

2D 변형률 파손 이론을 이용한 복합재료의 굽힘 거동 해석

김진성[†] · 노진호 · 이수용

한국항공대학교, 항공우주 및 기계공학과

A Study on Bending Behaviors of Laminated Composites using 2D Strain-based Failure Theory

Jin-Sung Kim[†], Jin-Ho Roh and Soo-Yong Lee

School of Aerospace and Mechanical Engineering, Korea Aerospace University

Abstract

In this study, the bending analysis of composite laminates using the classical laminated theory is investigated. A piece-wise linear incremental approach is employed to describe the nonlinear mechanical behavior of the composite laminates, and a 2D strain-based interactive failure theory is employed to predict the ultimate flexural loads. The 3-point bending tests are performed for cross-ply and quasi-isotropic laminates. The analysis results with the failure theory are verified by comparing the analysis findings to the experimental outcome.

초 록

본 연구에서는 굽힘 하중을 받는 복합재료 적층판의 파손 해석을 위하여 2D 변형률 기반 파손 이론을 적용하였다. 복합재료 적층판의 비선형 기계적 거동을 모사하기 위하여, 선형 증분 접근 방식을 적용하고 단위 길이 적층판에 대한 점진적 파손 해석을 수행하였다. 크로스플라이 및 준등방성 적층 패턴에 대하여 3점 굽힘 시험을 수행하고 해석 결과와 비교 검증하였다.

Key Words : Composites(복합재료), Progressive Failure Analysis(점진적 파손 해석), 2D Strain based Interactive Failure Theory(2D 변형률 파손 이론), Flexural Loading(굽힘 하중)

1. 서 론

복합재료는 금속 재료에 비해 비강성 및 비강도가 우수하여 항공우주 및 자동차의 구조물에 사용 빈도가 증가하고 있다. 복합재료는 적층 배열을 달리하여 사용하고자 하는 구조물의 설계 요구 조건에 적합하도록 제작이 가능하다. 이러한 복합재료 구조물의 구조 안정성을 확보하기 위해서는 적층 배열 및 조건에 따라 구조물의 파손을 정확하게 예측할 수 있는 파손 기준

이 요구된다.

복합재료 구조물의 파손을 정확하게 예측하기 위하여 다양한 이론적 접근, 방법론 그리고 가정 등을 통해 많은 파손 이론이 개발되었다. Hinton[1]은 이러한 다양한 파손 이론들의 파손 예측 능력 및 차이점을 비교하기 위하여 WWFE(World-Wide Failure Exercise) 프로젝트를 수행하였다. 하지만 제시된 대부분의 파손 이론은 단축 또는 다축 면내 하중(in-plane loading)을 받는 복합재료 적층판에 대해서 실험 결과와 비교하는 연구가 수행되었다. 대부분의 파손 이론은 단축 하중에 의한 적층판의 first-ply 파손 개념에서 부분적 파손 예측이 가능하며, 다축 하중을 받는 복합재 적층

Received: Aug. 24, 2017 Revised: Sep. 26, 2017 Accepted: Sep. 29, 2017

[†] Corresponding Author

Tel: +82-2-300-0100, E-mail: jinsungkim83@naver.com

© The Society for Aerospace System Engineering

구조에 대한 최종 파손 예측의 정확도는 떨어진다. 굽힘 하중을 받는 복합재 적층판의 파손 예측 연구는 면내 하중 조건에 비해 상대적으로 드물게 이루어졌으며, 대부분 연구는 기존의 복합재 파손 이론을 적용하여 first-ply 파손 개념에 대해서 해석 연구를 수행하였다[2~4]. 이러한 연구들은 대부분 해외에서 수행되어지고 있으며 국내의 경우 굽힘 시험을 통한 굽힘 특성 평가 및 수치해석을 통한 하중 예측 연구 등이 이루어지고 있다[5~6].

복합재료 적층판은 가해지는 하중 조건에 따라 기계적 특성이 다르게 나타나기 때문에 면내(in-plane) 하중 조건에서 파손을 정확하게 예측하더라도 면외(out-of-plane) 하중 조건에서는 정확성이 떨어질 수 있다. 기존의 선행 연구는 면내 하중 조건에서 사용되는 파손 이론을 적용하고 있기 때문에 굽힘 하중에 의한 복합재료 적층판의 최대 하중을 예측하기에는 한계가 있다.

본 연구에서는 굽힘 하중을 받는 복합재료 적층판의 파손 예측을 위하여 2D 변형률 기반 파손 이론을 적용하고 각 층의 파손 모드에 따라 적층판의 강성 감소를 고려하여 선형증분 접근방식을 이용한 점진적 파손 해석(progressive failure analysis) 알고리즘을 구성하였다. 3점 굽힘 시험과 해석 결과의 비교를 통하여 파손 알고리즘의 정확성을 검증하였다.

2. 본 론

2.1 적층판 이론

복합재료 적층판에 가해지는 면외 하중 조건은 Fig. 1과 같으며, 2D 평면 응력 상태에 대하여 복합재료 적층판의 각 층에 대한 응력-변형률 관계는 Eq. (1)과 같다[7].

$$\sigma_i = Q_{ij}\epsilon_j \quad i, j = 1, 2, 6 \quad (1)$$

여기서, σ_i 는 응력, Q_{ij} 는 감소 강성 행렬(reduced stiffness matrix), 그리고 ϵ_j 은 변형률을 의미한다. Q_{ij} 는 Eq. (2)와 Eq. (3)으로 표현된다.

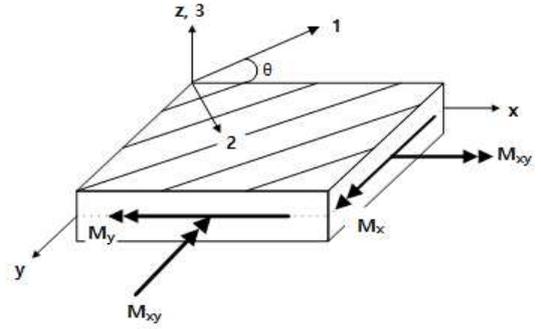


Fig. 1 Out-of-Loading Conditions of a Composite Laminates

$$Q_{11} = \frac{E_{11}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad Q_{22} = \frac{E_{22}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \quad (2)$$

$$Q_{12} = \frac{\nu_{12}E_{22}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad Q_{66} = G_{12} \quad (3)$$

여기서, E_{11} , E_{22} , 그리고 G_{12} 는 각각 축 방향 탄성계수, 횡 방향 탄성계수, 그리고 전단 계수를 의미하며, ν_{12} 및 ν_{21} 는 푸와송비를 나타낸다.

Figure 1과 같이 적층판에 가해지는 굽힘 하중(\mathbf{M})에 대한 구성방정식은 Eq. (4)와 같다.

$$\mathbf{M} = \mathbf{B}\epsilon^0 + \mathbf{D}\kappa \quad (4)$$

여기서, \mathbf{M} 은 적층판에 가해지는 굽힘 하중, \mathbf{B} 는 면내 강성과 굽힘 강성이 커플링된 강성 행렬, \mathbf{D} 는 굽힘 강성 행렬, 그리고 κ 는 곡률을 의미한다. \mathbf{B} 와 \mathbf{D} 는 Eq. (5)와 Eq. (6)으로 표현된다.

$$\mathbf{B} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \bar{\mathbf{Q}}^k (z_k^2 - z_{k-1}^2) \quad (5)$$

$$\mathbf{D} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^N \bar{\mathbf{Q}}^k (z_k^3 - z_{k-1}^3) \quad (6)$$

여기서, N 은 적층 수, z_k 및 z_{k-1} 은 적층판의 중립면으로부터 위치한 각 층의 윗면과 아랫면의 거리, 그리고 $\bar{\mathbf{Q}}$ 는 변환 감소 강성행렬(transformed reduced stiffness matrix)을 나타내는 것으로 Eq. (7)과 같다.

$$[\bar{Q}] = [T_1]^{-1}[Q][T_2] \quad (7)$$

여기서, $[T_1]$ 은 응력의 변환행렬, $[T_2]$ 는 변형률의 변환행렬로 Eq. (8)과 Eq. (9)로 표현된다.

$$[T_1] = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & 2mn \\ n^2 & m^2 & -2mn \\ -mn & mn & m^2 - n^2 \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$[T_2] = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & mn \\ n^2 & m^2 & -mn \\ -2mn & 2mn & m^2 - n^2 \end{bmatrix} \quad (9)$$

여기서, m 은 $\cos\theta$, n 은 $\sin\theta$ 를 의미하며, θ 는 Fig. 1에서 보이듯이 재료의 적층각을 의미한다.

2.2 파손 이론

본 연구에서는 굽힘 하중을 받는 복합재료 적층판의 파손 예측을 위하여 2D 변형률 기반 파손이론을 적용하였다. 2D 변형률 기반 파손 이론은 면내 하중 조건을 받는 다방향 적층판에 대해서 정확한 파손 예측이 가능하다고 알려져 있으며, 최대 변형률 이론을 응용하여 각 방향의 변형률을 이용하여 2차 함수의 형태로 Eq. (10)과 같이 표현된다[8].

$$G_{11}\epsilon_1^2 + G_1\epsilon_1 + \alpha(G_{22}\epsilon_2^2 + G_2\epsilon_2) + G_{66}\epsilon_6^2 = 1 \quad (10)$$

여기서, G 와 α 는 상수로써 다음 Eqs. (11) ~ (14)로 정의된다.

$$G_{11} = \frac{1}{\epsilon_{1t}\epsilon_{1c}}, \quad G_1 = \frac{1}{\epsilon_{1t}} - \frac{1}{\epsilon_{1c}} \quad (11)$$

$$G_{22} = \frac{1}{\epsilon_{2t}\epsilon_{2c}}, \quad G_2 = \frac{1}{\epsilon_{2t}} - \frac{1}{\epsilon_{2c}} \quad (12)$$

$$G_{66} = \frac{1}{\epsilon_s^2} \quad (13)$$

$$\alpha = \frac{U_2}{U_1} = \frac{E_{22}\epsilon_{2t}^2}{E_{11}\epsilon_{1t}^2} \quad (14)$$

여기서, ϵ_{1t} 와 ϵ_{1c} 는 각각 축방향의 인장 및 압축 파단

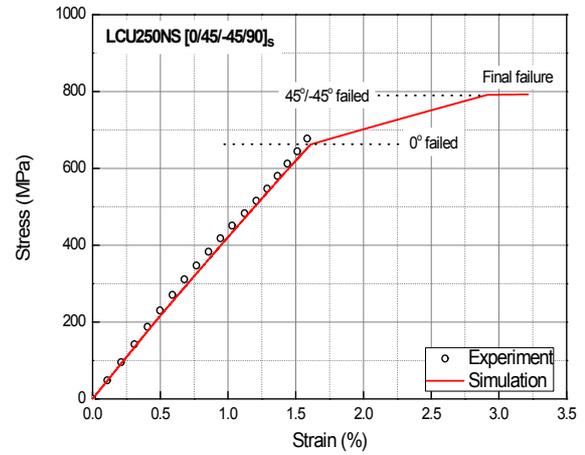


Fig. 2 Stress-strain Curve for Progressive Failure

변형률, ϵ_{2t} 와 ϵ_{2c} 는 각각 가로 방향의 인장 및 압축 파단 변형률, ϵ_s 는 전단 파단 변형률, 그리고 E_{11} 과 E_{22} 는 각각 축 방향과 가로 방향의 탄성계수를 의미한다.

굽힘 하중에 따른 복합재료 적층판의 강성저하는 각 층의 축 방향, 횡 방향, 그리고 면내 전단 파손 모드에 따라 평가되며 각각의 파손 모드는 Eqs. (15) ~ (17)로 표현된다.

$$G_{11}\epsilon_1^2 + G_1\epsilon_1 < 1 \quad (15)$$

$$G_{22}\epsilon_2^2 + G_2\epsilon_2 < 1 \quad (16)$$

$$G_{66}\epsilon_6^2 < 1 \quad (17)$$

Figure 2는 2D 변형률 파손 이론을 적용하여 단축 인장 하중을 받는 다방향 탄소섬유 복합재 적층판에 대한 해석 결과를 보여준다. 시험 데이터는 본 연구에 사용된 탄소섬유 복합재료의 기본 물성 데이터를 검증하기 위하여 수행한 준등방성 적층패턴에 대한 인장 시험 결과를 이용하였다. 적층판 내 0° 방향의 적층 구간에서 파손이 발생한 이후에 응력-변형률 선도의 기울기가 급격하게 변화하는 것을 볼 수 있다. 이는 0° 방향의 플라이 파손 이후, $\pm 45^\circ$ 플라이에 의한 전단 비선형 효과의 영향으로 판단된다.

2.3 수치해석

복합재 적층판은 가해지는 하중에 의해 특정 적층 구간에서 파손이 발생함으로써 적층판의 강성 저하 및 비선형 재료거동이 나타나게 된다. 따라서, 복합재 적층판의 강성 저하 및 재료 비선형을 고려하여 단계적 선형증분 접근방식(piece-wise linear incremental approach)을 적용하였다. 이를 통해 각 하중 단계에서 적층판 내의 각 층에서의 증분 하중(ΔM)에 따른 응력 및 변형률은 다음 Eqs. (18) ~ (20)과 같이 계산된다.

$$\Delta \bar{\epsilon} = \mathbf{b} \Delta M + \mathbf{d} \Delta M \quad (18)$$

$$\Delta \epsilon = \mathbf{T}_\epsilon \Delta \bar{\epsilon} \quad (19)$$

$$\Delta \sigma = \mathbf{Q} \Delta \epsilon \quad (20)$$

여기서, \mathbf{b} 와 \mathbf{d} 는 각각 \mathbf{B} 와 \mathbf{D} 의 컴플라이언스 텐서, \mathbf{T}_ϵ 은 변형률의 변환행렬, 그리고 \mathbf{M} 은 굽힘 하중이다.

임의의 i 번째 단계에서 증분 응력 및 변형률 계산이 완료되면 $i+1$ 번째 단계의 로컬 응력, 로컬 변형률, 그리고 하중은 다음과 같이 계산된다.

$$\sigma^{i+1} = \sigma^i + \Delta \sigma \quad (21)$$

$$\epsilon^{i+1} = \epsilon^i + \Delta \epsilon \quad (22)$$

$$M^{i+1} = M^i + \Delta M \quad (23)$$

임의의 $i+1$ 번째의 응력 및 변형률 계산이 완료되면 Eq. (10)으로 표현되는 파손 이론에 따라 적층판 내의 각층에 대하여 파손 모드가 계산된다.

굽힘 하중에 의해 복합재료 적층판 내에 파손이 발생할 경우 파손 위치에 따라 적층판이 받을 수 있는 하중의 크기가 달라진다. 본 논문에서는 적층판의 중립축을 기준으로 적층판에 가해지는 증분 하중의 크기를 달리하였으며, 중립축 아래쪽에서 파손되는 경우에는 Eq. (24), 중립축 위쪽에서 파손되는 경우에는 Eq. (25)와 같이 증분하중이 계산되도록 하였다.

$$\Delta M = -M^i \left(1 - \left(\frac{h_1}{h} \right)^3 \right) \quad (24)$$

$$\Delta M = -M^i \left(1 - \left(\frac{h_2}{h} \right)^3 \right) \quad (25)$$

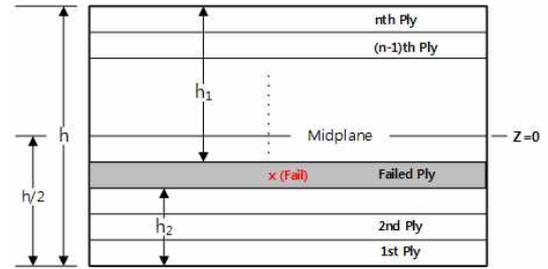


Fig. 3 Cross Section of the Laminated Composites

여기서, h 는 적층판의 전체 두께, h_1 은 중립축으로부터 윗면까지의 높이, 그리고 h_2 는 중립축으로부터 아랫면까지의 높이를 의미한다.(Fig. 3)

2.2 재료 물성치

복합재 적층판의 굽힘 하중에 의한 파손 예측을 위한 수치해석에 적용한 재료의 기계적 물성은 기본 물성 시험을 통해 산출하였으며 Table 1에 나타내었다.

본 연구에 사용된 탄소 섬유 면내 전단 하중 하에서 나타나는 재료 비선형 특성을 고려하기 위해 Eq. (26)으로 표현되는 Ramberg-Osgood 방정식을 이용하였다[9].

$$E_t = \frac{d\sigma}{d\epsilon} = \frac{E_0 \epsilon}{\left(1 + \left(\frac{E_0 \epsilon}{\sigma_0} \right)^n \right)^{1 + \frac{1}{n}}} \quad (26)$$

여기서, E_0 는 초기 탄성계수, σ_0 는 점근(asymptotic) 응력, 그리고 n 은 응력-변형률 선도에 대한 형상 변수이다.

Ramberg-Osgood 변수는 Table 2에 나타내었다.

2.3 굽힘 시험

점진적 파손 예측 알고리즘을 이용한 해석 결과와 비교를 위하여 3점 굽힘 시험을 수행하였다. 시험 시편은 탄소섬유 복합재료(LCU250NS, 한국카본 社)을 이용하여 준등방성(quasi-Isotropic) 적층 패턴 $[0/\pm 45/90]_{2s}$ 와 크로스 플라이(cross-ply) 적층 패턴 $[0/90]_{16}$ 으로 제작하였다.

Table 1 Mechanical Properties of Composite

Properties	Unit	Value
E_{11}	GPa	113
E_{22}	GPa	8.2
G_{12}	GPa	3.88
ν_{12}	-	0.33
σ_{1t}	MPa	2005
σ_{1c}	MPa	966
σ_{2t}	MPa	39
σ_{2c}	MPa	162
τ_{12}	MPa	68
ϵ_{1t}	%	1.61
ϵ_{1c}	%	0.96
ϵ_{2t}	%	0.48
ϵ_{2c}	%	1.81
ϵ_s	%	5

1: Longitudinal, 2: Transverse
t: Tension, c: Compression, s: Shear

Table 2 Ramberg-Osgood Parameters

G_0 (GPa)	τ_0 (MPa)	n
3.88	68	2.26

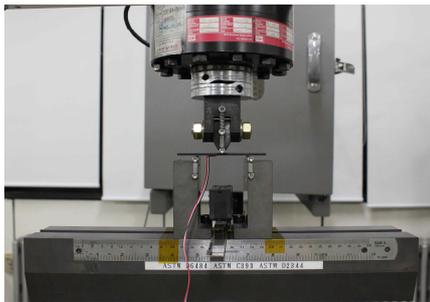


Fig. 4 3-point Bending Test

Table 3 Geometrical Dimensions of Specimens

Stacking Sequence	[0/±45/90]	[0/90]
Width (mm)	10	10
Thickness (mm)	3.4	3.6
Span length (mm)	55	55

굽힘 시험은 MTS 810을 이용하여 ASTM D790[10]의 시험 규격에 따라 진행하였다(Fig. 4). 시편 하단에 스트레인 게이지를 부착하여 축방향의 변형률을 측정하였다. 시편 사양 및 스펠 길이는 Table 3과 같다.

3. 결 과

2D 변형률 파손 이론 및 선형 증분 접근 방식을 이용한 파손 해석 알고리즘을 통해 준등방성 및 크로스플라이 적층 패턴을 가지는 탄소 섬유 복합재료 적층판에 대한 해석 결과를 실험 결과와 비교하였다. Figure 5는 준등방성 적층패턴, Fig. 6은 크로스플라이 적층패턴에 대한 실험 및 해석 결과이다.

본 연구에서 적용된 해석 알고리즘은 고전 적층판 이론을 기반으로 굽힘 하중과 변형률이 계산된다. 따라서, 시편에 부착된 스트레인게이지를 통해 측정된 변형률과 Eq. (27)를 통해 산출된 하중을 이용하여 시험 및 해석 결과를 비교하였다.

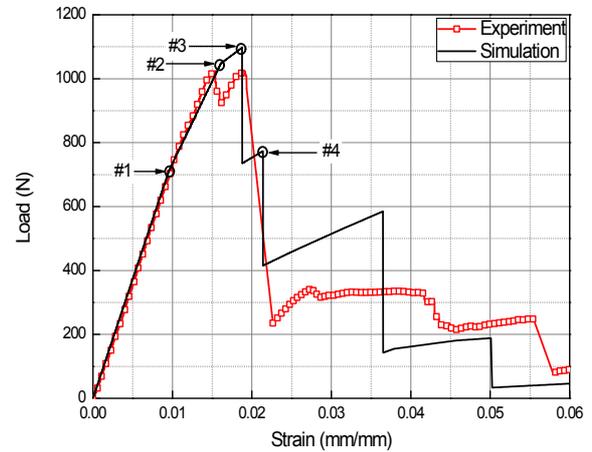


Fig. 5 Load-strain Curves for Quasi-isotropy

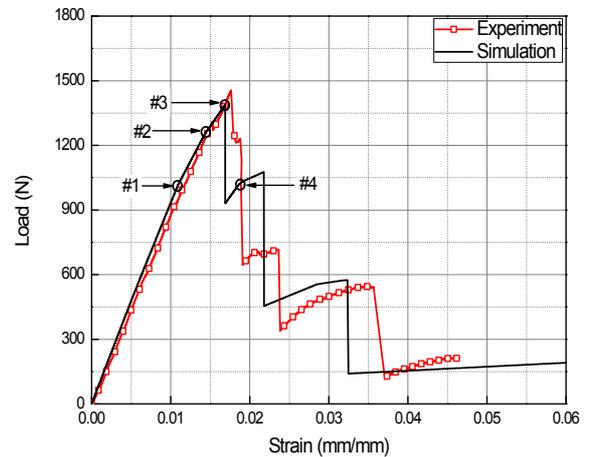


Fig. 6 Load-strain Curves for Cross-ply

$$M_x = \frac{PL}{4b}, \quad P = \frac{4M_x b}{L} \quad (27)$$

여기서, P는 하중, L은 스패 길이, 그리고 b는 시험 시편의 폭이다.

Figure 5와 Fig. 6에서 점진적 파손 해석 알고리즘을 사용한 해석 결과가 적층판의 적층 패턴에 상관없이 최대 하중을 잘 예측하는 것을 확인할 수 있다. 실험 결과에서 보이듯이 최대 하중 도달 이후 적층판이 최종 파손에 이를 때까지 하중 증가 및 감소가 반복적으로 나타나는 것을 확인할 수 있으며, 해석 결과 역시 시험 결과와 유사한 경향을 나타냄을 확인할 수 있다.

Table 4는 최대 하중에 이를 때까지 적층판 내의 부분 파손을 예측한 결과이다. 준등방성 및 크로스 플라이 적층패턴 모두 중립축을 기준으로 가장 아래에 위치한 층에서 첫 번째 부분 파손이 발생하는 것을 확인할 수 있다. 두 번째 부분 파손의 위치는 적층판에 따라 다르게 나타나지만 파손이 발생하는 플라이의 방향은 동일함을 알 수 있으며, 두 가지 적층 패턴 모두 세 번째 부분 파손 발생 시 최대 하중에 도달함을 확인할 수 있다.

Table 4 Analysis Results of Failure Loads

Failure Sequence	Quasi-isotropy		Cross-ply	
	Load (N)	Ply angle(°)/Layer	Load (N)	Ply angle(°)/Layer
# 1	715	0 (1)	982	0 (1)
# 2	1048	0 (16)	1207	0 (3)
# 3	1097	45 (2)	1358	90 (2)
# 4	774	-45 (3)	996	0 (15)

Table 5 Comparison of Ultimate Load for Experiment and Analysis

Quasi-isotropy		Cross-ply	
Experiment (N)	Analysis (N)	Experiment (N)	Analysis (N)
965	1097	1450	1358

Table 5는 실험 및 해석에 대한 최대 굽힘 하중을 비교하여 나타내었다. 시험 및 해석에 대한 최대 하중을 비교한 결과 준등방성 적층패턴에 대해서는 약 15%, 크로스플라이 적층 패턴에 대해서는 약 6%의 오차를 나타내었다. 준등방성 적층 패턴의 경우에는 크로스 플라이 적층 패턴에 비해 오차가 상대적으로 크게 발생하였다. 이는 Fig. 5에서 보이듯이 최대 하중 도달 이전에 하중-변형률 기울기가 상대적으로 크게 줄어드는 경향을 확인할 수 있으며, Table 4의 부분 파손 해석 결과에 나타난 것처럼 45° 플라이의 파손 모드에 의해 의한 것으로 판단된다. 앞선 인장 하중을 받는 다방향 적층 패턴의 해석 결과에서 보여준 45° 플라이의 전단 비선형 효과의 영향으로 인해 오차가 상대적으로 커진 것으로 판단된다.

4. 결 론

본 연구에서는 굽힘 하중을 받는 복합재 적층판의 파손을 예측하기 위하여 타 이론에 비해 면내 다축 하중을 받는 다방향 복합재 적층판의 파손을 정확히 예측할 수 있는 2D 변형률 기반 파손이론을 적용하였다. 복합재 적층판의 파손 해석을 위하여 고전 적층판 이론을 적용하고 점진적 파손 해석을 위해 선형 증분 접근 방식을 적용하였다. 탄소섬유 복합재를 이용하여 준등방성 및 비대칭 적층판에 대하여 3점 굽힘 시험을 수행하고 해석 결과와 비교 하였다. 적층 패턴에 상관없이 상대적으로 최대 하중을 잘 예측하는 경향을 보여주었으며, 최대 하중 이후에 발생하는 기계적 거동 특성 또한 시험 결과와 유사한 경향을 나타냄을 확인하였다.

후 기

본 연구는 2017년도 정부의 지원으로 한국연구재단의 지원을 받아 수행된 우주핵심기술개발사업의 일환으로 수행되었습니다.

(NRF-2017M1A3A3A02016484)

References

and Electrical Insulating Materials,” *Annual Book of ASTM Standard*, 2013.

- [1] M. J. Hinton, A. S. Kaddour, and P. D. Soden, “A Comparison of the Predictive Capabilities of Current Failure Theories for Composite Laminates; Comparison with Experimental Evidence,” *Composite Science Technology*, vol. 62, pp. 1725-1798, Sep 2002.
- [2] R. Greif and E. Chapon, “Investigation of Successive Failure Modes in Graphite/epoxy Laminated Composite Beams,” *Journal of Reinforced Plastics and Composites*, vol. 12, no. 5, pp. 602-621, May 1993.
- [3] T. Y. Kam, and T. B. Jan, “First-ply Failure Analysis of Laminated Composite Plates based on the Layerwise Linear Displacement Theory,” *Composite Structures*, vol. 32, pp. 583-591, 1995.
- [4] B. G. Prusty, S. K. Satsangi and C. Ray, “First Ply Failure Analysis of Laminated Panels under Transverse Loading,” *Journal of Reinforced Plastics and Composites*, vol. 20, no. 8, pp. 671-684, Feb 2001.
- [5] C. D. Gong, H. B. Park and S. J. Lim, “A Study on 4 Point Bending Strength of Aircraft Composite Specimens,” *Journal of Aerospace System Engineering*, vol. 4, no. 1, pp. 23-26, Mar 2010.
- [6] S. Y. Lee, “Critical Buckling Loads of Laminated Composites under Cylindrical Bending,” *Aerospace System Engineering*, vol. 1, no. 4, pp. 28-36, Dec 2007.
- [7] C. T. Heracovich, *Mechanics of Fibrous Composites*, John Wiley & Sons, Inc., 1998.
- [8] S. Y. Lee and J. H. Roh, “Two-dimensional Strain-based Interactive Failure Theory for Multidirectional Composite Laminates,” *Composite Part B*, vol. 69, pp. 69-75, Feb 2015.
- [9] R. M. Richard, “Finite Element Analysis of Inelastic Structures,” *AIAA Journal*, vol. 7, pp. 432-438, 1969.
- [10] ASTM D790-13, “Standard Test Methods for Flexural Properties of Unreinforced and Reinforced Plastics