움직임에서의 차이와 어려움을 자각하는 것과 연관되어 있음을 밝혔다. 더욱이, 시선추적 기술은 교수설계를 위한 학생들의 인지적 부하의 객관적인 측정을 제공할 수 있다고 하였다.

이에 본 연구는, 삼각형에 대한 초등학교 학생들의 개념정의와 개념 이미지가 어떻게 형성되어 있으며 어떤 부분에서 인지부하가 나타나는지 눈 움직임 데이터를 통해 알아보고, 네 개의 콘텐츠를 통한 학습 후에 이러한 인지적 부하가 줄어들고 삼각형 요소들 간의 연결을 공고히 하여 개념이미지를 확고히 하는지 알아 보았다.

III. 연구방법 및 절차

1. 연구 대상

소도시의 초등학교 6학년 2학년, 26명(남 9명, 여 17명)의 학부모와 학생의 동의를 받아 연구를 진행하였다. 시기는 2016년 5월 23일~27일 일주일 동안 동형의 사전, 사후검사를 진행 하였고 그 사이 콘텐츠를 이용한 수업을 진행하였다. 이시기의 학생들은 1년 전에 2009개정교육과정으로 5학년 1학기에 다각형의 넓이 단원에서 삼각형의 높이 개념을 배운 상태였다. 피험자들은 실험결과가 드러나지 않도록 학년-반-순서

(예, st6-2-5)로 코딩하였다.

2. 연구 절차

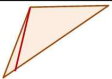
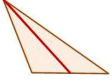

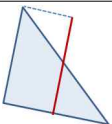
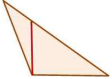
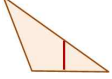
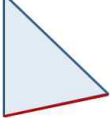
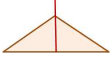
시선추적기를 이용하여 삼각형 높이에 대한 개념 및 개념 간 연결성에 대한 사전 검사를 실시하였다. 사전 검사 후 6학년 한 개 반에 대하여 네 개의 콘텐츠를 활용한 수업을 1차시 진행하였다. 이후 동형인

검사를 시선추적기를 이용하여 사전검사와 사후검사로 진행하였다. 사전과 사후 검사에서 발생한 시선추적기를 통한 데이터, 면담, 설문지(난이도) 등을 데이터로 하여 이들을 분석 하였다.

3. 투입과제 및 분석

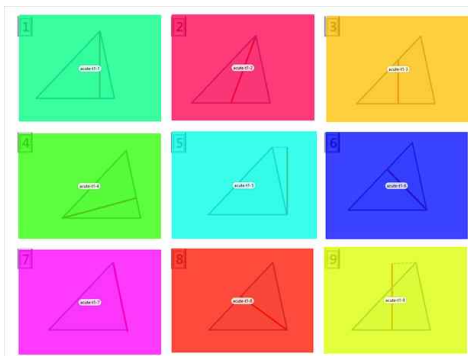
제시된 과제는 총 9개의 문제 화면으로 구성하였다.

[표 1] 삼각형의 높이에 대한 오류 유형별 분류 코드
 [Table 1] Coding about the error types of triangle altitude

코드 분류	오류 유형 설명		오류 예
	이광호,이현주,이주영,송윤오(1014)의 오류 유형	Gutiérrez, A., & Jaime, A(1999)의 오류 유형	
A1	꼭짓점에서 밑변에 높이를 그리려 했으나 수선으로 그리지 못한 유형		
A2	꼭짓점에서 밑변의 중점에 그린 유형	높이와 중선 개념 사이의 혼란을 반영한 응답	
B1	꼭짓점을 지나는 연장선을 그려 꼭짓점이 아닌 연장선의 한 점에서 높이를 그린 유형		
B2		수직이등분선의 개념에 의해 영향을 받은 부분적인 개념 이미지를 반영한 응답	
B3	밑변의 한 꼭짓점으로 부터 높이를 수선으로 그어 평면도형의 내부에 높이를 그린 유형		
B4	꼭짓점이 아닌 밑변의 한 점에서 부터 높이를 수선으로 그어 평면도형의 내부에 높이를 그린 유형		
C	높이가 아닌 도형의 다른 한 변을 높이로 생각한 유형	삼각형의 한 변에 대한 집착을 반영한 응답	
D	밑변에 수직이면서 꼭짓점을 지나는 직선 형태로 그린 유형	높이의 길이를 고려하지 않은 불완전한 이미지를 반영하고 있는 응답	

삼각형 높이에 대한 개념을 묻는 문제로, 하나의 삼각형 안에서 높이는 몇 개인지(task 1) 그리고 어떻게 그릴 수 있는지를 말로 설명하는 문제(task 2)였다. 다음은 삼각형 종류별(예각삼각형, 직각삼각형, 둔각삼각형)로 똑같은 9개의 삼각형 중에서 높이가 바르게 표시된 삼각형을 고르는 문제였다(task 3~9). 한 종류의 같은 삼각형을 한 화면에서는 똑바로 세워서(밑변이 지면에 평행) 제시하고(task 3, 5, 7) 다음 화면에서는 똑 같은 삼각형을 회전해서 배치하였다(task 4, 6, 8, 밑변을 아래쪽에 있는 변으로 생각하여 범하는 오류, 이광호, 이현주, 이주영, 송윤오, 2014에 의거). 이어지는 마지막 문제(task9)는 가장 보편화된 삼각형의 높이에 대한 예시(예각삼각형 내부에 표현된 높이)와 삼각형의 높이 개념을 관련지을 수 있는지를 알아보기 위해 다양한 종류의 다른 삼각형을 회전하여 다양한 방향으로 제시하여 높이를 표시하였다.

분석을 위하여 삼각형의 높이에 대한 오류 유형에 따라 Gutiérrez, A., & Jaime, A(1999)의 오류 유형과 우리나라 학생들을 대상으로 한 이광호, 이현주, 이주영, 송윤오(2014)가 분류한 오류 유형을 적절히 배치하여 [표 1]과 같이 코딩 하였다.



[그림 1] 각 문항별 AOI(Area of Interest)할당
[Fig. 1] AOI of each task

삼각형 종류별, 배치별로 인지적 부하정도가 어떻게 되는지 알아보기 위해 AOI를 [그림 1]과 같이 설정하고 이를 분석하였다. 각 영역에 해당하는 삼각형 문항별로 FC(fixation count)와 FD(fixation duration)를 조사하고 분석하였다.

4. 수업

삼각형 높이에 대한 개념 오류를 수정하기 위하여 콘텐츠를 활용하여 삼각형 높이에 대한 개념 이미지와 개념 정의를 연결 짓고자 하였다. 총 4개의 콘텐츠를 활용하여 수업을 실시하였다.

활동1(<http://illuminations.nctm.org/Activity.aspx?id=3567>)은 가장 일반적인 예로 제시되는 지면에 평행한 밑변을 가진, 예각삼각형 높이에서 출발하여 꼭짓점을 옮겨가며 직각삼각형, 둔각삼각형으로 변하면서 높이가 어떻게 변화하는지를 살펴보았다.

활동2(<http://www.mathwarehouse.com/dictionary/A-words/altitude-of-triangle-applet.php>)는 밑변을 각각 지정하면서 높이가 어떻게 달라지는지를 확인하여, 높이가 3개가 될 수 있음을 알아가는 활동이었다.

활동3(<http://www.mathopenref.com/common/appletframe.html?applet=triangle&wid=600&ht=300>)은 앞선 활동들을 통해서 가장 일반적인 직각이 표시된 삼각형 높이의 예에서 정의를 다시 살펴보고, 해석하고 자신들의 말로 재작성하는 활동이었다.

활동4(<http://www.mathsisfun.com/definitions/altitude-geometry-.html>)는 각각의 꼭짓점에서 동시에 수직으로 내려오는 높이를 3개를 살펴보고 꼭짓점을 움직여가면서 다른 종류의 삼각형들을 만들고 높이가 어떻게 달라지는지 탐색하는 활동이었다.

IV. 연구결과

1. 삼각형의 높이의 개수

범례로써 가장 보편적인, 밑변이 지면에 평행하도록 똑바로 세워진, 예각 삼각형을 제시하고, 그 삼각형의 높이가 몇 개인지에 대한 질문에 사전검사에서는 9명의 학생만이 삼각형의 높이가 3개라고 하였으나, 사후 검사에서는 삼각형의 높이가 3개라고 말하는 학생이 [표 2]에서와 같이 18명으로 크게 늘어났다. 이미 삼각형의 높이의 개념 및 정의를 학습 하였음에도 불구하고 사전검사에서 1개라는 답변이 7명이나 되었으며, 무응답도 8명이나 되어 상당수가 삼각형 높이에 대한 이해가 완성되지 못하였거나 오개념을 가지고 있었던

것으로 생각된다. 그러나 사후검사에서 정답률이 상승한 것은, 각 꼭짓점에서 각 밑변에 수선을 그어 3개의 높이를 동시에 보여주는 콘텐츠들을 이용한 학습으로, 이를 직관적으로 이해한 것으로 보인다.

[표 2] 삼각형 높이 개수를 묻는 문항의 응답수
[Table 2] Answers about the number of triangle altitude

	1개	2개	3개	기타	무응답
사전검사	7	1	9	1	8
사후검사	4	1	18		3

2. 삼각형 높이에 대한 설명에서 삼각형의 각 요소별 언급과 개념간의 연결

두 번째 과제는 [그림 2]에서와 같이 주어진 삼각형에서 삼각형 높이를 설명하는 것이다. 주어진 삼각형을 보며 삼각형의 높이를 설명하는 동안 눈 움직임을 녹화하고 말로 하는 설명을 녹음 하였다. 학생이 높이를 설명하는 동안 어디를 보는지 경로(gaze plot)를 기록하였고 말로 하는 설명에서 삼각형 구성 요소의 언급 빈도를 조사하였다.

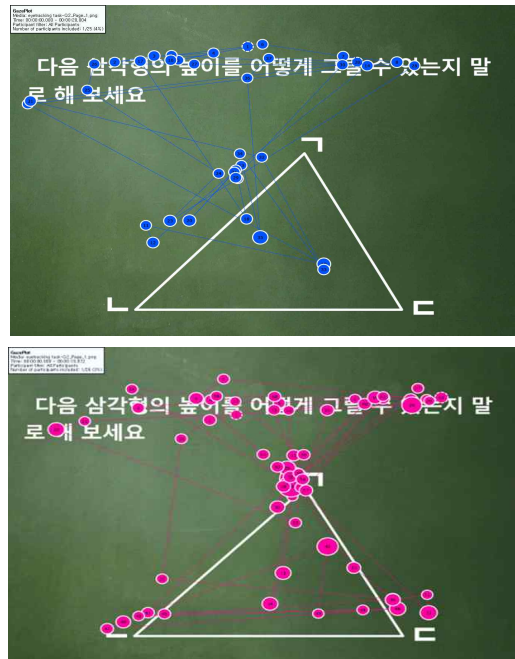
표3에서 보면, 사전검사에서는 꼭짓점, 밑변, 수직, 선분 등을 연결하여 삼각형의 높이를 정확하게 진술한 참가자는 한 명도 없었다. 정확하지는 않지만, 2~3가지 정도의 요소로 의미를 연결하여 언급한 학생은 5명이었다. 나머지는 의미가 연결되지 않거나 잘못 설명하였다. 사후검사에서 삼각형의 높이를 설명하는 과제에서는 10명의 학생이 삼각형 높이에 대한 개념의 의미를 바르게 설명하였고, 3명의 학생이 정확하지는 않지만, 삼각형 요소들 중 2~3가지를 연결하여 설명하였다. 콘텐츠를 활용한 수업을 통해 학생들은 삼각형의 개념과, 각 그 요소들과 그 요소들 간의 연결로 높이를 설명하게 된 것으로 보인다.

[표 3] 삼각형 높이 설명에 포함된 삼각형 요소별 속성에 대한 언급수 비교
[Table 3] The number of elements of triangle in answering about triangle altitude

	꼭짓점	밑변/변	수직	선분	밑변의 중점	무응답	기타
사전검사	12	3	3	1		9	2
사후검사	20	10	10	7	2	4	1

[그림 2]는 st6-2-5 학생이 삼각형 높이를 설명하는

동안의 시선의 움직임을 나타낸 것이다. 이 학생은 사전검사에서 삼각형의 높이는 1개라고 응답하였으며, 삼각형의 높이에 대해 설명할 때, '삼각형을 만들어요.' 라고 답하여 삼각형 높이를 제대로 이해하고 있지 못하고 있었다. 삼각형의 각 명칭들에 대한 명확한 이해가 없었으며, 머릿속에 있는 것을 어떻게 표현해야 할지 모르고 있었다. 그러나 사후검사에서는 삼각형의 높이의 개수가 3개라고 말했으며, '꼭짓점 ㄱ에서 밑변 ㄴㄴ에 수직으로 내려요.' 라고 대답하였다. 시선의 움직임을 보아도 사전검사에서는 문장에서 많이 머물고 있었으며, 시선의 흐름이 꼭짓점에서 밑변으로 향하고 있지 못하고 있었다. 그러나 사후검사에서는 삼각형 그림 부분에 더 많은 시선이 가며 각 꼭짓점에서 그 대변(밑변)으로 시선이 움직이고 있음이 확인된다.



[그림 2] 삼각형 높이에 대한 설명 당시의 st6-2-5 학생의 사전검사(상)와 사후검사(하)에서의 gaze plot
[Fig. 2] Student(st6-2-5)'s gaze plot during description of triangle altitude in pretest and posttest.

3. 삼각형 높이의 개념적 이미지에 대한 정답율과 오류 유형별 결과

사전과 사후검사 결과의 정답률을 볼 때 삼각형의

높이를 1개에서 3개로 인식하게 되어 정답률은 크게 상승 하였으나 오류 유형을 정답으로 찾는 비중은 줄어들지 않았다. 사전검사의 경우 정답률은 55.4% (317/572)이었으나, 사후검사에서는 70.9% (406/572)로 크게 상승하였다. 각 화면 당 정답은 3~4개와 오류 5~6개로 제시되었다. [표 4]와 [표 5]에서 정답 1은 1개 맞은 학생, 정답 2는 2개 맞은 학생, 정답 3은 3개 맞은 학생, 정답 4는 4개 맞은 학생이다. 사전검사에서는 1, 2개를 맞은 학생이 많은 반면, 사후검사에서는 3, 4개를 맞은 학생이 더 많음을 알 수 있다. 사전검사에 비해 사후검사에서 정답률이 크게 상승하였으나, 사후검사서 오류를 전혀 보이지 않고 정답만 말한 학생은 1명뿐이었다.

오류 유형을 정답으로 찾아내는, 오답률은 사전검사

22.7% (243/1066)에서 사후검사 24.3% (260/1066)로 오히려 증가하였다. 특히 오류 유형에서 B1, B2(표1참조, B1; 꼭짓점을 지나는 연장선을 그려 꼭짓점이 아닌 연장선의 한 점에서 높이를 그린 유형, B2; 수직이등분선의 개념에 의해 영향을 받은 부분적인 개념 이미지를 반영한 응답)의 경우는 두드러지게 높게 나타났다. 삼각형의 높이를 길이의 개념으로 생각하고 있는 부분은 여전했으며, [표4]과 [표5], [그림4]에서 볼 수 있듯이 수업을 통해서 개선시키지 못했음을 알 수 있다.

삼각형 높이를 학습하기 위해 사용된 콘텐츠들은 정답률을 높이는 데는 효과적(그림3)이었지만 오답률을 줄이지는 못하였다. 삼각형 높이가 하나라고 대부분이 생각했던 사전검사에 비해 사후검사에서는 콘텐츠를 활용한 수업을 통해 삼각형의 높이가 세 개임을

[표 4] 삼각형 종류별, 배치별 사전검사에서의 정답수와 오답수

[Table 4] The number of right and wrong answers about triangle types and configuration in pre-test.

삼각형 종류	배치	정답				A1	A2	B1	B2	B3	B4	C	D
		1	2	3	4								
예각삼각형	지면에 평행한 밑변(UAT)	8	9	4		-	12	20	15	-	1	2	-
	다양한 각도(RAT)	4	5	14		-	6	4	17	-	3	3	-
직각삼각형	지면에 평행한 밑변(URT)	8	8	4		-	6	18	14		0	-	-
	다양한 각도(RRT)	12	7	1		-	12	-	20		1	-	-
둔각삼각형	지면에 평행한 밑변(UOT)	9	7	6		-	6		18	6	0	1	-
	다양한 각도(ROT)	7	20	6		-	6	-	5	-	-	3	-
다양한 종류의 삼각형	다양한 각도(RVT)	6	7		8	-	5	20	19	-	-	-	-
합계		54	63	35	8		53	62	108	6	5	9	
총계(총문항수)		317(572)							243(1066)				

[표 5] 삼각형 종류별, 배치별 사후검사에서의 정답수와 오답수

[Table 5] The number of right and wrong answers about triangle types and configuration in post-test.

삼각형 종류	배치	정답				A1	A2	B1	B2	B3	B4	C	D
		1	2	3	4								
예각삼각형	지면에 평행한 밑변(UAT)	4	4	16		6	4	21	15	-	1	2	-
	다양한 각도(RAT)	3	5	16		1	4	5	18	-	0	6	-
직각삼각형	지면에 평행한 밑변(URT)	6	3	14		9	4	18	14	-	0	-	-
	다양한 각도(RRT)	9	6	7		2	9	0	16	-	1	6	8
둔각삼각형	지면에 평행한 밑변(UOT)	7	4	14		-	4	14	-	6	0	1	-
	다양한 각도(ROT)	1	8		15	1	3	0	7	-	-	4	7
다양한 종류의 삼각형	다양한 각도(RVT)	4	6	13		-	2	18	18	-	-	2	3
합계		34	36	80	15	19	30	76	88	6	2	21	18
총합(총문항수)		406(572)							260(1066)				

인식하게 되었다. 똑바로 세워진 삼각형과 회전된 삼각형 배치 각각에서 세 개의 각 꼭짓점에서 수선을 그을 수 있음을 알게 되어 정답률이 상승한 것으로 보인다. 그러나 오류 유형들을 삼각형 높이로 선택하는 오답율은 줄어들지 않았다. 특히 높이를 길이 개념으로 생각하는 B1, B2 유형이 두드러지게 나타났다.



[그림 3] 삼각형 종류별, 배치별 정답율 사전·사후검사 비교
[Fig 3] Comparison of pre & posttest by triangle types and configuration

4. 삼각형 높이의 개념적 이미지에 대한 문제 유형별 주관적 인지적 부하 측정

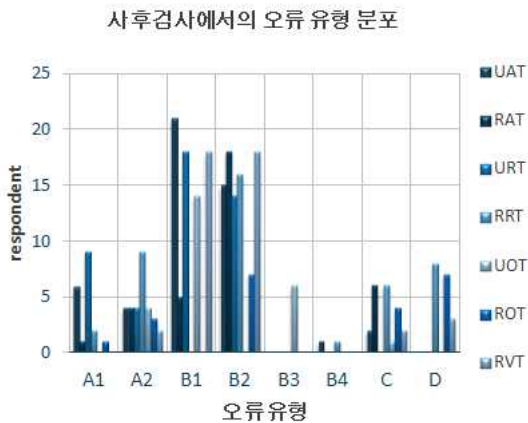
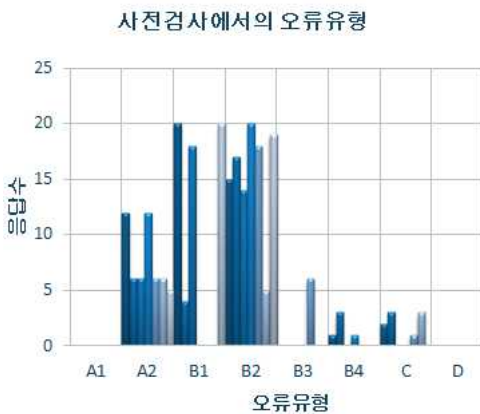
설문지를 통한 각 문항별 난이도에 대한 주관적 인

지 부하(척도 1(매우 쉬움)~9(매우 어려움))를 살펴보면 [표 6]과 같다. 지면에 평행한 밑변을 가진 삼각형 이미지보다는 회전된 삼각형을 어려워하고 있으며 오류 유형에서 더 많은 인지부하를 보이고 있어[그림 5] 아직 개념이 확실하지 않음을 알 수 있다.

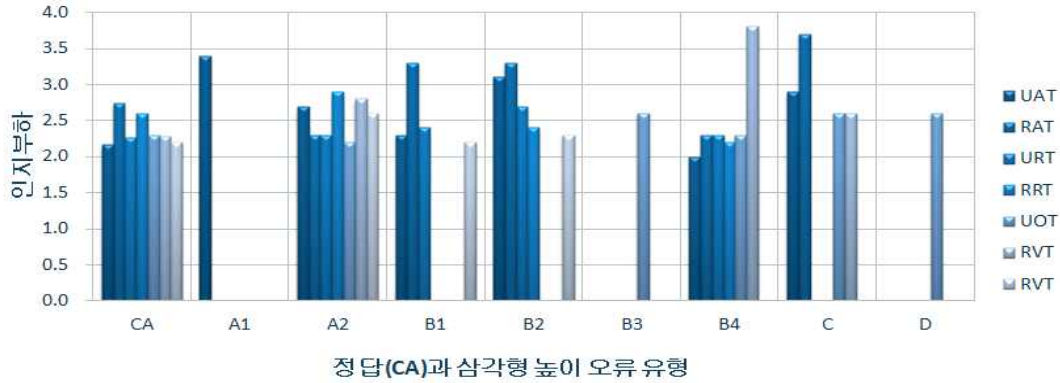
삼각형 높이에 대한 정답유형([그림 5]의 CA부분)에 대해서 3(조금 쉽다) 수준보다 더 쉽다고 느끼고 있었다. 삼각형 유형별로 비슷한 수준을 보이나 특히 예각삼각형과 직각삼각형이 회전 배치된 경우에 더 어려워하였다.

삼각형 높이에 대한 오류유형([그림 5]의 A~D 부분에) 대해서는 B1, B2, C유형에서 예각삼각형의 회전배치, A2유형에서는 직각삼각형과 둔각삼각형의 회전배치, B4유형에서는 둔각삼각형의 회전배치를 더 어려워하였다.

주관적 인지부하의 결과를 살펴보면 실제 통과율과 스스로 느끼는 난이도가 일치하지 않는다. 대부분의 학생들은 삼각형 높이에 대하여 약간의 차이는 있으나 4(어렵지 않다)수준 이하이며, 3(조금 쉽다)수준이거나 2(쉽다)수준 정도로 느끼고 있었다. 그러나 실제 사전검사 결과 올바른 삼각형 높이를 찾은 비율은 55.4%(317/572) 정도이며 잘못된 삼각형 높이를 오인하여 정답으로 채택한 경우도 22.7%(243/1066)나 되었다. 쉽고 스스로 잘 알고 있다고 생각하고 있었지만 실제로는 오개념을 가지고 있었으며 스스로 이를 인식하지



[그림 4] 삼각형 종류별, 배치별 오류유형에 대한 사전·사후검사 비교
[Fig. 4] The compare of pre & post-test about error types of triangle types and configuration



[그림 5] 삼각형 높이에 대한 정답과 오류 유형별 인지부하
 [Fig. 5] Cognitive load on right answer and error types of triangle altitude

[표 6] 사전검사에서 삼각형 종류별, 배치별 주관적 인지부하 정도
 [Table 6] Subjective cognitive load in pretest

삼각형 종류	배치	CA1	CA2	CA3	CA4	A1	A2	B1	B2	B3	B4	C	D
예각삼각형	지면에 평행한 밑변	1.6	2.8	2.1		3.4	2.7	2.3	3.1		2.0	2.9	
	다양한 각도	2.1	2.8	3.3			2.3	3.3	3.3		2.3	3.7	
직각삼각형	지면에 평행한 밑변	2.0	2.6	2.2			2.3	2.4	2.7		2.3		
	다양한 각도	2.2	2.7	2.9			2.9	2.4	2.4		2.2		
둔각삼각형	지면에 평행한 밑변	2.0	2.6	2.3						2.6	2.3	2.6	2.6
	다양한 각도	2.1	2.1	2.5	2.4	2.8					3.8	2.6	
다양한 종류의 삼각형	다양한 각도	1.7	3.2	2.1	1.8	2.6	2.2	2.3					
다양한 종류의 삼각형	평균		2.35			3.4	1.5	2.5	2.7	2.6	2.4	2.9	2.6
총점(평균)		54.1(2.35)				77.1(2.65)							

못하고 있음을 알 수 있다.

5. 삼각형 높이의 개념 이미지에 대한 문제 유형별 주관적 인지부하

[표 7]에서, 개별 과제에 대한 학생들이 느끼는 난이도는 삼각형 높이 설명(TaD)이 44.62 (4수준(어렵지 않다) ~ 5수준(보통))로 가장 높게 나타났으며, 학생들은 삼각형의 높이를 정의하고 어떻게 작도하는지 설명하는 것을 가장 어렵게 생각하고 있었다. 실제 대부분의 학생이 삼각형 높이를 바르게 설명하지는 못하였다. 다음으로 삼각형 높이의 개수를 묻는 과제는 3.54 (3수준(조금 쉽다)~4수준(어렵지 않다)) 정도였다. 삼각형 높이를 그림으로 제시한 것들 중에서 맞는 것을 고르는 나머지 문항들은 3수준이하로 대체로 쉽다고

느끼고 있었다. 그림으로 제시하고 있으며 또 설명을 요구하지 않는 선다형이라 부담을 느끼지 않았던 것으로 생각된다.

[표 7] 각 문항별 인지적 부하 정도
 [Table 7] Cognitive load of each items

	인지부하 정도	
	밑변평행	회전
삼각형 높이의 개수(TaC)	3.54	
삼각형 높이 설명(TaD)	4.62	
예각삼각형 배치(AcT)	2.58	2.98
직각삼각형 배치(RiT)	2.4	2.65
둔각삼각형 배치(ObT)	2.44	2.64
다양한 삼각형 / 회전배치 (Mix)	2.35	

삼각형 유형별, 배치별 인지부하 정도를 살펴보면

세 가지 유형(예각삼각형, 직각삼각형, 둔각삼각형) 모두에서 밑변이 지면에 평행하도록 배치한 똑바로 세워진 삼각형 배치보다는 회전하여 배치한 삼각형에 인지 부하가 높게 나타났다[그림 6].



[그림 6] 문제 유형별 주관적 인지부하
[Fig. 6] Subjective cognitive load of each items

6. 삼각형 높이의 개념 이미지에 대한 Fixation Count(FC)

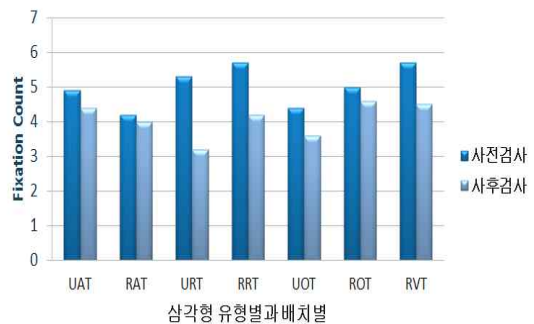
task3~9는 화면을 9분할하여 AOI를 정하고(그림1), FC를 측정하였다. [그림 7]의 바른 제시 문항에서의 FC가 사전검사에 비해 사후검사에서 유형별(예각삼각형, 직각삼각형, 둔각삼각형)과, 배치별(똑바로 세워진 또는 회전된 배치)에서 낮아짐을 알 수 있다. 높이를 바르게 제시한 문항에서는 맞는 삼각형 높이인지를 판단할 때, 적은빈도(FC)로 탐색했다는 것을 알 수 있다.

예각삼각형의 경우를 제외하면 직각삼각형과 둔각삼각형에서 똑바로 세워진 삼각형 배치보다는 회전된 삼각형 배치에서 FC가 더 높게 나타났다(그림7). 이는 오류 유형에서의 FC 또한, 세 삼각형 유형별 모두 똑바로 세워진 배치보다는 회전된 배치에서의 FC가 높다(표8, 표9)는 것을 말한다.

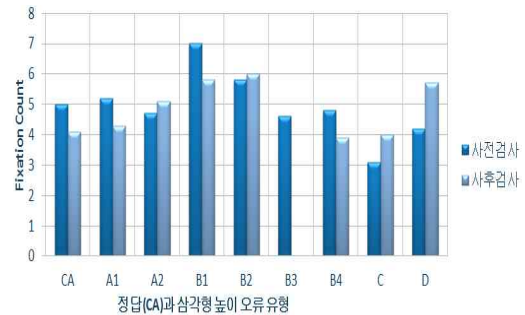
[표 8] 사전검사에서의 fixation count
[Table 8] Fixation Count in pretest

삼각형 종류		CA	A1	A2	B1	B2	B3	B4	C	D
예각삼각형	지면에 평행한 밑변	4.9	5.2	4.1	9.8	6.2		2.6	2.8	
	다양한 각도	4.2		6.1	8.1	5.5		4.1	3.8	
직각삼각형	지면에 평행한 밑변	5.3		3.6	4.4	5.1		4.4		
	다양한 각도	5.7		4.8		4.8		4		
둔각삼각형	지면에 평행한 밑변	4.4		4.2			4.6	5.8	2.1	4.2
	다양한 각도	5		6				8	3.5	
다양한 종류의 삼각형	다양한 각도	5.7		4.1	5.6	7.3				

[그림 8]에서는 C유형을 제외하면 바른 제시 문항(CA)보다 오류를 제시하는 유형에서 FC가 높게 나타났다. 이는 A1~B4 유형에서 바른 제시 문항(CA)보다 오류 제시 문항을 더 많이 검색하였으며, C, D유형은 [그림8]에서는 자주보지 않았으나 오래 본 것으로 파악 된다[그림10].



[그림 7] 사전검사와 사후검사에서 정답문항에 대한 fixation count
[Fig 7] Fixation Count of correct test item in pretest & posttest



[그림 8] 사전·사후검사에서 오류문항에서의 fixation count
[Fig. 8] Fixation Count of error types in pretest & posttest

[표 9] 사후검사에서의 fixation count

[Table 9] Fixation Count in posttest

삼각형 종류		CA	A1	A2	B1	B2	B3	B4	C	D
예각삼각형	지면에 평행한 밑변	4.4	4.9	5.4	5.7	6.8	0	3.3	3.3	
	다양한 각도	4.0	5.9	5.1	6.4	4.9		2.9	4.9	
직각삼각형	지면에 평행한 밑변	3.2		4.3	5.7	5.9		5.4		7.4
	다양한 각도	4.2	5.1	7		6.7		4.2	5	5
둔각삼각형	지면에 평행한 밑변	3.6		3.8	5.9			3.6	3	8.4
	다양한 각도	4.6	1.7	4.7		6.4			4	4.2
다양한 종류의 삼각형	다양한 각도	4.5	3.7	5.4	5.2	5.3				3.7

[표 10] 사전검사에서의 fixation duration (단위 ms)

[Table. 10] Fixation Duration in pretest (ms)

삼각형 종류		CA	A1	A2	B1	B2	B3	B4	C	D
예각삼각형	지면에 평행한 밑변	0.8	0.9	0.7	1.7	1.1		0.5	0.4	
	다양한 각도	0.6		1.3	1.3	1.4		0.7	0.6	
직각삼각형	지면에 평행한 밑변	0.8		0.7	0.6	0.8		0.8		
	다양한 각도	0.9	0.9			0.8		0.7		
둔각삼각형	지면에 평행한 밑변	0.7		0.8			0.9	0.9	0.3	0.7
	다양한 각도	0.8		1.2				1.1	0.5	
다양한 종류의 삼각형	다양한 각도	0.9		0.8	0.6	1.1				

[표 11] 사후검사에서의 fixation duration (단위 ms)

[Table. 11] Fixation Duration in posttest (ms)

삼각형 종류		CA	A1	A2	B1	B2	B3	B4	C	D
예각삼각형	지면에 평행한 밑변	0.8	1.1	1.3	0.9	2.1	0	0.9	0.8	
	다양한 각도	0.7	1.1	1.2	1.1	1.1		0.7	1.5	
직각삼각형	지면에 평행한 밑변	0.5		0.8	1	1.1		1.2		1.5
	다양한 각도	0.7	0.8	1.3		1.1		0.7	1.1	0.7
둔각삼각형	지면에 평행한 밑변	0.6		0.8	1			0.7	0.6	2
	다양한 각도	0.8	0.3	1		1.1			0.9	0.8
다양한 종류의 삼각형	다양한 각도	0.8	0.7	1	0.9	1				0.7

7. 삼각형 높이의 개념 이미지에 대한 Fixation Duration(FD)

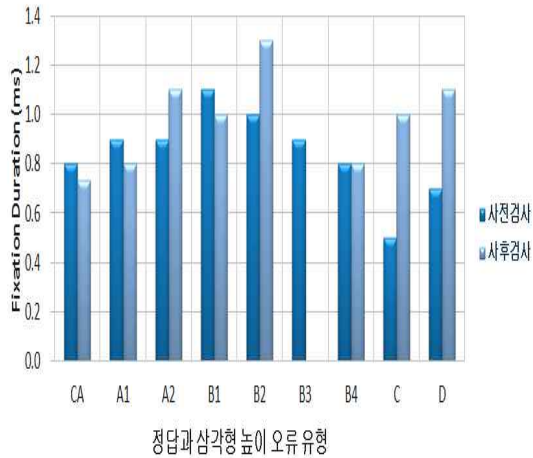
[그림 1]에서와 같이 task3~9 화면을 9분할하여 AOI를 정하고 FD를 측정하였다. [표 10], [표 11]. [그림 9]에서와 같이, 정답 문항에서는 FD가 사전검사에 비해 사후검사에서 줄어들었으며, 예각삼각형에서는 똑바로 세워진 배치가 다른 두 유형에서는 회전된 배치과제에서 더 많은 FD를 보였다.

[그림 10]을 보면, 사전·사후검사에서 바른 제시 문

항보다는 오류 제시 문항에서 FD가 높게 나타난 것을 볼 때 정답은 확실한 개념을 갖고 빨리 찾고 있지만 오류 유형들에서는 더 많은 시간을 두고 생각하고 있는 것으로 볼 수 있다.



[그림 9] 사전검사와 사후검사에서의 정답에 대한 fixation duration [Fig. 9] Fixation Duration of correct answer in pretest and posttest



[그림 10] 정답과 삼각형 높이 오류 유형별 Fixation Duration [Fig. 10] Fixation Duration in Correct answer and error types

V. 결론

본 연구에서는 초등학교 6학년 학생들의 삼각형 높이에 대한 개념 이미지를 삼각형 유형별, 배치별로 알아보고 그에 대한 인지적 처리과정과 인지부하 정도를 살펴보았다. 삼각형 높이에 대한 정의를 기반으로, 삼각형 요소별 연결성을 콘텐츠를 활용한 수업이 향상시킬 수 있는지 사전 사후 검사를 통해 알아보고, 주관적 인지부하와 눈 움직임 데이터의 연결성을 분석하였다.

첫째, 눈 움직임 데이터를 통해 볼 때, 삼각형 높이에 대한 인지부하 정도는 똑바로 세워진 삼각형 보다 회전된 배치에서 더 높게 나타난다. 삼각형 높이에 대한 유형별, 배치별 주관적 인지적 부하, FC, FD 모두에서 회전된 배치에서 더 높게 나타남을 통해 학생들은 회전을 보다 어렵다고 느낌을 알 수 있다.

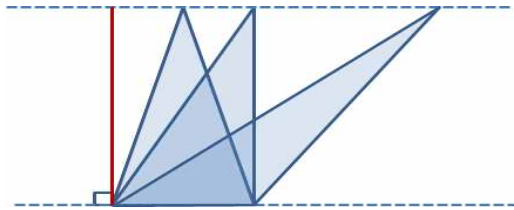
둘째, 눈 움직임 데이터를 통해 볼 때, 바른 제시 문항보다는 오류 제시 문항에서 더 많은 인지부하가 나타났다. 주관적 인지부하뿐만 아니라, FC, FD 모두에서 바른 제시 문항보다는 오류 제시 문항에서 더 높게 나타났으며, 정답문항에 대하여 사전검사에 비해 사후검사에서 FC, FD가 모두 내려가 인지부하 정도가 내려감을 알 수 있었다.

셋째, 시선추적 데이터를 통해 오개념에 해당되는 것을 짐작할 수 있다. 가장 큰 오류이면서 사후검사에서 교정되지 않은 B1, B2는 오개념임에도 불구하고 주관적 인지부하는 낮았으나 실제 시선추적 데이터에서는 인지부하가 크게 나타났다. 주관적 인지부하는 정답문항에서 2.35, 오류문항에서 2.65로 오류 유형이 약간 높아 오류문항에서 더 고민함을 알 수 있다. 오류 유형에서 평균보다 높은 유형은 A1(3.4), B2(2.7), C(2.9)으로 수선을 그리려 했으나 수직으로 그리지 못한 유형(A1)과 수직이등분선의 개념에 의해 영향을 받은 부분적인 개념 이미지를 반영한 응답 (B2), 한 변을 높이로 보는 유형(C)이었다. B1, B2는 오류임에도 불구하고 높이에 대한 길이의 오개념으로 인해 어려움을 느끼지 않고 그대로 정답으로 인식하였으나, 실제 시선추적 데이터 상에서는 인지부하를 보이고 있는 것으로 보인다.

넷째, 삼각형 높이에 대한 오류 중 B1, B2 유형은 수정되지 않고 오히려 인지적 부하를 일으킨다. 그 원인은 높이를 길이 즉 측정의 개념으로 인지하고 있기 때문이다. 높이를 선분이 아닌 높이에 대한 길이로 인식하는 오개념을 갖고 있는 것이다. 5학년 다각형의 넓이를 구하는 단원에서는 다각형의 둘레를 구하는 것을 시작으로 직사각형, 평행사변형, 삼각형, 사다리꼴, 마름모 순으로 넓이를 구해 나간다. 직사각형과 평행사변형의 넓이를 구한 후 삼각형의 높이 개념을 도입하여 다양한 다각형의 넓이로 확장하여 나아간다. 이런 맥락에서 삼각형의 높이는 다각형들의 넓이를 구하기 위한 수단으로써 선분의 개념보다는 측정의 개념으

로써 인식되기 쉽다.

또, 교과서에 제시된, ‘삼각형의 넓이는 밑변의 길이와 높이가 일정하면 같다’는 성질(그림11)에서도 찾아볼 수 있다. 여기에서 제시된, 서로 다른 삼각형 3개에서, 삼각형 높이의 길이가 동일하기는 하지만 삼각형의 높이는 제시되지 않았다.



[그림 11] 삼각형의 넓이에 대한 성질에 관련된 교과서 그림
[Fig. 11] Description about triangle area on textbook

교과서 안에서 삼각형의 높이를 구할 때 삼각형 높이의 길이를 묻는 문항에서 ‘높이를 구하시오’라고 표현되며, 높이의 길이를 구하라고 표현하지는 않는다. 이 또한 높이를 선분이 아닌 높이에 대한 길이로 인식하도록 한다. 이러한 과정에서 삼각형의 높이를 개념적 정의에 근거하여 이해하는 것이 아니라 길이가 같은 것이 높이가 될 수 있다는 개념적 이미지를 형성하여 오류를 범하게 된다. 따라서 삼각형의 높이에 대한 바른 개념적 정의와 개념적 이미지를 적절하게 일치시켜줄 수 있는 교수 학습 설계가 필요하다.

참 고 문 헌

권유미·안병곤 (2005). 초등 수학 교과서에 사용되고 있는 수학 용어에 대한 학생들의 이해도 분석. 한국초등수학교육학회지, **9(2)**, 137-159.

Kwon, Y. & Ahn, B. (2005). The analysis on students' understanding of mathematics terms being used in elementary school mathematics textbooks—Centering on the field of geometry. *Korea Society of Elementary Mathematics Education*, **9(2)**, 137-159.

이광호·이현주·이주영·송윤오(2014). 평면도형 높이에 대한 학생 이해도와 오류 유형. 한국교원대학교 뇌기반교육연구소, **4(2)**, 46-56.

Lee, K.; Lee, H.; Lee, J., & Song, Y. (2014).

Understanding and error types of the height concept in plane figures. *Brain & Learning*, **4(2)**, 46-56

임승현, 박영희 (2011). 초등학교 6학년 학생들의 도형의 개념 이해에 대한 연구. 한국초등수학교육학회지, **15(1)**, 141-159.

Im, S. H., & Park, Y. H. (2011). A study on the understanding of height concept of figures of sixth grade students of elementary schools. *Korea Society of Elementary Mathematics Education*, **15(1)**, 141-159.

Epelboim, J., & Suppes, P. (2001). A model of eye movements and visual working memory during problem solving in geometry. *Vision Research*, **41(1)**, 1561-1574.

Grant, E. R. & Spivey, M. J. (2003). Eye movements and problem solving: Guiding attention guides thought. *Psychological Science*, **14(5)**, 462 - 466.

Groner, R., & Groner, M. (1982). *Towards a hypotheti-co-deductive theory of cognitive activity*. In R. Groner, & P. Fraisse. (Eds.), *Cognition and eye movements* (pp. 100-121). Amsterdam: North Holland.

Groner, R., & Groner, M. (1983). *A stochastic hypothesis testing model for multi-term series problems, based on eye fixations*. In R. Groner, C. Menz, D. F.Fisher & R. A. Monty (Eds.), *Eye movements and psychological functions: International views* (pp. 257-274). Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlbaum.

Gutierrez, A., & Jaime, A. (1999). Preservice primary teachers' understanding of the concept of altitude of a triangle. *Journal of Mathematics Teacher Education*, **2**, 253-275.

Hart, S. G. & Staveland, L. E. (1988). Development of NASA-TLX (Task Load Index): Results of empirical and theoretical research. *Human Mental Workload*, **1**, 39 - 183.

Hegarty, M. & Just, M. A. (1993). Constructing mental models of machines from text and diagrams. *Journal of Memory and Language*, **32(6)**, 717 - 742.

Hegarty, M.; Mayer, R. E. & Monk, C. A. (1995). Comprehension of arithmetic word problems: A comparison of successful and unsuccessful

- problem solvers. *Journal of Educational Psychology*, 87(1), 18 - 32.
- Holm, A.; Lukander, K.; Korpela, J.; Sallinen, M. & Muller, K. M. (2009). Estimating brain load from the EEG. *The Scientific World Journal*, 9, 639.
- Just, M. A., & Carpenter, P. A. (1985). Cognitive coordinate systems: Accounts of mental rotation and individual differences in spatial ability. *Psychological Review*, 92(2), 137.
- Knoblich, G.; Ohlsson, S., & Raney, G. E. (2001). An eye movement study of insight problem solving. *Memory & Cognition*, 29(7), 1000-1009.
- Köörner, C. (2011). Eye movements reveal distinct search and reasoning processes in comprehension of complex graphs. *Applied Cognitive Psychology*, 25, 893-905.
- Lin, J. J. H., & Lin, S. S. J. (2013). Cognitive load for configuration comprehension in computer-supported geometry problem solving: An eye movement per-spective. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 12, 605-627.
- Lin, J. J. H., & Lin, S. S. J. (2014). Tracking eye movements when solving geometry problems with handwriting devices. *Journal of Eye Movement Research*, 7(1), 1-15.
- Mayer, R. E. (2010). Unique contributions of eye-tracking research to the study of learning with graphics. *Learning and Instruction*, 20(2), 167 - 171.
- Paas, F., Renkl, A. & Sweller, J. (2003a). Cognitive load theory and instructional design: Recent developments. *Educational Psychologist*, 38(1), 1 - 4.
- Paas, F.; Tuovinen, J. E.; Tabbers, H. & Van Gerven, P. W. M. (2003b). Cognitive load measurement as a means to advance cognitive load theory. *Educational Psychologist*, 38(1), 63 - 71.
- Paas, F. & van Merriënboer, J. J. G. (2006). Optimising worked example instruction: Different ways to increase germane cognitive load. *Learning and Instruction*, 16(2), 87 - 91.
- Park, B.; Moreno, R.; Seufert, T. & Brunken, R. (2010). Does cognitive load moderate the seductive details effect? A multimedia study. *Computers in Human Behavior*.
- Plass, J. L., Moreno, R. & Brünken, R. (2010). *Cognitive load theory*. Cambridge University Press.
- Rayner, K. (1998). Eye movements in reading and information processing: 20 years of research. *Psychological Bulletin*, 124(3), 372 - 422.
- Sweller, J. Ayres, P., & Kalyuga, S. (2011). *Cognitive load theory*. Springer.
- Sweller, J. & Chandler, P. (1991). Evidence for cognitive load theory. *Cognition and Instruction*, 8(4), 351 - 362.
- van Gog, T.; Paas, F.; van Merriënboer, J. J. G., & Witte, P. (2005). Uncovering the problem-solving process: Cued retrospective reporting versus concurrent and retrospective reporting. *Journal of Experimental Psychology: Applied*, 11(4), 237-244.
- Vinner, S. (1983). Concept definition, concept image and the notion of function. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 14(3), 293-305, 199-216.
- Vinner, S. (1991). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. In D. Tall(Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 65-81). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.
- Wilson, P. S. (1988, November). *Variation in student geometric concepts*. In M. J. Behr, C. B. Lacampagne, & M. M. Wheeler (Eds.), *Proceedings of the 10th PME-NA conference* (pp.199-205). Dekalb, IL;Northern illinois University.
- Wilson, P .S. (1990). Inconsistent ideas related to definitions and examples. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 12(3/4), 31-47.

Cognitive process and cognitive load about the concept image of triangle altitude in visual image

Lee, Mi Jin

Graduate School of Korea National University of Education
Cheongju, Chungbuk 28173, Korea
E-mail : mjl8520@gmail.com

Lee, Kwangho[†]

Korea National University of Education
Cheongju, Chungbuk 28173, Korea
E-mail : paransol@knue.ac.kr

In the process of finding the triangle height, 26 students in the 6th grade were surveyed to understand the students' triangle height through the eye movement data and to investigate the cognitive load of the students. As a result, the correctness rate of the pre-test was significantly increased in the post-test, and the frequency and retention of gaze data were smaller in the post-test than in the AOI of each question. The Participants's subjective cognitive load indicated that it was more difficult to understand the concept of rotated triangles compared with upright triangles that were parallel to the ground. More frequent and more retentions in the eye-tracking data were detected in the right triangles and acute triangles by rotating configuration. Eye movement data show that eye tracking technology can provide an objective measure of students' cognitive load for feedback on instructional design.

* ZDM Classification : C33

* 2000 Mathematics Subject Classification : 97D70

* Key Words : cognitive load, triangle altitude, eye movement, configuration,

† Corresponding author