

## 확률적 희소 신호 복원 알고리즘 개발

성진택\*

### Development of A Recovery Algorithm for Sparse Signals based on Probabilistic Decoding

Jin-Taek Seong\*

**요약** 본 논문은 유한체(finite fields)에서 압축센싱(compressed sensing) 프레임워크를 살펴본다. 하나의 측정 샘플은 센싱행렬의 행과 희소 신호 벡터와의 내적으로 연산되며, 본 논문에서 제안하는 확률적 희소 신호 복원 알고리즘을 이용하여 그 압축센싱의 해를 찾고자 한다. 지금까지 압축센싱은 실수(real-valued)나 복소수(complex-valued) 평면에서 주로 연구되어 왔지만, 이와 같은 원신호를 처리하는 경우 이산화 과정으로 정보의 손실이 뒤따르게 된다. 이에 대한 연구배경은 이산(discrete) 신호에 대한 희소 신호를 복원하고자 하는 노력으로 이어지고 있다. 본 연구에서 제안하는 프레임워크는 센싱행렬로써 코딩 이론에서 사용된 LDPC(Low-Density Parity-Check) 코드의 패리티체크 행렬을 이용한다. 그리고 본 연구에서 제안한 확률적 복원 알고리즘을 이용하여 유한체의 희소 신호를 복원한다. 기존의 코딩 이론에서 발표한 LDPC 복호화와는 달리 본 논문에서는 희소 신호의 확률분포를 이용한 반복적 알고리즘을 제안한다. 그리고 개발된 복원 알고리즘을 통하여 우리는 유한체의 크기가 커질수록 복원 성능이 우수한 결과를 얻었다. 압축센싱의 센싱행렬이 LDPC 패리티체크 행렬과 같은 저밀도 행렬에서도 좋은 성능을 보여줌에 따라 이산 신호를 고려한 응용 분야에서 적극적으로 활용될 것으로 기대된다.

**Abstract** In this paper, we consider a framework of compressed sensing over finite fields. One measurement sample is obtained by an inner product of a row of a sensing matrix and a sparse signal vector. A recovery algorithm proposed in this study for sparse signals based probabilistic decoding is used to find a solution of compressed sensing. Until now compressed sensing theory has dealt with real-valued or complex-valued systems, but for the processing of the original real or complex signals, the loss of the information occurs from the discretization. The motivation of this work can be found in efforts to solve inverse problems for discrete signals. The framework proposed in this paper uses a parity-check matrix of low-density parity-check (LDPC) codes developed in coding theory as a sensing matrix. We develop a stochastic algorithm to reconstruct sparse signals over finite field. Unlike LDPC decoding, which is published in existing coding theory, we design an iterative algorithm using probability distribution of sparse signals. Through the proposed recovery algorithm, we achieve better reconstruction performance as the size of finite fields increases. Since the sensing matrix of compressed sensing shows good performance even in the low density matrix such as the parity-check matrix, it is expected to be actively used in applications considering discrete signals.

**Key Words** : Compressed Sensing, Finite Fields, Probabilistic Decoding, Sparse Signal

#### 1. 서론

최근 들어 압축센싱(compressed sensing)의 늘

라운 연구성과는 신호처리와 정보 이론 분야뿐만 아니라 관련 응용 분야에서 수많은 연구자들을 중심으로 큰 관심을 이끌었다. 압축센싱은 임의의 변

\*Corresponding Author : Department of Information and Communication Engineering, Honam University (jtseong@honam.ac.kr)  
 Received September 27, 2017                      Revised October 17, 2017                      Accepted October 22, 2017

환 도메인(transformation domain)에서 희소(sparse) 신호에 대해 적은 수의 측정 샘플로 원래의 신호를 복원하는 것을 말한다[1]. 그리고 희소 신호의 복원은 최적화 문제로써 정의될 수 있으며, 대부분의 경우 greedy 알고리즘이나 L1 최소화 방법을 이용하여 압축센싱 문제를 해결하였다. 또한 기존의 압축센싱은 신호의 차원(dimension) 분석을 실수(real-valued)나 복소수(complex-valued) 평면에서 문제를 해결하려 하였다. 그러나 이미지 처리나 정보 저장 등과 같은 이산 신호(discrete signal)를 다루고자 한다면, 기존의 압축센싱 복원 알고리즘만으로는 그 활용의 효율성이 낮다. 왜냐하면 실수부를 이산화하는 과정에서 일부의 원신호 정보가 손실되고 신호처리의 복잡성이 증가되기 때문에 실수 체계 신호처리 시스템은 이산 신호로 변환된 프레임워크를 생각해 볼 수 있다. 그러므로 희소 신호 복원을 위한 알고리즘도 디지털 신호처리 개념의 프레임워크가 고려되어야 한다. 뿐만 아니라 지금까지 개발된 압축센싱 복원 알고리즘은 신호의 이산 특성을 고려하지 않고 개발된 경우가 대부분이었다. 우리는 앞서 언급한 이산 신호에 대한 희소 신호 복원 방법을 고려할 필요가 있으며, 이러한 도전 과제는 본 논문의 연구배경이 된다. 구체적으로 본 논문에서는 유한체(finite fields)에 대한 압축센싱의 희소 신호 복원 알고리즘을 제안하고 이에 대하여 모의시험을 수행하여 그 성능을 평가하고자 한다.

코딩 이론(coding theory)에서 저밀도 패리티체크(Low-Density Parity-Check : LDPC) 코드 [2]와 같은 선형 코드(linear codes)는 기존에는 해결할 수 없었던 센싱행렬의 설계나 신호 복원 방법 등의 새로운 압축센싱 프레임워크를 제공해 주기 때문에 관련 연구자들로부터 큰 관심을 받아 왔다. 지금까지 유한체 상에서 압축센싱에 대한 의미있는 연구성과는 미미하였지만, 거의 대부분의 압축센싱 연구는 실수나 복소수 평면에서 연구가 진행되었음을 알 수 있다. 실수나 복소수 기반의 시스템에서 센싱 및 측정으로 인한 실수 신호(real-valued signal)의 이산화는 신호의 정확성 손

실을 초래한다. 그러나 유한체를 통한 연산은 이러한 단점을 극복할 수 있다.

유한체에서 압축센싱 프레임워크에 대한 관련 연구성과는 다음과 같이 정리된다. 희소 신호 복원을 위한 한계치는 논문 [3]과 [4]에서 발표하였다. 유한 요소에 대한 압축센싱 프레임워크를 고려한 논문 [4]의 저자는 오류 지수 기법을 사용하여 이론적인 복원 가능한 성능 한계치를 보여 주었다. 여기서 저자는 무작위(random) 센싱행렬을 고려하여 오류 확률을 얻었다. 논문 [3]의 저자는 유한한 영역에 걸쳐 희소 신호의 복원을 위한 이론적인 성능 한계치를 보여 주었다. 유한체에 대한 압축센싱 프레임워크의 경우, 희소 신호를 완벽하게 복원하기 위한 필요충분조건은 논문 [3]에서 보여 주었다. 여기서 논문 [3]은 L0 최소화를 이용하여 고밀도 센싱행렬과 저밀도 센싱행렬 간의 복원 성능의 차이가 없는, 즉 서로 간의 성능 한계치가 일치함을 보여주었다. 논문 [3]과 [4]의 연구결과는 대부분 이론적인 결과를 보여주었지만, 논문 [5]의 저자는 패리티체크 행렬을 이용하여 이산값을 갖는 이미지에 대하여 선형 복원방법을 제시하였다. 논문 [6]에서 저자는 기존의 압축센싱에서 제안된 OMP(Orthogonal Matching Pursuit) 알고리즘을 변형하여 유한체에서 압축센싱 이미지 복원 알고리즘을 개발하기 위해 F2OMP(Finite Field OMP)를 제안하였다. 또한 논문 [7]에서 저자는 네트워크 코딩 문제를 해결하기 위해 유한체에서 희소한 무작위 네트워크 전달 행렬을 이용하여 희소 신호 복원 프레임워크를 제안했다.

본 논문에서 하나의 측정 샘플은 센싱행렬의 행과 희소 신호 벡터와의 내적으로 연산되며, 희소 신호는 본 연구에서 제안하는 확률적 희소 신호 복원 알고리즘을 이용하여 그 해를 찾는다. 이것은 코딩이론에서 언급한 선형 코드와 비교하여 신드롬 복호화와 매우 유사하다. 다시 말하면, 패리티체크 행렬과 수신 신호 벡터를 곱하여 얻은 신드롬 방정식으로부터 희소 오류 패턴을 찾는다. 이러한 사실로부터 우리는 유한체에서 센싱행렬로써 패리티체크 프레임워크를 활용하여 원래의 희소 신

호를 복원하고자 한다. 특히 우리는 Gallager의 패리티체크 행렬[2]을 활용하고, 압축센싱 희소 신호 복원 프레임워크에 대한 확률적 복호화 방법으로 확장한다. 예를 들어, 유한체에서 저밀도 패리티체크 행렬은 센싱행렬로써 이용한다. 그리고 제안하는 유한체 희소 신호 복원 프레임워크는 이산 신호를 복원하는 데에도 활용할 것이다. 마지막으로 신호의 희소성은 확률적 복원 알고리즘의 원신호의 확률분포와 반복 알고리즘의 초기값을 제공한다.

본 논문은 다음과 같이 구성되어 있다. 2장에서는 유한체에서 압축센싱 프레임워크를 설명하기 위해 시스템을 정의하고, 또한 본 연구에서 제안하는 프레임워크와 신드롬 복호화와의 관련성을 다루고자 한다. 그리고 3장에서는 희소 신호 복원을 위한 확률적 복호화 알고리즘을 그래프 기반 하에 제안한다. 측정 샘플의 수와 신호의 희소성에 따라 성능을 평가하고 그 결과를 4장에서 보여준다. 끝으로 5장에서는 결론을 제시하여 본 연구결과의 의의를 전달하고자 한다.

## 2. 유한체에서 압축센싱 프레임워크

### 2.1 시스템 정의

다음으로 우리는 본 절에서 유한체 크기가  $q$ 인,  $\{0, 1, \dots, q-1\}$ , 압축센싱 프레임워크를 정의한다. 신호 벡터  $x \in \{0, 1, \dots, q\}^N$ 는 크기가  $N$ 이고 희소성(sparsity)  $K$ 를 갖으며, 센싱행렬  $A \in \{0, 1, \dots, q\}^{M \times N}$ 는 크기가  $M \times N$ 이다. 여기서 압축센싱의 일반적인 정의와 같이  $M < N$ 을 고려한다. 측정 신호  $y \in \{0, 1, \dots, q-1\}^M$ 는 다음과 같이 정의된다.

$$y = Ax \tag{1}$$

우리는 본 논문에서 신호  $x$ 의 각 원소가 다음의 확률분포를 갖는다고 가정한다.

$$\Pr\{x_i = \alpha\} = \begin{cases} 1 - \delta & \text{for } \alpha = 0 \\ \delta / (q - 1) & \text{for } \alpha \neq 0 \end{cases} \tag{2}$$

여기서  $x_i$ 는 신호 벡터  $x$ 의  $i$ 번째 원소이고,  $\delta = K/N$ 는 희소율(sparsity ratio)이며,  $\alpha \in \{0, 1, \dots, q-1\}$ 는 추가적인 랜덤 변수이다.

본 논문에서는 센싱행렬  $A$ 를 설계하기 위해 희소 행렬(sparse matrix)을 이용한다. 구체적으로 센싱행렬  $A$ 는 Gallager[2]가 코딩 이론에서 제안한 LDPC 코드의  $(d_c, d_v)$  패리티체크 행렬로부터 얻을 수 있다. 여기서 센싱행렬의 각 열과 행은 각각 균일하게  $d_c$ 와  $d_v$ 개의 0이 아닌 원소를 갖는다. 덧붙이자면 본 연구의 모든 곱셈과 덧셈연산은 유한체에서 수행된다.

### 2.2 신드롬 복호화와의 관계

코딩 이론은 통신의 신뢰성을 높이기 위해 오류정정(error correction) 기술을 이용한다. 대부분의 오류정정은 원래의 신호에 패리티 비트를 덧붙여서 구현한다. 예를 들어 유한체에서 코드북  $C$ 로부터 크기가  $n$ 인 하나의 코드워드  $c$ 를 선택한다고 가정하자. 그리고 이 코드워드는 잡음이 있는 채널을 통해 전송된다. 수신기는 잡음( $w$ )이 섞인 코드워드  $\hat{c} = c + w$ 를 받는다. 그리고 수신기는 수신된 코드워드  $\hat{c}$ 와 코드북  $C$ 로부터 검출기를 이용하여 원래의 코드워드  $c$ 를 찾는다. 이때 코드북  $C$ 는 패리티체크 행렬  $H$ 에 의해 다음의 조건  $Hc = 0$ 이 만족될 수 있도록 코드워드  $c$ 를 생성한다.

수신측에서는 다음과 같은 신드롬 복호화(syndrome decoding) 과정을 수행한다. 신드롬  $r$ 은 다음의 관계식  $Hc = 0$ 을 만족하기 때문에  $r = H\hat{c} = H(c + w) = Hw$ 과 같이 쓸 수 있다. 이것은 패리티체크 행렬  $H$ 와 신드롬  $r$ 로부터 정확한 에러 패턴  $w$ 를 찾는 것과 동일하다. 위의  $r = Hw$  관계식은 압축센싱 이론의 문제 형태와 유사하다. 다만, 차이점이 있다면 기존의 압축센싱은 실수 체계(real-valued)에서 수행되는 반면에 신드롬 복호화 과정은 유한체에서 수행된다. 코딩 이론에서 말하는 코드북  $C$ 의 에러정정 능력은 코드워드 사이의 최소 거리(minimum distance)로부터 결정되며, 이것을 소위 최소 해밍 거리(Hamming distance)

라고도 부른다. 압축센싱이 희소 신호를 복원하는 문제라는 것을 상기한다면, 위의 최소 해밍 거리는 압축센싱에서 복원 가능한 최대  $K$ 와의 관계를 말해주고 있다. 더 자세한 코딩 이론과 압축센싱과의 관한 연구는 논문 [8]과 [9]에서 상세히 논의하고 있다.

### 3. 희소 신호 복원을 위한 알고리즘

#### 3.1 최대 사후 확률 검출

이번 장은 유한체에서 압축센싱 프레임워크에 대한 확률적 복원 알고리즘을 제안한다. 이를 위해서 신호  $x$ 의 확률분포를 이용하여 최대 사후 확률 검출(Maximum A Posteriori : MAP) 방법을 고려한다. 그래서 신호  $x$ 의 각 원소  $x_i$ 에 대한 사후 확률이 최대가 되도록 다음과 같이 정의된다.

$$\hat{x}_i := \operatorname{argmax} \Pr\{x_i = \alpha | y, A\} \quad (3)$$

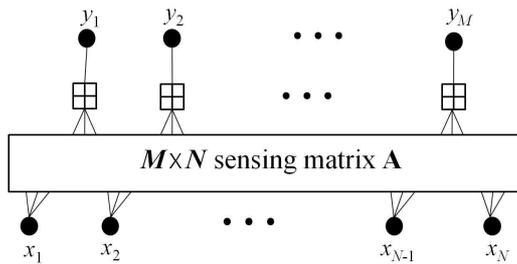


그림 1. 신호  $x$ , 센싱행렬  $A$ , 측정 신호  $y$ 에 대한 그래프를 이용한 표현.

Fig. 1. Graph representation for a signal  $x$ , a sensing matrix  $A$ , and a measured signal  $y$ .

이때 신호의 각 원소  $x_i$ 가 식 (3)의 최대 사후 확률이 최대가 되는  $\alpha \in \{0, 1, \dots, q-1\}$ 를 결정한다.

우리는 신호  $x$ , 센싱행렬  $A$ , 측정 신호  $y$ 를 그래프를 이용하여 표현한다. 그림 1은 이것을 그래프로 표현한 형태이다. 먼저 그래프는 노드와 에지로 구성되어 있으며, 센싱행렬의 각 원소에 대한 계수(coefficient)와 밀접한 관련이 있다. 예를 들어 원소의 값이 0이 아닐 경우에는 센싱행렬의 각 행

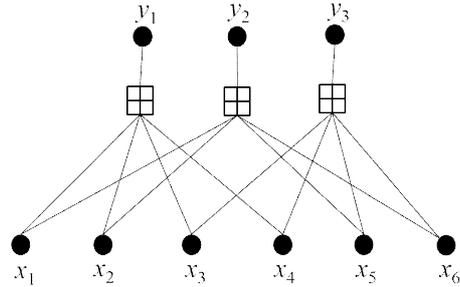


그림 2.  $q=4, N=6, M=3$ 일 때, 센싱행렬  $A$ 에 대한 그래프 표현의 예.

Fig. 2. One example of graph representation for a sensing matrix with  $q=4, N=6, M=3$ .

과 열에 대응하는 신호  $x$ 와 측정 신호  $y$  사이에 에지(edge)가 형성된다. 다시 말하면, 임의의 측정 신호  $y_j$ 와 신호  $x_i$  사이에 에지가 형성된 경우는 센싱행렬  $j$ 번째 행과  $i$ 번째 열의 원소  $A_{ji}$ 가 0이 아닌 계수가 있다. 만약에 센싱행렬 원소  $A_{ji}$ 가 0이면  $y_j$ 와  $x_i$  사이에는 에지가 없다.

그림 2는  $q=4, N=6, M=3$ 일 때, ( $d_c=2, d_v=4$ ) 센싱행렬  $A$ 에 대하여 그래프 표현 방법을 이용한 예제를 보여준다. 그림 2에서 보여준 바와 같이 센싱행렬의 각 행과 열에 대응하는 신호  $x$ 와 측정 신호  $y$  사이에 에지가 존재한다. 여기서 측정 신호  $y$ 는 각 노드당 4개의 에지가 각각 존재하고 있으며, 신호  $x$ 는 노드당 2개의 에지가 균일하게 분포하고 있다. 이에 대한 센싱행렬  $A$ 는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (4)$$

이때 센싱행렬  $A$ 의 원소가 0이 아닐 경우 이에 대응하는 신호  $x$ 와 측정 신호  $y$  사이에 에지가 존재하며 이 원소는 0이 아닌 값  $A_{ij} \in \{1, 2, 3\}$ 으로 표현된다.

본 논문에서 제안하는 확률적 복원 알고리즘을 설명하기 위해서 두 개의 기생 확률(extrinsic

probability)에 대한 그래프 모델을 이용하여 다음과 같이 정의한다. 하나는  $j$ 번째 원소  $y_j$ 에서  $i$ 번째 원소  $x_i$ 로 전달하는 기생 확률  $\mu_{ji}$ 이고 다른 하나는  $i$ 번째 원소  $x_i$ 에서  $j$ 번째 원소  $y_j$ 로 전달하는 기생 확률  $\mu_{ij}$ 이다. 여기서 두 개의 기생 확률은 신호  $x$ 와  $y$  사이 그래프의 에지가 형성된 경우에만 서로 간에 교환하는 확률 분포임을 의미한다.

우리는 위와 관련된 기존의 연구결과에 대해 논의를 하고자 한다. 실수체계 기반의 압축센싱에서 Sarvotham et al. [10]에서 희소 신호를 복원하기 방법으로써 belief propagation 알고리즘을 제안하였다. 그리고 Donoho et al.은 논문 [11]에서 고밀도 가우시아 센싱행렬을 이용하여 approximate message passing(AMP) 알고리즘을 제안했다. 이 알고리즘은 코딩 이론에서 제안되었던 density evolution 방법을 변형하여 더 좋은 복원 성능을 얻었다.

AMP 알고리즘의 기본적인 원리는 Davey와 Mackay에 의해 발표된 논문 [12]에서 비이진(nonbinary) LDPC 코드의 디코딩 방법에 기반을 두고 있다. 본 논문에서 제안하는 확률적 복원 알고리즘은 논문 [12]와 차이점이 존재한다. 주된 차이점으로 본 논문에서는 신호  $x$ 의 사전 정보로써 확률분포를 이용하여 신호를 복원하는 것이다. 그런 다음에 복원 알고리즘의 초기 단계에서 신호  $x$ 와  $y$  노드 사이에 기생 확률의 교환이 이루어진다.

본 장에서는 다음과 같은 방법으로 유한체에서 압축센싱 프레임워크가 요약된다. 찾고자 하는 신호  $x$ 는 센싱행렬  $A$ 에 의해 측정 신호  $y$ 를 얻는다. 그리고 제안하는 확률적 복원 알고리즘을 통해 측정 신호  $y$ 와 센싱행렬  $A$ 를 이용하여 원래의 신호  $x$ 를 결정한다.

### 3.2 확률적 신호 복원 방법

다음으로 희소 신호  $x$ 를 복원하기 위한 알고리즘의 각 단계별로 자세한 내용을 살펴본다. 확률

적 복원 알고리즘은 반복 과정을 통해 사후 확률이 최대가 되도록 한다. 알고리즘은 크게, 1) 초기화 과정, 2) 기생확률의 메시지  $\mu_{ij}$  와  $\mu_{ji}$  업데이트 단계, 3) 식  $y = Ax$ 의 요구조건 확인 과정으로 구성된다. 먼저 초기화 과정에서는 각 신호 원소  $x_i$ 의 확률 메시지를 설정한다. 식 (2)에서 정의한 바와 같이  $i$ 번째 신호  $x_i$ 의 사전 확률 분포  $\psi_x$ 를 이용한다. 이때 신호의 희소율에 따라 사전 확률분포  $\psi_x$ 는 다르게 정의된다. 본 논문에서는 희소 신호를 복원하기 때문에 신호의 희소율은 0.5보다 작다고 가정한다,  $\delta \leq 0.5$ . 복원 알고리즘의 첫 번째 반복 단계에서는 이 사전 확률 분포  $\psi_x$ 가 기생 확률  $\mu_{ij}$ 로써 적용된다. 본 논문에서 제안하는 초기화 단계는 Davey의 연구내용과는 상이하면서 큰 차이점을 갖고 있다. 다음 단계에서는 다음과 같이 각 노드에서 기생 확률  $\mu_{ji}$ 를 갱신하며, 변환된  $\Phi_{ji}$ 으로 다음과 같이 계산된다.

$$\Phi_{ji} = \left( \prod_{\tilde{i} \in \Omega(j) \setminus \{i\}} H_q \tilde{\mu}_{\tilde{i}j} \right) H_q \psi_x \quad (5)$$

여기서  $\Omega(j) = \{i : A_{ji} \neq 0\}$ 은 센싱행렬의  $j$ 번째 행에서 0이 아닌 값에 대응하는 신호  $x_i$ 에 대한  $i$ 번째 열의 집합이며,  $H_q$ 는  $q \times q$  크기의 변환행렬이다. 본 논문에서는 하다마드 행렬(Hadamard matrix)[13]을 활용하여  $H_q$ 로써 이용한다. 여기서 하다마드 행렬은 모든 성분이  $\pm 1$ 이며, 행벡터와 열벡터 사이에는 서로 직교하는 특징을 갖고 있다. 그리고 하다마드 행렬의 설계는 첫 번째 행과 첫 번째 열이 모두 +1로 구성된 표준형을 기반으로 각 행과 열의 순열과 -1를 곱하여 구성할 수 있다. 다음은 하다마드 행렬의 크기가 각각  $2 \times 2$ 과  $4 \times 4$ 인 경우를 말한다.

$$H_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, H_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (6)$$

이 경우 우리는 센싱행렬의 계수에 따라 재배열된  $\tilde{\mu}_{ij}$ 를 이용한다. 여기서 재배열의 의미는 유한체의 연산으로부터 알 수 있다. 하나의 샘플 신호는 다음의 식  $y_j = \sum_i A_{ji}x_i$ 을 만족하여야 하므로 센싱행렬의 계수  $A_{ji}$ 에 따라 신호  $x_i$ 의 확률분포를 재배열하여야 한다.

다음으로 역 변환(inverse transformation) 과정을 통하여 우리는 기생 확률  $\mu_{ji}$ 를 다음과 같이 얻게 된다.

$$\mu_{ji} = H_q^{-1} \Phi_{ji} \quad (7)$$

그리고 측정 신호의 각 원소  $y_j$ 는 다음의 경계 조건을 만족해야 한다,  $y_j = \sum_i A_{ji}x_i$ . 이로써 우리는 측정 신호  $y_j$ 로부터 각 신호  $x_i$ 에 전달되는 기생 확률  $\mu_{ji}$ 를 얻게 된다. 그리고 복원 알고리즘의 다음 단계에서는 이러한 기생 확률이 신호  $x_i$ 에서 측정 신호  $y_j$ 로 전달되는 기생 확률  $\mu_{ji}$ 를 계산하기 위해 활용된다.

세 번째 단계로, 기생 확률  $\mu_{ji}$ 로부터 우리는 다음의 기생 확률  $\mu_{ij}$ 을 계산한다.

$$\mu_{ij} = \lambda \psi_x \prod_{\tilde{j} \in \mathcal{J}(i) \setminus \{j\}} \tilde{\mu}_{\tilde{j}i} \quad (8)$$

여기서  $\mathcal{J}(i) = \{j : A_{ji} \neq 0\}$ 은 센싱행렬의  $i$ 번째 열에서 0이 아닌 값에 대응하는 신호  $y_j$ 에 대한  $j$ 번째 행의 집합이다. 그리고 기생 확률  $\tilde{\mu}_{\tilde{j}i}$ 는 센싱행렬의 원소  $A_{\tilde{j}i}$ 의 계수에 따라  $\mu_{\tilde{j}i}$ 을 재배열하여 얻는다. 총 확률의 합은 1이기 때문에 변수  $\lambda$ 를 이용하여 정규화를 시킨다.

우리는 기생 확률  $\mu_{ij}$ 와  $\mu_{ji}$ 를 계산하면서 노드  $i$ 와  $j$  사이에 전달되는 자기 자신의 기생 확률은 활용되지 않았음을 알 수 있다. 우리는 이를 위해 식 (5)와 (8)에서  $\tilde{i} \in \Omega(j) \setminus \{i\}$ 와  $\tilde{j} \in \mathcal{J}(i) \setminus \{j\}$ 으로 표현한다. 마지막으로 우리는  $\mu_i$ 를 신호  $x$ 의  $i$ 번째 원소에 대한 최대 사후 확률이라고 정의한다. 사후 확률은 신호  $y_j$ 와 사전 확률분포  $\psi_x$ 에 대한 조건부이므로 다음과 같은 계산으로 얻는다.

$$\mu_i = \psi_x \prod_{j \in \mathcal{J}(i)} \tilde{\mu}_{ji} \quad (9)$$

최종적으로 각 신호  $x_i$ 는 식 (3)에 따라 사후 확률이 최대가 되는 유한체 원소를 결정한다. 그리고 복원 알고리즘은 마지막으로 다음의 식  $y = Ax$ 을 만족하는지 확인하여 반복 단계를 종료할 것인지 결정한다.

#### 4. 모의시험 결과와 성능 비교

본 장에서는 유한체에서 고려한 압축센싱 프레임워크의 성능을 평가한다. 그리고 성능평가 결과를 그림 3와 4에서 각각 보여 준다. 본 논문의 복원 알고리즘으로 사용된 모의시험에서는 최대 50번의 반복 횟수를 설정한다. 그리고 논문 [2]에서 발표한 ( $d_c = 4$ ) 패리티체크 행렬을 센싱행렬로써 사용하였다. 제안한 복원 알고리즘의 성능을 평가하기 위해 신호  $x$ 의 길이는 600,  $N = 600$ 으로 설정하여 모의시험을 진행하였다. 성능평가의 이해를 돕기 위해 우리는 압축률  $\rho (= M/N)$ 과 희소율  $\delta (= K/N)$ 을 정의하여 압축센싱의 복원 성능에 대해 복원 실패확률(failure probability)을 얻는다.

그림 3은  $M = 300$ 인 경우, 유한체의 크기가  $q = 2, 8, 32$ 일 때의 압축센싱의 성능평가 결과를 보여준다. 그림 3에서 보여주는 바와 같이 희소신호의 희소율이 다를 때 신호 복원의 실패확률을 얻는다. 특히 유한체의 크기라 커짐에 따라

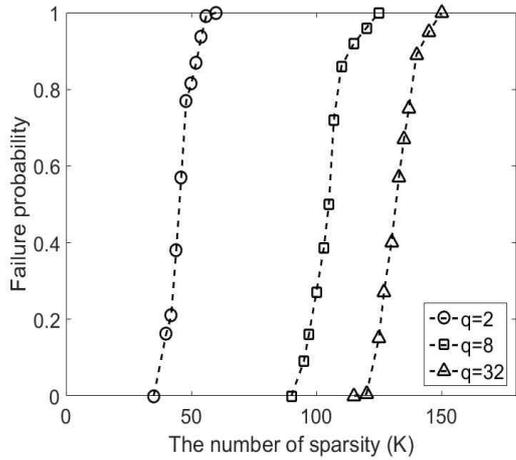


그림 3. 신호 희소성( $K$ )에 따른 실패확률 :  $N=600$ ,  $M=300$ ,  $q=2, 8, 32$ .  
 Fig. 3. Failure probability with the number of sparsity( $K$ ) of signals :  $N=600$ ,  $M=300$ ,  $q=2, 8, 32$ .

더 많은  $K$ 를 복원할 수 있음을 알 수 있었다. 즉, 이진보다는 비이진 유한체에서 희소 신호 복원 성능이 더 좋음을 알 수 있다. 예를 들어  $q=2$ 의 경우 측정 샘플 300개를 이용하여 최대 60개 이상의 희소 신호를 복원할 수 없지만,  $q=32$ 의 경우 최대 150개의 희소 신호를 복원할 수 있는 결과를 얻는다.

그리고 그림 4에서는 압축센싱의 중요한 물음 중에 하나인 희소 신호를 복원하기 위해 필요한 샘플 수가 얼마만큼 커야 되는지에 대한 답을 보여 주고 있다. 그림 4에서 알 수 있듯이  $N=600$ ,  $K=60$ 일 경우, 복원을 위해 필요한 샘플 수는 유한체의 크기가  $q=32$ 일 때는  $M=410$  이상에서는 대부분의 신호를 복원할 수 있었다. 또한  $q=2, 8, 32$ 로 증가함에 따라 복원을 위해 필요한 샘플 수는 각각  $M=180, 230, 400$  정도면 복원 실패확률은 5% 이하의 성능을 보여준다. 그림 3와 4에서 보여준 신호의 희소성과 측정 샘플 수에 따른 실패확률 결과를 통해서 유한체에서 희소 신호 복원에 대한 성능을 확인할 수 있었다.

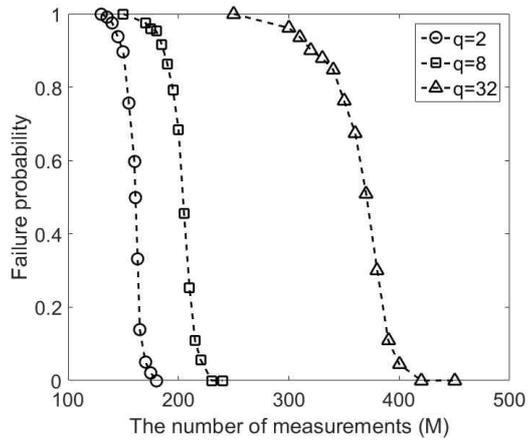


그림 4. 측정 샘플 수( $M$ )에 따른 실패확률 :  $N=600$ ,  $K=60$ ,  $q=2, 8, 32$ .  
 Fig. 4. Failure probability with the number of measurements( $M$ ) :  $N=600$ ,  $M=300$ ,  $q=2, 8, 32$ .

### 5. 결론

결론적으로 우리는 유한체에서 압축센싱 프레임워크를 살펴보았다. 본 논문에서 제안하는 프레임워크는 센싱행렬로써 코딩 이론에서 제안한 LDPC의 패리티체크 행렬을 사용하였다. 그리고 우리는 확률적 복원 알고리즘을 제안하여 희소 신호를 복원하였다. 복원 성능은 유한체의 크기에 따라 다른 결과를 보여주었다. 즉, 유한체의 크기가 커질수록 더 좋은 복원 성능을 얻었다. 본 연구를 통하여 우리는 압축센싱 프레임워크를 구성하기 위해 LDPC 패리티체크 행렬과 같은 저밀도 센싱행렬을 활용하는 것을 고려해 볼 필요가 있다. 또한 본 연구에서 제안하는 프레임워크는 실수체계가 아닌 유한체에서 활용 가능성을 보여 주었다.

### REFERENCES

[1] D. L. Donoho, "Compressed Sensing," *IEEE Tran. on Inf Theory*, vol. 52, no. 4, pp. 1289-1306, Apr. 2006.  
 [2] R. G. Gallager, *Low-Density Parity-Check Codes*, Cambridge, MA, MIT. Press, 1963.  
 [3] J.-T. Seong and H.-N. Lee, "Necessary and

Sufficient Conditions for Recovery of Sparse Signals over Finite Fields,” *IEEE Comm. Lett.*, vol. 17, no. 10, pp. 1976 - 1979, Oct. 2013.

[4] S. C. Draper and S. Malekpour, “Compressed Sensing over Finite Fields,” *IEEE International Symposium on Information Theory Proceedings (ISIT)*, Seoul, Korea, pp. 669 - 673, Jul. 2009.

[5] A. K. Das and S. Vishwanath, “On finite alphabet compressive sensing,” *IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP)*, Vancouver, Canada, May. 2013.

[6] V. Bioglio, G. Coluccia, and E. Magli “Sparse image recovery using compressed sensing over finite alphabets,” *IEEE International Conference on Image Processing (ICIP)*, Paris, France, pp. 1287 - 1291, Oct. 2014.

[7] G. Gankhuyag, E. Hong, and Y. Choe, “Sparse Recovery Using Sparse Sensing Matrix Based Finite Field Optimization in Network Coding,” *IEICE Trans. Inf. and Syst.*, vol. E100-D, no. 2, pp. 375 - 378, Feb. 2017.

[8] F. Zhang and H.D. Pfister, “Compressed sensing and linear codes over real numbers,” in *Proc. 3rd Annual Workshop in Inform. and its Appl.*, San Diego, CA, Jan. 2008.

[9] A. G. Dimakis and P. O. Vontobel, “LP decoding meets LP decoding: A connection between channel coding and compressed sensing,” in *Proc. 47th Allerton Conf. on Commun. Cont. and Comp.*, IL, USA, pp. 8 - 15, Sep. 2009.

[10] S. Sarvotham, D. Baron, and R. G. Baraniuk, “Compressed sensing reconstruction via belief propagation,” Tech. Report ECE-06-01 in Rice Univ., July 2006.

[11] D. L. Donoho, A. Maleki, and A. Montanari, “Message-passing algorithms for compressed sensing,” *Proceedings of the National Academy of Sciences*, vol. 106, no. 45, pp. 18914 - 18919, 2009.

[12] M. C. Davey and D. Mackey, “Low-density parity-check codes over GF(q),” *IEEE Commun. Lett.*, vol. 2, no. 6, pp. 165-167, Jan. 1998.

[13] A. Hedayat and W. D. Wallis, “Hadamard matrices and their applications,” *The Annals of Statistics*, vol. 6, no. 6, pp. 1184-1238. Nov. 1978.

---

저자약력

---

성진택(Jin-Taek Seong)

[정회원]



<관심분야>

- 2014년 8월 : 광주과학기술원 정보통신공학 (공학박사)
- 2008년 ~ 2010년 : LG전자
- 2014년 ~ 2016년 : 대구경북첨단 의료산업진흥재단
- 2016년 ~ 2017년 : 방위사업청
- 2017년 4월 ~ 현재 : 호남대학교 정보통신공학과 조교수

통신이론, 정보이론, 신호처리