<학술논문> **DOI https://doi.org/10.3795/KSME-A.2017.41.11.1085** ISSN 1226-4873(Print)
2288-5226(Online)

주령구에서 육각면이 나올 확률에 대한 운동역학적 해석

유 완 석*† · 이 정 한**
* 부산대학교 기계공학부, ** 펑션베이㈜

Kinetic Analysis of the Probability of Hexagonal Face in Juryeonggu

Wan Suk Yoo*† and Jeong Han Lee**
* Dept. of Mechanical Engineering, Pusan Nat'l Univ.
** FunctionBay, Inc.

(Received June 1, 2017; Revised August 22, 2017; Accepted August 23, 2017)

Key Words: Juryeonggu(주령구), Probability(확률), Kinetic Analysis(운동역학적 해석), Contact(접촉), Energy Loss(에너지손실)

초록: 주령구는 안압지에서 출토된 14면체 주사위인데, 6개의 정사각면과 8개의 육각면으로 구성되어 있으며, 14개의 면에는 각각 다른 문구가 새겨져 있다. 본 연구에서는 이러한 14면체 주사위를 정밀하게 가공한 뒤, 실험을 통해 육각면이 나올 확률을 조사하였다. 다음으로 다물체동역학 모델링을 통하여 육각면이 나올 확률을 알아본 뒤, 마찰계수에 따라 확률이 달라지는 분석하였다.

Abstract: Juryeonggu is a cuboctahedral die that was used during the Silla period in ancient Korea. This cuboctahedral die consists of two different penal servitudes of 14 sides; however, its equal probability distribution enables it to be used as a die. In this paper, a precise cuboctahedral die, Juryeonggu, was manufactured, and its probability was measured through experiments. Next, the probability was verified through Multibody-dynamics (MBD) modeling and analysis, and the effect of the coefficient of friction on the probability distribution was studied.

1. 주령구

경주 안압지에서 출토된 14면체 목제 주사위인 주령구는 Fig. 1과 같이 6개의 정사각면과 8개의 육각면으로 이루어져 있다. 주령구의 14개 면에는 공영시과(空詠詩過, 시 한 수 읊기), 음진대소(飮盡大笑, 술 한 잔 다 마시고 큰 소리로 웃기), 삼잔일거(三盞一去, 술 세 잔 한번에 마시기) 등 각각 다른 문구들이 적혀 있는 바, 주령구를 던져서 나오는 면에 적힌 문구에 따라 벌칙을 수행하였던 것으로 보여진다. 14개 면에 적힌 문구들 내용을 살펴보면 그 당시의 신라인들의 생활과 풍류를 유추할 수 있다.

† Corresponding Author, wayoo@pusan.ac.kr
Ⓒ 2017 The Korean Society of Mechanical Engineers

2. 14면체 확률에 대한 연구사례

14면체에 대한 확률적 고찰은 1994년 허명회[1]에 의해 통계학적 연구가 시작했다. 비슷한 시기

Fig. 1 Fourteen-sided dice named Juryeonggu

에 Powers[2]에 의해 14면체에 대한 발생확률에 대한 연구가 발표되었으며, 1995년에 채경철[3] 및 이충석에 의해 실험적 연구와 논리적 확률에 대한 비교연구가 수행되었으며, 2005년에 장대흥[4]에 의해 실험이 수행되었다. 허명회[1]의 연구에서는 14면체의 확률을 계산하기 위해 14면체와 외접하는 구에 대해 두 가지 다각형을 투영시킨 육각형 면의 면적과 사각형 면의 면적을 계산하여 그 비율로서 육각형 면이 나올 확률을 계산하였으며, Powers[2]는 각 도형에 남기 위해 필요한 위치에너지로부터 필요한 운동에너지를 유추하여 사각형 면과 육각형 면의 확률 분포를 계산하였다.

이 두 가지 확률 계산식은 각기 다른 형태로 던졌을 때의 빈도적 확률과 유사한 결과를 얻을 수 있는데, 이는 채경철[3] 및 장대흥[4]에 의한 연구결과에서 잘 나타나 있다. 본 논문에서는 기존의 확률 분포 연구결과를 정리한 뒤, Power[2]의 균일분포를 따르는 운동에너지 가정 보다 더 역학적인 관점에서 분석하여 확률을 계산하였다. Powers[2]의 확률 분포 식은 위치에너지를 근거로 하여 구름에 필요한 운동에너지를 계산하고 육각형 면과 사각형 면의 상황에 대한 비율을 통해 확률을 채경철,[3] 장대흥[4]의 결과로 얻어진 14면체의 육각형 면이 나올 확률은 각각 24.1%, 23.76%, 24.05%, 27.47%로 발표되었다.

기계분야에서는 확률분포를 고려한 부품설계에 관한 논문들은 많으나,[5] 14면체 주령구에 대한 연구결과는 없다. 윷놀이할 때 던지는 경우와 굴리는 경우에 따라 모가 나올 확률이 다르듯 주령구도 던지는 방법에 따라 확률이 달라질 수 있음을 예상할 수 있다. 또한, 바닥 면과의 마찰계수에 따라 확률분포가 달라질 것으로 예상된다. 따라서, 본 연구에서는 주령구 형태의 14면체를 가공한 뒤, 육각형 면이 나올 확률을 조사하기 위한 실험을 먼저 진행하였다. 또한, 다물체동역학 모델링과 시뮬레이션을 통하여 마찰계수에 따른 확률변화를 분석하고자 하였다.

3. 주령구 제작 및 확률 실험

해석을 위하여 본 연구에서는 먼저 주령구 형태의 14면체를 정밀하게 가공하였다. 가공은 육면체를 고정시킨 뒤, 모서리를 정육면체의 중심방향으로 수직하게 깎아 나가면 된다. 가공 깊이 r 에 따라 Fig. 3과 같이 모양이 다른 14면체가 만들어지는데, 잘라진 육각면의 형상은 Fig. 4와 같은 모양이 나온다. 이 육각면의 치수는 Table 1과 같이 가공전 정육면체 한변의 길이 ℓ 과, 가공깊이 r 로치수가 표현된다.

Table 1 Dimension of the fourteen-sided dice Juryeonggu

Description	Formula
Hypotenuse length of a big triangle	$d=\frac{3}{2}\sqrt{2}\ell-\sqrt{6}r$
Hypotenuse length of a square	$a=\sqrt{6}r-\frac{\sqrt{2}}{2}\ell$
Hypotenuse length of a small triangle	$b=\sqrt{2}\ell-\sqrt{6}r$
Perpendicular distance to the bottom	$k=\frac{\sqrt{6}}{4}\ell-\frac{\sqrt{2}}{2}r$
perpendicular distance to the top	$j=\frac{\sqrt{2}}{2}r$

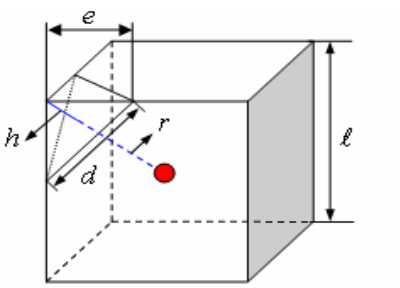


Fig. 2 Manufacturing process of 14-sided dice Juryeonggu

Fig. 3 Shape change of 14-sided dice according to processing depth r

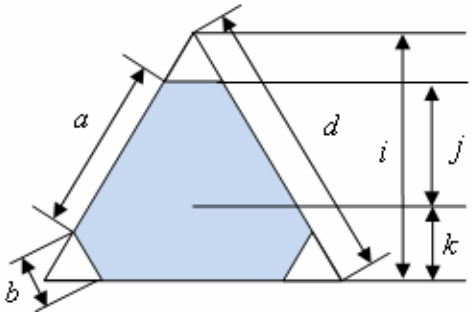


Fig. 4 Hexagonal cross-sectional shape of Juryeonggu

Table 2 Probability of hexagonal face according to 10 subjects

Tester 1	Tester 2	Tester 3	Tester 4	Tester 5	
0.2928	0.1786	0.2214	0.2500	0.2643	
Tester 6	Tester 7	Tester 8	Tester 9	Tester10	Mean
0.2286	0.1500	0.2928	0.2143	0.2357	0.2328

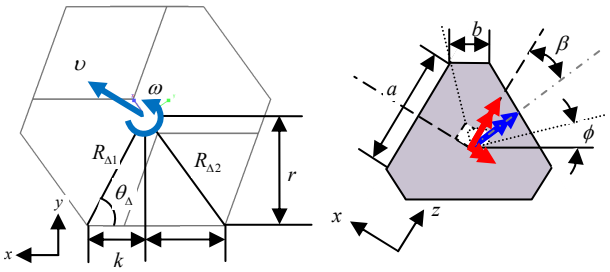


Fig. 5 Moment at the hexagonal face

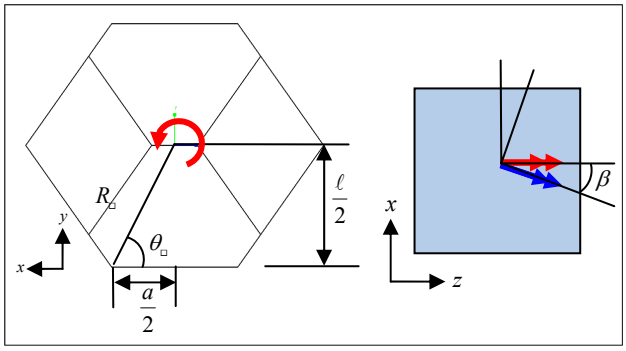


Fig. 6 Moment at the square face

플라스틱 소재로 정밀한 14면체 주령구를 제작한 뒤, 10명의 실험자가 각각 100번 이상씩 던졌을 때의 육각형 면이 나올 확률을 조사하였다. Table 2에 나타난 바와 같이 10명의 확률이 차이가 많은데, 이는 굴리거나 던지는 행위에 따라 산포가 발생한 것으로 사료된다.

4. 다른 면으로 넘어갈 확률에 대한 역학적 고찰

14면체인 주령구가 구르기에 필요한 모멘트는 바닥의 형상이 사각형인지? 육각형인지?에 따라 달라진다. Fig. 5는 육각면 바닥일 때 속도 υ와 각속도 ω로 움직이는 주령구에 β만큼 기울어진 방향으로 모멘트가 가해지는 경우를 표시하고 있으며, Fig. 6은 사각면 바닥일 때 β만큼 기울어진 방향으로 모멘트가 가해지는 자유물체도를 표시하고 있다.

14면체 주령구가 움직이는 과정은 바닥면과의 접촉이 주된 요인이기 때문에 모델링이 쉽지 않으며, 또한 바닥면의 상태를 일반화하는 것이 거의 불가능하다. 다만, 어떤 물체가 장애물을 만나 올라가려면 그 때의 운동에너지가 올라가기 위한 위치에너지 보다 커야 된다는 것이다.

같은 조건으로 14면체 주령구의 구름현상을 생각해 볼 수 있다. 주사위는 초기 운동에너지와 위치에너지를 가지고 움직이는 과정에서 마찰에 의한 에너지를 잃어 가다가 마지막 순간 어떠한 면이 바닥에 오게 된다. 이 마지막 순간은 정지한 순간을 의미하는 것이 아니라 최소 운동에너지의 경계치 보다 낮은 값의 운동에너지를 가지는 순간을 의미한다. 즉, 마지막 순간 어떤 면에서 다음 면으로 넘어갈 수 있는 경우는 '최종상태에 남아있는 에너지(residual energy)의 크기로부터 결정된다'는 가정하에 확률 분포를 계산할 수 있다.

바닥이 사각면 일 때의 운동에너지와 위치에너지, 육각면일 때의 위치에너지와 운동에너지 유도 및 관련 수식은 참고문헌[6]에 있다.

5. 주령구의 동역학 모델링 및 해석

본 연구에서는 주령구의 이론적 확률을 확인하기 위해 육각형 면과 사각형 면으로 구성된 14면체의 확률을 계산하고자 다물체동역학 모델링 및 Simulation을 수행하였으며, 실험을 통한 결과와 비교하였다. 또한, 바닥 면과의 마찰계수 변화가 육각면 나올 확률에 미치는 영향도 조사하였다.

이론적 확률 계산을 위해 바닥면이 육각면과 사각면 일 때의 운동에너지를 구한 뒤,[6] 이 값이 임계에너지 보다 클 경우에만 다음 상태로 구를 수 있는 것으로 판단하였다.

14면체 주령구가 구르는 과정을 지배하는 요인이 바닥 면과의 접촉이기 때문에 모델링이 쉽지 않으나, 본 논문에서는 구르는 과정에서 발생할 수 있는 물리적 현상을 다음과 같은 가정하에서 해석하였다.

(1) 구르기 위해서는 운동에너지가 넘어가는데 필요한 위치에너지 보다 커야 한다.

(2) 14면체가 구르는 과정 중 바닥면과 접촉상황에 대해 에너지의 손실이 발생한다.

다물체 동역학 모델링 및 Simulation은 다물체 동역학 해석 프로그램인 ADAMS[7]를 사용하였으며 14면체를 모델링 한 후 각 꼭지점과 꼭지점 사

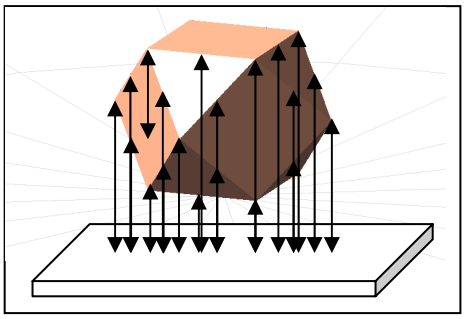
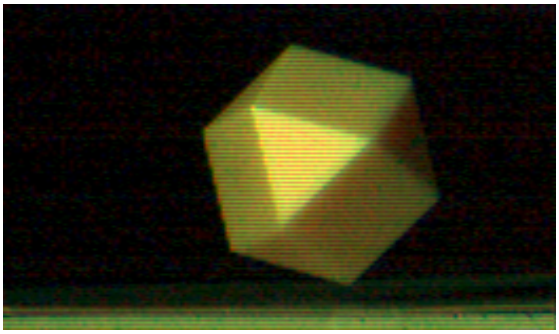
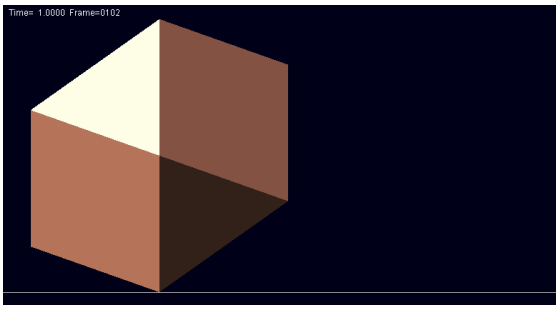


Fig. 7 Force modelling with the bottom



(a) Rollover experiment



(b) Rollover simulation

Fig. 8 Rollover experiment and simulation

이의 중심점에 대해 Contact 요소로 모델링 하였다.

바닥 면과의 마찰계수를 측정하기 위해, 주령구가 놓인 바닥면을 서서히 기울이면서 주령구가 미끄러지는 각도를 구하여 정지 마찰계수를 선정하였다. 바닥 면과의 힘은 집중력(concentrated force)가 아닌, Fig. 7에 나타낸 여러 점과 면(point to plane) 이 접촉하는 분포력(distributed contact force)으로 모델링 하였다.

다물체동역학 모델링에 필요한 기타 Contact Parameter를 결정하기 위하여 고속카메라로 주령구를 굴리는 실험을 수행한 후, Fig. 8과 같이 주령구를 굴리는 실험과 시뮬레이션 결과가 유사한 거동이 나오도록 계수들을 조정하였다. Table 3은 다물체 동역학 모델링을 위해 설정된 Parameter 값들을 나타낸다.

Table 3 Dynamic modelling parameters

Modelling Parameter	Value
Mass	121g
Friction coefficient	0.325
Contact stiffness	1000 N/mm
Force exponent	1.6
Damping coefficient	10 N sec/mm
Penetration depth	0.1mm
Plastic density	1.164 g/cm^3

Table 4 Simulation result of hexagonal face probability

Sim 1	Sim 2	Sim 3	Sim 4	평균
0.2390	0.2295	0.2525	0.2300	0.2407

Table 5 Results of hexagonal face probability

Reference(1)	Reference(2)	Reference(3)	Simulation in this paper	Experiment in this paper
0.2410	0.2405	0.2747	0.2407	0.2328

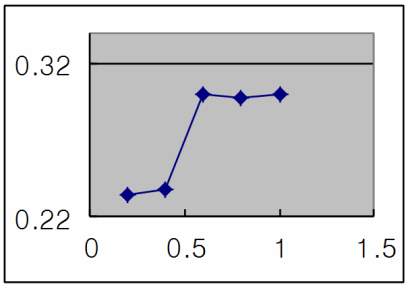


Fig. 9 Probability of hexagonal face according to friction coefficient

주령구에 가해지는 모멘트 및 각도 등 조건들을 바꿔가면서 바닥 면과의 마찰계수가 0.325인 상태로 Simulation한 결과, Table 4에 보인 바와 같이 육각면이 나올 평균확률은 24.07%로 나왔다. Table 5에는 참고문헌을 통한 기존 연구자들이 밝힌 육각면 나올 확률과 본 연구에서 Simulation한 결과 및 실험에 의한 결과를 비교하고 있다. Simulation결과는 기존 연구와 비슷하나, 실험 값은 약간의 차이를 보이고 있다.

바닥 면과의 마찰계수가 달라지면 육각면 나올 확률의 변화를 파악하고자 바닥과의 마찰계수를 바꾸면서 육각면이 나올 확률을 Simulation을 통해 구한 결과를 Fig. 9에 나타내었다. Fig. 9에 나타난 바와 같이, 바닥면 과의 마찰계수가 커지면 육각면 나올 확률이 0.3에 가까운 값으로 증가됨을 확인하였다. 이는 마찰계수가 높아지면 주령구가 미끄러지지 않고 들려 올려질 가능성이 높

아지며, 반대로 마찰계수가 낮아지면 미끄러지기가 쉬워 들려 올려질 확률이 감소하는 것으로 판단된다.

6. 결 론

본 연구에서는 운동에너지, 위치에너지, 바닥면과의 마찰에 의한 에너지 손실 등을 고려하여 14면체 주령구의 확률을 구하였다. 실험을 통해 육각면 나올 확률을 구한 뒤, 다물체동역학 모델링 및 simulation을 통하여 비교해 보았다. 기존 문헌들 보다는 에너지보존 및 손실 관점에서 더 물리적인 현상과 근접한 시도였다고 사료된다. 본 연구에서 얻어진 결과는 기존의 결과와 크게 다르지 않았으나, Simulation을 통하여 마찰계수의 변화에 따라 확률이 달라질 수 있음도 알 수 있었다.

후 기

이 논문은 부산대학교기본연구지원사업(2년)에 의하여 연구되었음.

참고문헌
(References)

(1) Hu, M.-H., 1994, “Probabilities for a Cuboctahedral Die,” *KJAS*, Vol. 1, pp. 113~119.
(2) Powers. D.L, 1994 “Probabilities for a Cuboctahedral Die,” *SAIM Review*, Vol. 36, pp. 109~111.
(3) Che, G.-C. and Lee, C.-S., 1995, “Mechanical Investigation Application Statistics Study About Probability of Cuboctahedral Die,” *KJAS*, Vol. 8, No. 2, pp. 179~185.
(4) Jang, D.-H., 2005, “Reinvestigation of Cuboctahedral Die,” *Korean Journal of Applied Statistics*, Vol. 18, No. 2, pp. 445~452.
(5) Kim, J. S., Choi, C. K. and Yoo, H. H., 2014, "Application of Excitation Moment for Enhancing Fault Diagnosis Probability of Rotating Blade," *Trans. Korean Soc. Mech. Eng. A*, Vol. 38, No. 1, pp. 205~210.
(6) Lee, J.-H. and Yoo, W.-S., 2008, "Multibody Dynamics Simulation of 14 Facepieces and Probability Study by Using Residual Moment," Proceedings of KSME Fall Meeting.
(7) MSC. Software, 2003, MSC ADAMS Technical Manual.