韓國數學敎育學會誌 시리즈 E <數學敎育 論文集>
https://doi.org/10.7468/jksmee.2017.31.3.257
제 31집 제 3호, 2017. 9. 257-277

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E:
Communications of Mathematical Education
Vol. 31, No. 3, Sep. 2017. 257-277

# 영재교육을 위한 수학적 모델링 프로그램의 개발 및 적용
## :보로노이 다이어그램과 들로네 삼각분할을 중심으로[1)]

유 홍 규 (한국교원대학교 대학원)
윤 종 국 (한국교원대학교)[†]

본 연구의 주된 목적은 크게 두 가지로 나눌 수 있다. 첫째, 최근 수학적 모델링이 강조되는 상황에서 보로노이 다이어그램과 들로네 삼각분할을 주제로 영재교육을 위한 수학적 모델링 프로그램을 개발하는 것이다. 둘째, 본 연구에서 개발한 수학적 모델링 프로그램을 실제 영재교육 수업에 적용한 결과를 분석하여 수학적 모델링 수업을 설계하는 현직교사와 융합형 영재프로그램을 개발하는 영재교사에게 도움을 주고자 한다.

## Ⅰ. 서론

최근 수학적 모델링에 대한 관심이 높아지면서 국내외에서 수학적 모델링을 교육과정에 포함시키고 있다. 미국의 경우 2010년 CCSSI(Commom Core State Standards Initiative)(CCSSI: 2010)에 미국 수학교육의 청사진이라 할 수 있는 수학교육과정 규준 CCSSM(Commom Core State Standards for Mathematics, 2010)을 발표하였다. CCSSM(2010)은 NCTM의 과정 규준에 기초하여 수학적으로 우수한 학생에게 기대되는 행동요소로 8가지 수학적 실천을 제시하였는데, 그 중 4번째 항목이 바로 수학적 모델링이다. 또한 고등학교 과정을 6가지 내용규준 즉 수와 양(Number and Quantity), 대수(Algebra), 함수(Functions), 모델링(Modeling), 기하(Geometry), 확률과 통계(Statistics and Probability)로 구성하여 수학적 모델링을 문제해결의 수단이 아닌 하나의 내용요소로 지도하고 있다. 이는 학교교육에서 단순한 교과 중심의 지식 습득을 넘어 수학적 모델링을 통해 실제 문제를 해결하는 경험을 강조하고 있음을 의미한다. 장혜원(2012)은 CCSSM(2010)에 새롭게 추가한 수학적 모델링이 기존 NCTM의 과정 규준의 연결성과 직접적인 관련성이 있다고 설명하기도 하였다.

최근 우리나라 2015 개정교육과정(교육부, 2015)에서도 문제해결 능력을 신장시키기 위한 방안으로 수학적 모델링 능력을 새로운 항목으로 추가하였는데 이는 수학적 모델링이 문제해결력과 직결된다는 점과 외적 연결성을 적용하기 좋은 점 때문이라 할 수 있다. 또한 고급수학Ⅱ의 3단원은 수학적 모델링의 뜻, 그래프와 모델링, 행렬과 모델링으로 구성되어 수학적 모델링의 내용 자체가 교육과정에 포함되었다. 고급수학Ⅱ가 개설될 것으로 예상되는 학교가 많지 않아 정규수업시간에 수학적 모델링의 과정을 가르치긴 어려울 것이다. 하지만 최근 국내외에서 수학적 모델링에 대한 관심이 증가하고, 앞으로 교육과정에도 이를  반영하려는 추세임은 분명한 사실이다. 한편 김홍희(2009)는 수학적 모델링이 문제해결 능력을 향상시키기 위한 좋은 방법임에도 불구하고, 그동안의 교육과정에서 적절한 위치를 차지하지 못했다고 지적하였다. 그 이유로 수학교사 혼자 수학적 모델링 프로그

* 접수일(2017년 4월 12일), 심사(수정)일(2017년 5월 30일), 게재확정일(2017년 6월 2일)
* ZDM분류 : D40, U30
* MSC2000분류 : 97D40
* 주제어 : 보로노이 다이어그램, 들로네 삼각분할, 수학적 모델링, 수학 영재교육, 수학 교과역량
† 교신저자 : jgyun69@knue.ac.kr
1) 본 논문은 유홍규(2017)의 석사학위 논문의 일부를 재구성 한 것임.

램의 개발하기엔 다소 어렵다는 점을 꼽았고, 수학적 모델링에 대한 연구와 프로그램 개발이 지속적으로 필요하다고 주장하였다. 따라서 수학적 모델링이 학교 현장에 정착하기 위해서는 수학적 모델링을 적용하기 적합한 주제를 선별하여 수학적 모델링 프로그램을 개발하고, 이와 더불어 수학교사들의 수학적 모델링에 대한 전문지식 향상이 요구된다.

한편 2013년 10월 3일 교육부는 제3차 영재교육진흥종합계획을 통해 영재교육에서 향후 5년간 나아가야할 방향으로 5대 분야, 17개 추진과제를 제시하였다. 제3차 영재교육진흥종합계획(교육부, 2013)에서는 그동안 영재교육의 문제점으로 창의·융합형 영재프로그램 개발이 저조한 점을 지적하면서 8번째 추진과제로 창의·융합형 영재교육 콘텐츠 개발이라는 항목을 신설하였다. 이는 앞으로의 수학영재교육의 방향은 선행학습과 순수수학 위주가 아닌 학교교육과정에서 배운 수학개념을 다른 영역이나 교과에 적용하는 형태가 되어야 함을 의미한다(교육부, 2013). 따라서 융합적 요소가 강한 주제를 선정하여 수학적 모델링 중심의 영재프로그램을 영재수업에 적용하는 것은 영재교육의 적절한 수업방향이라 할 수 있다.

이에 본 연구에서는 보로노이 다이어그램과 들로네 삼각분할을 주제로 수학적 모델링 프로그램을 개발하여 수학적 모델링에 기반을 둔 영재프로그램의 개발 방향을 제시하고자 하였다. 이어 개발한 수학영재프로그램을 실제 수업에 적용한 결과를 분석하여 현직교사들의 수학적 모델링 수업 설계와 영재교사들의 융합형 영재프로그램 개발에 도움을 주고자 하였다. 이러한 연구 목적에 따라 연구 문제를 다음과 같이 설정하였다.

1. 보로노이 다이어그램과 들로네 삼각분할을 주제로 수학적 모델링에 기반을 둔 수학영재프로그램을 어떻게 구성할 것인가?

2. 본 연구에서 개발한 프로그램의 적용과정 중 학생 중심의 수학적 모델링 활동에서 나타난 영재학생들의 핵심역량은 어떠한가?

## Ⅱ. 이론적 배경

### 1. 보로노이 다이어그램과 들로네 삼각분할

보로노이 다이어그램과 들로네 삼각분할은 지리상의 실제 지점을 좌표평면 상의 점으로 모델화하여 공학이나 지리학 등에서 공간의 효율적인 분할에 활용되고 있는 수학이론이다.

보로노이 다이어그램의 정의를 수학적으로 표현하면 다음과 같다.

| |
|---|
| 보로노이 다이어그램은 평면상의 $n$개의 점집합 $P=\{P_1, P_2, \cdots, P_n\}$에 대해 평면을 $n$개의 보로노이 다각형 $V(P_i)$ 로 분할한 것으로 $V(P_i)$의 정의는 다음과 같다. $$V(P_i)=\{x\in\mathbb{R}^2 \mid d(x,P_i)\le d(x,P_j),\ \forall j(j\ne i)\}$$ (단 $d(x,P_i)$는 두 점 $x$와 $P_i$ 사이의 유클리드 거리이다.) |

또, 들로네 삼각분할은 평면 위의 주어진 점들을 삼각형으로 연결할 때 어떤 삼각형의 외접원에도 그 삼각형의 꼭짓점을 제외한 다른 점을 포함하지 않도록 분할하는 방법이다. [그림 Ⅱ-1]의 (a)는 외접원이 세 점 이외의 다른 점을 포함하지 않으므로 들로네 삼각분할을 만족하는 반면 (b)는 외접원이 세 점 이외의 다른 점을 포함하므로 들로네 삼각분할이 아니다. 이런 방법을 반복하여 (c)의 들로네 삼각분할을 완성할 수 있다. 둔각삼각형일수록 외접원의 크기가 커짐을 생각하면 들로네 삼각분할은 보다 정삼각형에 가깝게 영역을 분할하는 방법으로 해석할 수 있다.

(a) 들로네 삼각분할의 예 (b) 들로네 삼각분할이 아닌 예 (c) 들로네 삼각분할의 결과

[그림 Ⅱ-1] 들로네 삼각분할

### 2. 2015 개정 수학과 교육과정의 수학 교과역량

2015 개정 수학과 교육과정의 주요 특징은 수학 교과 핵심역량의 함양을 수학과 교육과정의 전 맥락에서 강조했다는 점이다. 핵심역량을 중심으로 교육과정을 설계하는 경향은 독일, 캐나다, 싱가포르, 호주, 뉴질랜드 등 여러 국가에서 찾아볼 수 있다(교육부, 한국과학창의재단, 2015). 이러한 영향으로 2015 개정 교육과정은 총론 차원에서 여섯 가지 핵심역량으로 ‘자기관리 역량’, ‘지식정보 처리 역량’, ‘창의적 사고 역량’, ‘심미적 감성 역량’, ‘의사소통 역량’, ‘공동체 역량’을 제시하였다. 이어 총론에서 설정한 여섯 가지 핵심역량을 수학 교과의 관점에서 재해석하여 여섯 가지 수학 교과 역량을 선정한 뒤 이를 수학과 교육과정에 적극적으로 반영하였다. 여섯 가지 수학 교과 역량은 2009 개정 교육과정에 명시된 ‘문제해결’, ‘추론’, ‘의사소통’에 ‘창의 · 융합’, ‘정보처리’, ‘태도 및 실천’의 세 가지를 추가한 것이다. 2015 개정 수학과 교육과정 시안 개발 연구(교육부, 한국과학창의재단, 2015)에서는 전문가 자문 및 연구진 내부 검토 과정을 거쳐 수학 교과 역량의 의미와 하위요소, 그 기능을 제시하였다.

### 3. Renzulli의 3단계 심화학습 모형

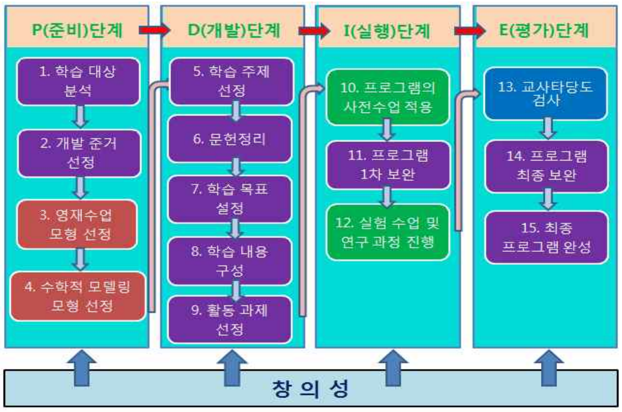
Renzulli는 영재를 평균 이상의 일반지능(general intelligence), 창의성(creativity), 과제집착력(task commitment)을 가지는 사람으로 정의하고, 영재교육을 위한 교수·학습 모형을 제시하였다(김경란, 2011). Renzulli의 3단계 심화학습 모형(Enrichment Triad Model)은 국내 수학영재교육에서 많이 활용되고 있는 교수·학습 모형으로 크게 1단계 심화활동인 일반적인 탐색활동, 2단계 심화활동인 소집단 단위의 학습 활동, 3단계 심화활동인 소집단 단위의 문제해결 및 연구 활동으로 구성된다. 3단계 심화학습 모형의 큰 특징은 연속적이지만 질적으로 다른 세 단계로 구성된다는 점이다(이신동 외, 2009). 3단계 심화학습 모형의 1단계와 2단계는 일반 학생을 대상으로도 폭넓게 적용될 수 있지만 3단계는 소수의 영재학생들을 대상으로 한 연구과정이 포함된다는 특징이 있다. 3단계는 영재학생들이 주도적으로 탐구할 주제를 선정하여 학습 선택의 자율성이 보장되고, 학생 개개인이 주도적인 역할을 한다는 장점이 있다.

## Ⅲ. 연구방법 및 절차

### 1. 영재프로그램 개발 및 적용 절차

본 연구에서는 김진수(2012)의 PDIE모형을 수학영재프로그램의 특성에 맞게 세부 항목을 수정하여 [그림 Ⅲ-1]의 순서로 진행하였다. P(준비)단계는 프로그램 개발을 위한 준비과정으로 학습 대상 분석과 개발 준거 선정, 영재수업 모형 선정, 수학적 모델링 모형 선정의 4단계로 이루어졌다. D(개발)단계는 학습 주제 선정, 문헌정리,

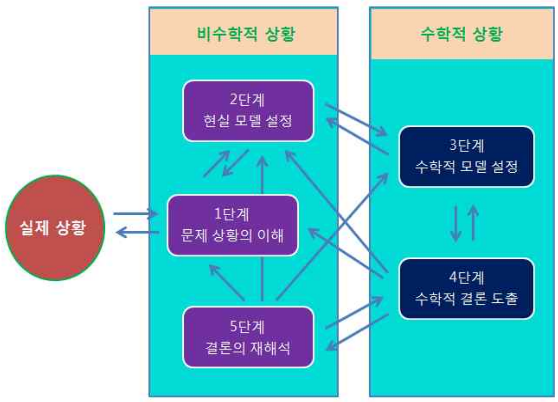
학습 목표 설정, 학습 내용 구성, 활동과제 선정의 5단계로 세분화하였다. I(실행)단계에서는 프로그램의 사전수업 적용, 프로그램 1차보완, 실험수업 및 연구과정 단계로 진행하였고, E(평가)단계에서는 교사타당도 검사, 프로그램 최종 보완, 최종 프로그램 완성의 3단계로 구성하였다. 이를 도식화하면 [그림 Ⅲ-1]과 같다.




[그림 Ⅲ-1] 수학영재프로그램 개발 및 적용 절차

영재수업에 활용할 교수·학습모형은 Renzulli의 3단계 심화학습 모형을 선정하였다. 이를 바탕으로 1단계 심화과정인 일반적인 탐색활동 단계를 보로노이 다이어그램에 대한 수학적 탐색 활동으로 구성하였고, 2단계 심화과정인 소집단 단위의 학습 활동 단계를 4명의 희망학생을 대상으로 초기 수학적 모델링 활동을 진행하였다. 이어 3단계 심화과정인 개인 또는 소집단 단위의 문제해결 및 연구 활동 단계를 4명의 학생을 대상으로 소집단 연구 활동(사사과정)을 진행하였다.

이어 수학적 모델링 수업을 설계하기 위해 연구자는 Blum & Ferri(2009)의 수학적 모델링 과정과 김수미(1993)의 6단계 모형을 바탕으로 5단계 수학적 모델링 모형을 직접 개발하였다. 본 연구에 활용한 5단계 수학적 모델링 모형은 [그림 Ⅲ-2]와 같다.




[그림 Ⅲ-2] 연구에 활용한 5단계 수학적 모델링 모형

## 2. 연구 대상

본 연구의 1단계 심화과정 참여대상자는 연구자가 6년째 영재수업을 진행하고 있는 충남과학교육원 부설 영재교육원 중학교 3학년 수학영재학생들이다. 이어 2-3단계 심화과정은 질적 연구방법을 진행하기 위해 1단계 심화과정을 거친 희망학생 4명을 선정하였다.

## 3. 연구 설계

본 연구에서 진행한 세부적인 연구 일정은 <표 Ⅲ-1>과 같다.

<표 Ⅲ-1> 연구 일정

| 심화과정 | 수업 | 대상 | 날짜 |
|---|---|---|---|
| 1단계 심화과정: 수학적 탐색 활동 | 사전수업 | K대학교 부설 영재교육원 중학교 3학년 13명 | 2016.07.02.(토) 4차시 |
| | 실험수업 | 1권역 중학교 3학년 18명 | 2016.08.01.(월) 4차시 |
| | | 2권역 중학교 3학년 18명 | 2016.08.03.(수) 4차시 |
| | | 3권역 중학교 3학년 20명 | 2016.08.08.(월) 4차시 |
| 2단계 심화과정 | 초기 모델링수업 | 실험수업에 참여한 학생 중 희망자 4명 | 2016.08.10.(수) 2차시 |
| 3단계 심화과정 | 연구 활동 | 실험수업에 참여한 학생 중 희망자 4명 | 2016.08~2016.10(2개월) |

## 4. 자료 수집

본 연구의 1단계 심화과정인 수학적 탐색 활동은 1회의 사전수업을 진행한 이후 3개 권역의 영재교육원에 동일한 내용으로 수업을 실시하였고, 이어 2-3단계 심화과정은 희망하는 4명의 영재학생을 선정하여 학생 중심의 수학적 모델링 활동을 진행하였다. 특히, 3단계 심화과정에서 수학영재학생들의 모델링 과정을 구체적으로 알아보기 위해 연구 활동에 참여하는 4명의 학생을 대상으로 질적 연구방법을 실시하였다. 이를 위해 학생들과의 3차례 만남을 가졌고 연구 활동에 대한 조언과 함께 활동과정에 대한 면담을 실시하였다. 면담에 대한 자료와 최종적인 결과물인 탐구보고서를 자료 분석에 활용하였다.

## 5. 자료 분석

3단계 심화과정인 학생 중심의 수학적 모델링 과정에서 나타나는 핵심역량을 분석하기 위해 2015 개정교육과정의 6가지 수학 교과 역량 중 인지적 특성과 관련한 문제해결 능력, 융합 능력, 정보처리 능력을 중심으로 분석을 진행하였다. 이를 위해 영재학생들이 수행한 결과물인 탐구보고서와 학생 면담 기록을 분석하였다. 3단계 심화과정에서 이루어지는 수학적 모델링 과정은 일반적인 모델링 과정과 비교해 복합적이고 순환적인 특성 때문에 분석에 어려움이 있었다. 이를 극복하기 위해 수학적 모델링 과정을 [문제 상황의 이해 단계]-[현실 모델 설

정]-[수학적 모델 설정]-[수학적 결론 도출]-[결론의 재해석]의 5단계로 적절히 나누어 단계별로 발현되는 핵심역량을 분석하였다. 학생 중심의 수학적 모델링 과정에서 발현되는 핵심역량을 분석하기 위한 분석틀은 <표 Ⅲ-2>와 같다.

<표 III-2> 학생 중심의 수학적 모델링 과정 분석을 위한 분석틀

| 역량 | 하위요소 | 의미 | 기능 |
|---|---|---|---|
| 문제해결(P) | 문제 이해 및 전략 탐색(P1) | 문제에서 구하고자 하는 것과 주어진 조건 및 정보를 파악하고, 적절한 해결 전략을 탐색하여 풀이 계획을 수립하는 능력 | (문제)이해하기, 분석하기, (조건, 정보) 파악하기, (관계)파악하기, 계획하기, 탐구하기, 일반화하기, 특수화하기, 유추하기, 분류하기, 조사하기, 거꾸로 생각하기, 단순화하기, 그림으로 나타내기, 표 만들기, 식 세우기, (다양한 전략)구사하기 |
| | 계획 시행 및 반성(P2) | 계획한 풀이 과정을 수행하고, 검증 및 반성을 통하여 해결 방법과 해답을 평가하는 능력 | 계산하기, (절차)수행하기, 문제해결하기, 적용하기, 활용하기, 점검하기, 반성하기, 평가하기 |
| | 협력적 문제해결(P3) | 균형 있는 책임 분담과 상호작용을 통해 집단적으로 문제해결을 수행하는 능력 | 설명하기, 정당화하기, 질문하기, 비판하기, (의견)존중하기, (의견)조정하기, 의사결정하기, 토론하기, 제안하기, 종합하기 |
| | 문제 만들기(P4) | 주어진 문제를 변형하거나 새로운 문제를 만들어 해결하는 능력 | (조건)변형하기, 유사성 찾기, 비교하기, 관련짓기, 확장하기, 생성하기, (문제)만들기 |
| 융합(F) | 수학 내적 연결(F1) | 여러 수학적 지식, 기능, 경험 등을 연결하여 새로운 수학적 지식, 기능, 경험 등을 생성하고, 수학 문제를 해결하는 능력 | (서로 다른 주제 또는 서로 다른 학년의 수학 지식, 기능, 경험 사이의) 관계 찾기/관련짓기/연결하기/통합하기/재구성하기, (수학 문제 상황에 두 가지 이상의 지식, 기능) 적용하기/문제해결하기 |
| | 수학 외적 연결 및 융합(F2) | 수학과 타 교과나 실생활의 지식, 기능, 경험 등을 연결・융합하여 새로운 지식, 기능, 경험 등을 생성하고 문제를 해결하는 능력 | (실생활이나 타 교과 상황과 관련된 수학적 지식, 기능, 경험 등) 찾아보기, (실생활이나 타 교과 상황에 수학적 지식, 기능, 경험 등) 적용하기/ 연결하기/관련짓기/융합하기 |
| 정보처리(I) | 자료와 정보수집(I1) | 실생활 및 수학적 문제 상황에서 적절한 자료와 정보를 탐색 및 생성하여 수집하는 능력 | (자료를) 수집하기, 조사하기, 기록하기, 탐색하기, 생성하기 |
| | 자료와 정보 정리 및 분석(I2) | 수집한 자료와 정보를 목적에 맞게 분류, 정리, 분석, 평가하는 능력 | 표현하기, 분류하기, 정리하기, 열거하기, 배열하기, 비교하기, 묶기, 분석하기, 분류하기, 분할하기, 시각화하기, 평가하기 |
| | 정보 해석 및 활용(I3) | 분석한 정보에 내재된 의미를 올바르게 파악하여 해석, 종합, 활용하는 능력 | 예측하기, 설명하기, 해석하기, 종합하기, 활용하기 |

## Ⅳ. 연구결과

### 1. 수학적 모델링에 기반을 둔 영재교육프로그램의 구성

1단계 심화과정인 수학적 탐색 활동 단계에서는 보로노이 다이어그램과 들로네 삼각분할의 정의와 생성원리, 성질 및 관계 등의 내용을 학습하게 된다. 이 과정에서 영재학생들은 작도 방법과 성질 탐구, 관계 찾기, 점의 추가와 영향력에 대한 4가지 탐구과제를 수행하게 된다. 이어 3단계 심화과정의 연구주제의 선정에 도움이 될 만한 보로노이 다이어그램의 심화이론과 활용 사례를 제시하여 관심 주제를 미리 생각하도록 한다. 2단계 심화과정인 초기 수학적 모델링 활동 단계에서는 4명의 영재학생을 선정하여 문제해결력과 외적 연결성, 흥미와 유용성의 신장을 목표로 수학적 모델링의 의미와 과정을 설명한 뒤 이를 직접 적용하도록 하였다. 초기 수학적 모델링 활동을 위해 3가지 모델링과제인 우리 학교 야구팀의 수비위치 선정문제, 근거리 기준 초등학교 배정 문제, 체인점의 새로운 매장 선정 문제를 해결하게 된다. 3단계 심화과정인 연구 활동은 4명의 영재학생이 토론을 통해 스스로 보로노이 다이어그램과 관련한 주제를 선정하여 문제를 제기하고, 수학적 모델링을 통해 이를 해결한 뒤 탐구보고서를 작성하는 과정으로 이루어진다. 본 연구에서는 Renzulli의 3단계 심화학습 모형의 장점을 최대한 살리고자 3단계 심화과정에 가장 많은 시간을 할애하도록 설계하였다. 수학적 모델링에 기반을 둔 프로그램의 구성을 간략하게 정리하면 <표 Ⅳ-1>과 같다.

<표 Ⅳ-1> 수학적 모델링에 기반을 둔 영재프로그램의 구성

| 단계 | 학습활동 | 학습 내용, 활동과제 |
|---|---|---|
| 1단계 심화 | 수학적 탐색 활동 | ･보로노이 다이어그램과 들로네 삼각분할의 정의, 작도, 성질, 관계, 심화, 활용<br>[탐구과제1] 보로노이 다이어그램과 작도 및 성질 탐구<br>[탐구과제2] 들로네 삼각분할의 작도 및 성질 탐구<br>[탐구과제3] 보로노이 다이어그램과 들로네 삼각분할의 관계<br>[탐구과제4] 점을 추가한 보로노이 다이어그램의 변화와 영향력 분석 |
| 2단계 심화 | 초기 수학적 모델링 활동 (4명 선정) | ･2-3단계 심화과정을 희망하는 4명의 학생을 선정<br>･수학적 모델링의 의미와 과정을 소개하여 단계별로 수행하도록 지도<br>･수학적 모델링의 개념을 3가지 모델링과제에 적용<br>[모델링과제1] 우리 학교 야구팀의 각 선수별 수비범위를 어떻게 정할 것인가?<br>[모델링과제2] 자신이 거주하는 지역의 근거리 기준 초등학교 배정을 어떻게 할 것인가?<br>[모델링과제3] 자신이 거주하는 지역의 체인점인 P사의 새로운 매장의 위치를 어느 곳으로 정할 것인가? |
| 3단계 심화 | 연구 활동 (4명 선정) | ･2단계 심화과정을 거친 4명이 연구 활동(사사과정) 진행<br>･보로노이 다이어그램에 대한 주제와 문제 상황을 설정하여 수학적 모델링을 활용하여 문제해결<br>･연구자는 연구 활동의 도우미 역할로 2개월 동안 3회 만나 조언 및 면담을 실시<br>[연구과제] <u>보로노이 다이어그램과 관련한 주제와 문제 상황을 자유롭게 설정하여 수학적 모델링을 통해 이를 스스로 해결한 뒤 결과를 보고서로 작성하여라.</u> |

### 2. 사전 수업과 실험수업을 통한 1단계 심화과정의 수정

가. 1단계 심화과정(수학적 탐색 활동)의 구성

수업을 시작하면서 학생들의 흥미를 높이고, 호기심을 자극할 수 있도록 소방서에 화재신고가 접수되는 상황을 [그림 Ⅳ-1]의 파워포인트 자료를 통해 제시한다. '신고자의 위치에 따라 어떻게 소방서의 관할구역을 나누는 것이 효과적일까'라는 발문을 통해 보로노이 다이어그램의 생성원리를 미리 생각해보도록 한다.


[그림 Ⅳ-1] 보로노이 다이어그램에 대한 도입 방법

이를 바탕으로 2인 1모둠이 되어 [탐구과제1]의 주어진 10개의 점에 대한 보로노이 다이어그램을 직접 작도하고, 보로노이 버텍스와 보로노이 에지를 중심으로 성질을 찾도록 한다. 이어 빔 프로젝트를 활용하여 모둠별 결과물을 앞에서 공유하면서 서로 옳게 그렸는지 확인하고, 발견한 성질에 대해 발표를 진행한다. 보로노이 다이어그램의 역사에 대한 부분은 교사의 소개로 진행된다. 이어 들로네 삼각분할에 대하여 직관적인 의미와 함께 다양한 분할 중 들로네 삼각분할과 그렇지 않은 분할을 비교하도록 한다.

[탐구과제2]에서는 'flipping'에 대한 개념을 설명하면서 주어진 사각형에 대한 들로네 삼각분할을 찾는 방법을 고민하도록 한다. 이를 바탕으로 10개의 점에 대한 들로네 삼각분할을 직접 작도하면서 들로네 삼각분할에서 나타나는 성질과 특징을 탐색하도록 한다. 이 과정에서 일부 학생들은 동일하게 점이 주어진 [탐구과제1]과 [탐구과제2]를 통해 보로노이 다이어그램과 들로네 삼각분할이 관련성이 있음을 인지할 수 있다.

[탐구과제3]은 주어진 점에 대한 보로노이 다이어그램이 제시된 상태에서 들로네 삼각분할을 정의를 사용하지 않고 들로네 삼각분할을 찾도록 한다. 반대로 주어진 점에 대한 들로네 삼각분할이 제시된 상태에서 보로노이 다이어그램의 정의를 사용하지 않고 보로노이 다이어그램을 찾도록 한다. 영재학생들은 쌍대관계라는 용어가 생소하지만 하나를 찾으면 다른 하나를 찾을 수 있다는 정도로 쌍대개념을 이해한다.

[탐구과제4]는 새로운 점이 추가되었을 때의 변화와 새로운 점의 영향력을 분석하는 활동이다. 2단계 심화과정에 새로운 매장이 추가되었을 때의 변화를 분석하기 위한 사전 학습에 해당한다. 이후 보로노이 다이어그램의 심화이론과 활용분야에 대한 소개를 통해 3단계 심화과정에서 깊이 있게 연구할 관심 주제나 문제를 미리 생각하게 된다. 보로노이 다이어그램의 심화이론으로서 유클리드 기하가 아닌 택시기하와 원, 격자점, 구면, 3차원에서의 보로노이 다이어그램을 작도하는 방법을 탐색한다. 또한 새로운 점이 주어진 상황과 가중치 보로노이 다이어그램에 대한 이론을 학습한다. 이어 보로노이 다이어그램이 활용되는 분야를 소개하면서 1단계 심화과정이 끝나게 된다.

나. 2단계 심화과정(수학적 모델링 활동)의 구성

2단계 심화과정에서 활용하는 과제는 인위적인 가상의 문제가 아닌 실제 자신의 주변에 존재하는 문제 상황으로 구성하였다.

1) [모델링과제1]의 구성

[모델링과제1]은 우리 학교 야구팀의 감독이 되어 팀의 수비수의 위치와 수비범위를 정하는 과제이다. 공이 특정 자리에 떨어졌을 때, 어떤 선수가 공을 향해 달려가고 다른 선수들은 중계플레이나 베이스 커버를 하면 좋을지 결정하게 된다.

가) 문제 상황의 이해 단계

우리 학교의 야구팀이 우승을 목표로 전국체전에 참가하게 되었다. 최고의 성적을 거두기 위해 올 한해 새벽부터 열심히 운동한 우리 학교 야구팀은 지난해 우승팀과 맞붙게 되는 상황이 발생하였다. 상대의 타격이 뛰어난 점을 고려하여 실점을 최소화하기 위해 9명의 선수에 대해 기본적인 수비 지역을 설정하려고 한다. 어떻게 설정하는 것이 좋을까?

나) 현실 모델 설정 단계

문제 상황을 직접 수학적 모델링하기 어려운 경우 먼저 문제 상황을 일상 언어를 활용하여 표현하는 과정이 필요하다. 야구장에 선수들이 수비위치에 서게 되고, 상대 선수가 친 공이 날아오는 위치에 따라 어떤 선수가 공을 처리하는 것이 합리적인지 판단하는 상황이다. 수비 범위가 넓은 지역은 발이 빠른 선수를 배치하고, 애매한 위치에 떨어진 경우 어떻게 대처해야할지 결정하게 된다.

다) 수학적 모델 설정

9명의 선수의 위치를 야구장 위에 점으로 표시하여 각 선수별 수비범위를 영역으로 나타내려고 한다. 각 선수들이 점에 해당한다면 각 점에 대한 보로노이 영역은 자신의 수비 범위에 해당한다.

라) 수학적 결론 도출

각 선수를 점으로 설정하여 보로노이 다이어그램을 작도하여 보로노이 영역을 표시할 수 있다. 각 시드점에 대한 보로노이 영역은 가장 가까운 점들의 집합으로 좌우가 비교적 대칭인 형태가 나온다. 두 점으로부터 거리가 같은 점으로 보로노이 에지가 되고, 보로노이 에지의 교차점은 보로노이 버텍스로 세 점으로부터 같은 거리에 있다. 보로노이 영역이 가장 넓은 선수는 중견수가 되며, 내야보다는 외야의 선수들의 보로노이 영역이 넓다.

마) 결론의 재해석

수학적 결론을 통해 다음과 같이 결론을 내릴 수 있다. 각 선수는 자신의 보로노이 영역에 대한 수비를 원칙으로 한다. 보로노이 에지와 보로노이 버텍스에 해당하는 지점은 모든 선수들이 처리하기 힘든 지역으로 인근 선수 중 발이 빠른 선수가 처리하는 것으로 미리 약속한다. 보로노이 에지와 보로노이 버텍스 부근은 선수들 간에 미리 약속을 통해 호흡이 잘 맞도록 해야 한다. 선수의 앞뒤 경계 부근은 앞에 위치한 선수가 뒷걸음질 치면서 처리하기 어려우므로 뒤에 위치한 선수가 달려오면서 처리하는 것으로 한다. 수비범위가 가장 넓은 중견수는 발이 빠른 선수를 배치하고, 1루수는 다른 선수가 던진 공을 잡아야하므로 영역을 축소할 필요가 있다. 또한 단순히 보로노이 영역을 나누는 것을 넘어 상대 주자의 여부와 공의 진행방향을 감안한 수비범위 선정이 필요하며, 상황에 따라 선수의 위치와 보로노이 영역을 변경할 수 있다.

2) [모델링과제2]의 구성

[모델링과제2]는 자신이 거주하는 지역의 근거리에 입각한 초등학교 배정에 대한 문제이다. 보로노이 다이어그램을 적용하는 초기 단계로 단순하게 영역을 나누는 것 이상의 결론이 제시되어야 한다. 초기 수학적 모델링 과정으로 수학적 상황과 실제 상황의 차이를 느낄 수 있어야 한다.

가) 문제 상황의 이해 단계

초등학교 입학을 앞둔 부모들에겐 자녀들의 초등학교 등교 문제만큼 큰 걱정거리도 없을 것이다. 맞벌이 부모가 많다보니 8살 어린 학생이 학교에 혼자 등하교하는 것은 결코 간단한 일이 아니다. 부모들은 자신의 거주

지에서 가장 가까운 학교에 배정을 하는 것을 원하고 있어 근거리를 원칙으로 어떻게 초등학교를 배정할 것인가의 문제를 생각할 수 있다.

나) 현실 모델 설정 단계

자신의 거주지에서 가장 가까운 초등학교가 어디인지 찾아야한다. 이를 위해 학생들이 거주하는 지역의 지도를 통해 학교의 위치를 확인하고, 지도상에서 가장 가까운 학교를 선정하게 된다. 이를 위해 각 초등학교의 위치를 바탕으로 거리에 기초한 초등학교별 관할 지역을 나누는 방법을 사용하게 된다.

다) 수학적 모델 설정

지도상에 초등학교의 위치를 점으로 표시하고 각 초등학교 별로 보로노이 영역을 분할할 수 있다. 각 보로노이 영역에서는 시드점까지의 거리가 가장 가까우며, 보로노이 에지에 가까운 지역은 두 개의 학교가 비슷한 거리로 단순 거리보다 다른 변수가 더 중요할 수 있다.

라) 수학적 결론 도출

각 점에 대하여 보로노이 다이어그램을 활용하여 보로노이 영역을 분할하게 된다. 두 점의 수직이등분선에 해당하는 부분은 두 점으로부터 거리가 같은 점으로 보로노이 에지가 되고, 보로노이 에지의 교차점은 보로노이 버텍스로 세 점부터 같은 지점에 해당한다.

마) 결론의 재해석

결론의 해석은 단순하게 보로노이 영역을 분할하는 것으로 끝내서는 안 되며, 이를 보다 정교하게 수정할 필요가 있다. 보로노이 영역에 포함되는 지역은 시드점에 위치한 학교가 가장 가까워 해당 학교에 배정하는 것이 합리적이다. 그런데 보로노이 에지는 두 학교 배정 구역의 경계점으로 오히려 교통상황이나 학교의 규모 등의 다른 요소를 고려할 필요가 있다. 일반적으로 아파트나 주택이 몰려 있는 지역은 학교 간의 거리가 가깝고, 보로노이 영역이 상대적으로 좁게 형성된다. 결론을 재해석하는 과정에서 앞에서 나눈 영역을 단순거리에 의한 분할이 아닌 세부적으로 도로 사정이나 학생 수를 감안하여 세부적으로 조정할 필요가 있음을 학생들이 깨닫고 다른 자료가 보다 필요함을 느껴야 한다.

3) [모델링과제3]의 구성

[모델링과제3]은 자신이 거주하는 지역에 체인점으로 운영되고 있는 P사의 새로운 매장의 위치로 적정한 곳을 선정하는 문제이다. 체인점으로 운영되다보니 빵의 맛에 큰 차이가 없어 사람들은 자신의 거주지에서 가까운 매장을 이용할 가능성이 높다. 만약 새로운 매장을 개설하여 운영한다고 할 때, 어느 지점에 개설할 것이 좋을지 결정하고, 새로운 매장을 인해 주변의 다른 매장이 어느 정도의 영향을 미칠 것인지를 예측하게 된다.

가) 문제 상황의 이해 단계

최근 프랜차이즈 사업이 활발해지면서 음식점이나 베이커리, 커피 전문점, 치킨 등 체인점 형태로 운영되는 사례가 많아졌다. P사의 베이커리 체인점은 매장마다 크게 맛의 차이가 없다보니 매장의 위치가 굉장히 중요한 역할을 한다. 만약 자신이 위치한 지역에 새로운 매장을 개설할 때, 어느 위치에 매장을 추가로 개설하는 것이 좋을지 결정하는 문제이다.

나) 현실 모델 설정 단계

자신의 위치한 지역에 P사의 매장이 어느 곳에 위치하는지 찾는 것이 필요하다. 이를 위해 학생들이 거주하는 지역의 지도가 필요하게 되고, 지도상에 매장별 예상되는 고객의 거주 지역을 파악한다. 이때 새로운 매장의 위치는 매장의 보로노이 영역이 넓은 곳을 중점적으로 생각해보면 된다. 이 곳을 중심으로 새롭게 매장이 추가되었을 때, 이전과 이후의 변화를 파악하여 주변에 미치는 영향력을 생각해볼 수 있다.

다) 수학적 모델 설정

지도상에 각 매장의 위치를 점으로 표시하고 각 매장별 예상되는 고객의 거주 지역을 보로노이 영역을 표시한다. 각 보로노이 영역에서는 시드점에 해당하는 매장을 이용할 가능성이 높다.

라) 수학적 결론 도출

각 시드점에 대하여 보로노이 다이어그램을 활용해 보로노이 영역을 분할하게 된다. 지역의 중심지이면서 보로노이 영역이 비교적 높게 나타나는 곳이 새로운 매장의 위치로 적합하다. 새롭게 설정한 매장을 포함하여 새롭게 보로노이 영역을 나타내어 이전의 보로노이 영역과 비교하여 이를 영향력으로 설명할 수 있다.

마) 결론의 재해석

앞 단계에서 분할한 보로노이 영역에 대한 해석이 이루어진다. 일반적으로 도시의 중심지역은 보로노이 영역이 좁게 나타나고, 외곽의 지역은 인구가 적다보니 보로노이 영역이 넓게 나타난다. 이때 시드점에 대한 보로노이 영역의 크기 비교가 가능한데, 중심 지역임에도 보로노이 영역이 넓게 나타나는 지역이 있다면 그 지역에 매장 추가를 고려해 볼 수 있다. 새로운 매장을 추가하기 전후를 비교하여 겹치는 면적이 새로운 매장이 주변의 매장에 주는 영향이라 해석할 수 있다. 이를 통해 새로운 매장에 대한 예상 고객의 주거지역을 파악할 수 있고, 어느 매장의 영역이 축소되고, 어느 정도의 매출 감소가 이루어질지 예상할 수 있다.

다. 3단계 심화과정(연구 활동)의 구성

3단계 심화과정의 연구과제는 영재학생들이 직접 보로노이 다이어그램과 관련한 문제 상황을 설정한 뒤 필요한 정보를 직접 수집·활용하여 이를 해결하는 것이다. 연구과제의 주제 선정부터 역할분담, 연구계획을 포함한 모든 활동은 영재학생들의 주도하에 진행되며, 교사는 활동에 대한 안내와 조언을 하는 역할을 수행하게 된다. Renzulli의 3단계 심화학습 모형의 핵심은 바로 3단계 심화과정으로 상당한 수준의 창의력과 지적능력, 과제집착력이 요구되기 때문에 소수의 영재학생에게 적합한 심화과정이다. 일반학생을 대상으로 한 수업이라면 3단계 심화과정의 진행이 다소 어려울 수 있다. Renzulli는 심화학습의 50% 이상을 3단계 심화활동에 할애해야 한다고 주장했고, 본 연구에서도 3단계 심화과정에 가장 많은 비중을 두었다.

### 3. 3단계 심화과정인 학생 중심의 수학적 모델링 활동 분석

3단계 심화과정에서는 2단계 심화과정을 거친 4명의 영재학생들이 연구과제를 수행하는 과정에서 나타나는 핵심역량을 분석하였다. 연구과제는 보로노이 다이어그램과 관련한 주제와 문제 상황을 자유롭게 설정한 뒤 수학적 모델링을 통해 이를 스스로 해결하여 그 결과를 연구보고서로 작성하는 것이다. 영재학생들의 결과물인 연구보고서와 면담 자료를 중심으로 크게 문제해결 능력(P), 융합 능력(F), 정보처리 능력(I)으로 분류한 <표 Ⅲ-2>의 분석틀에 맞추어 분석이 이루어졌다.

가. 3단계 심화과정인 연구 활동의 진행 결과

영재학생들은 유럽 국가의 국경선과 수도를 중심으로 보로노이 다이어그램을 작도한 가상의 국경선을 비교분석하는 과정을 주제로 선정하였다. 이를 크게 2가지 탐구활동으로 나누어 진행된 연구 활동 개요는 <표 Ⅳ-2>과 같다.

<표 Ⅳ-2> 영재학생들의 연구 활동 개요

| 단계 | 세부내용 |
|---|---|
| 탐구 주제 | 유럽국가의 실제 국경선과 수도 중심의 보로노이 국경선의 비교 분석 |
| 탐구 목적 | 유럽 국가의 실제 국경선과 수도를 중심으로 보로노이 다이어그램을 작도한 가상의 국경선을 비교한 뒤 각 수도의 영향력을 알아본다. |
| 탐구 과정 | [탐구활동1] 유럽 국가를 수도를 중심으로 보로노이 다이어그램을 그리면 실제 국경선과 |

| | |
|---|---|
| | 유사할까?<br>[탐구활동2] 탐구활동1에서 소규모 국가를 제외하면 그 차이가 줄어들까? |
| 문제 상황의 이해 단계 | ·4명이 토의하여 주제를 선정하고 문제 상황을 제시<br>·개개인의 역할을 분담하고, 문제해결을 위한 연구계획을 수립<br>·연구 활동에 필요한 자료 목록을 미리 작성 |
| 현실 모델 및 수학적 모델 설정 단계 | ·수행에 필요한 보로노이 다이어그램과 헤론의 공식 등 수학 이론 정리<br>·인터넷을 통해 유럽 국가의 수도와 면적에 대한 정보를 수집<br>·수학적 모델로서 보로노이 다이어그램을 설정하고, 유럽의 지도에 각 수도의 위치를 표시 |
| 수학적 결론 도출 단계 | ·유럽 지도에 보로노이 영역을 OHP필름으로 작도한 뒤 정리<br>·보로노이 다각형을 삼각형으로 분할한 뒤 헤론의 공식과 축척 개념을 활용하여 보로노이 영역의 면적 계산<br>·유럽의 모든 국가에 대한 보로노이 면적을 표로 정리 |
| 결론의 재해석 단계 | ·앞서 진행한 탐구활동1에서 설정한 모델에 문제점을 발견<br>·규모가 작은 국가를 제외하여 새롭게 모델을 설명한 뒤 탐구활동 2 진행<br>·실제 국경선과 수도 중심의 보로노이 국경선을 비교<br>·탐구활동2을 진행하여 얻은 수학적 결론을 바탕으로 3가지 결론 도출 |

나. 3단계 심화과정인 연구 활동에서 나타난 핵심 역량 분석

1) [탐구활동1]의 분석

가) 문제 상황의 이해단계의 분석

영재학생들은 1-2단계 심화과정에서 학습한 보로노이 다이어그램과 수학적 모델링을 활용하여 스스로 주제를 선정하고 문제 상황을 제시하였다. 또한 각자의 역할을 분담하고, 문제해결을 위한 계획을 수립하여 앞으로의 일정을 구상하면서 본격적인 연구 활동이 시작되었다. 다음은 영재학생들이 토론을 통해 문제 상황을 제시하고, 연구 활동을 시작하면서 나눈 대화 내용이다.

<발췌문 D-1> 주제 선정과 문제 상황의 제시 과정

(1-1) 교사 : 지난 수업이 끝나고 선생님이 3단계 심화과정인 연구 활동을 위해 보로노이 다이어그램과 관련한 주제를 생각하도록 했지요? 자기가 준비해온 주제를 차례대로 이야기해볼까요?

(1-2) 학생A : 저는 중국과 일본 그리고 동남아시아 국가의 영해를 나누는 것을 생각해봤어요.

(1-3) 교사 : 이 활동은 어떤 의미가 있죠?

(1-4) 학생A : 요즘 영해에 대한 문제가 많다보니 이를 분명히 하는 기준이 필요할 것 같아요.

(1-5) 학생D : 그냥 선생님과 함께한 학교 배정 문제 다시 하면 안 되나요? 많이 생각해봤는데, 잘 안 떠올랐어요.

(1-6) 교사 : 지금부터는 여러분들이 직접 주제를 선정하여 문제를 해결해야 해요.

(1-7) 학생C : 저는 유럽의 국경선과 수도를 중심으로 한 보로노이 영역이 어느 정도 일치하는지 살펴보면 좋을 것 같아요. 유럽이 통합되면서 국경선의 의미가 없어지고 있는데, 소속된 국가보다 실질적인 영향력이 어떻게 다른지 살펴보고 싶어요.

(1-8) 학생B : 저는 놀이공원에 있는 음식점에 대한 영역의 분할을 통해 사람들이 어느 식당을 이용할지 분석하는 것을 생각했어요.

(1-9) 교사 : 여러분 의견 중 무엇을 주제로 선정하면 좋을지 의견을 나눠보세요.

…

(1-10) 학생A : 전부 학생C가 제안한 유럽의 국경선과 수도를 중심으로 한 보로노이 영역의 비교를 선택했어요. 선생님 생각은 어떠세요?

(1-11) 교사 : 연구 활동에서는 모든 것을 여러분이 결정해야 해요. 저는 여러분들 생각에 항상 동의해요. 각자의 역할도

상의해서 분담하도록 해야 해요. 처음 연구 활동을 시작하면서 무엇이 필요할지 논의하면서 계획을 세워보도록 하세요.

…

(각자의 역할을 분담하고, 앞으로의 계획을 수립하는 토의가 이어진다.)

…

(1-12) 학생C : 지금까지 논의된 내용을 정리해보겠습니다. 먼저 유럽의 각 국가의 수도와 국경선이 포함된 지도와 여러 가지 자료가 필요한데, 이와 관련된 자료는 학생A와 B가 주도적으로 해주세요. 탐구보고서는 학생D가 주도적으로 해주세요. 앞으로의 진행은 핸드폰 채팅창을 통해 공지하거나 의견을 제시하면 되요. 다음 주쯤 한번 같이 모여 활동을 진행하겠습니다. 이상 팀장이 말씀드렸습니다.

연구 활동은 영재학생들 주도 하에 문제 상황을 설정하여 문제해결을 위한 계획을 수립하여 이를 해결하는 과정으로 진행됐다. 교사는 발췌문 (1-6), (1-11)에서 모든 활동이 학생 중심이어야 함을 강조하였다. 먼저 발췌문 (1-1)에서 (1-8)까지 각자 준비해온 주제를 발표하는 시간을 가졌다. 토론을 통해 학생들은 각자의 역할을 분담하고, 앞으로의 일정에 대한 구체적인 방향을 토론하여 발췌문 (1-12)와 같이 공지하였다. 기존의 영재수업과 달리 모든 활동이 영재학생이 주도적으로 진행되면서 종합적인 사고와 책임감이 요구될 수밖에 없었다. 발췌문 (1-10)에서 영재학생들이 토론하여 직접 주제를 선정하여 문제 상황을 제시하면서 문제 이해 및 전략 탐색의 과정(P1)과 협력적 문제해결(P3), 문제 만들기(P4) 과정이 잘 드러났다. 스스로 수학적 개념을 새로운 상황에 적용하여 해결하려는 모습에서 수학 외적 연결성(F2)과 수학의 유용성을 느끼고 있었다. 발췌문 (1-12)에서 학생들이 해결해야할 문제는 단순히 문제 상황을 읽고 이해하는 수준이 아니다보니 다양한 자료와 정보를 수집하여 정리할 필요성을 느낄 수밖에 없었다(I1, I2).

나) 모델 설정 단계의 분석

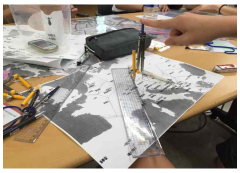
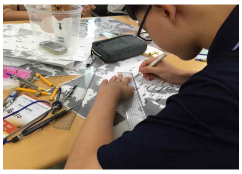
영재학생들의 활동에서 현실 모델과 수학적 모델을 설정하는 단계의 구분이 모호하여 분석의 용이함을 위해 이 과정을 같이 분석하였다. 영재학생들은 탐구활동을 수행하는 과정에서 국가의 수도의 위치를 지도에 표시한 뒤 보로노이 다이어그램을 작도하는 과정에서 수학적 모델을 활용하였다. 다음은 [탐구활동1]의 진행과정에 대한 설명이다.

([탐구활동1]의 진행과정)

(1-1) 보로노이 다이어그램과 헤론의 공식 등의 이론을 정리한다

(1-2) 각 나라의 수도를 점으로 표시한다.

(1-3) 점과 점 사이를 컴퍼스와 자를 이용하여 수직이등분선을 그린다.

(1-4) 수직이등분선을 이용하여 보로노이 다이어그램을 작도하고, 보로노이 영역을 분할한다.

활동(1-1)에서 탐구활동에 필요한 보로노이 다이어그램과 헤론의 공식 등의 이론을 정리하였다. 이 과정에서 필요한 자료와 정보를 직접 수집하여 이를 정리, 분석하는 모습이 잘 드러났다(I1, I2, P3). 이를 바탕으로 활동 (1-1)~(1-4)까지 영재학생들은 유럽의 지도에 각 수도의 위치를 표시한 뒤 보로노이 다이어그램을 작도하였다(P2, P3, F2). 영재학생들은 서로 협력하여 앞에서 배운 보로노이 다이어그램에 대한 이론을 직접 문제 상황에 적용하면서 계획을 시행하고 반성하면서 문제 상황을 해결하는 모습이었다(P1, P2, P3, F2). 영재학생들은 서로

편안한 분위기에서 자유로운 토론과 역할분담을 통해 연구과제를 수행해나갔다(P3). 또한 앞 단계에서 수집한 정보를 분석하여 적절하게 이를 활용하고 부족한 자료를 새롭게 탐색하는 모습이 나타났다(I2, I3). 이 과정에서 계획 실행 및 반성(P2), 협력적 문제해결(P3), 수학 외적 연결 및 융합(F2), 자료와 정보 수집(I1), 자료와 정보 정리 및 분석(I2), 정보 해석 및 활용(I3)의 요소가 잘 드러났다.

다) 수학적 결론 도출 단계의 분석

영재학생들은 비례식과 헤론의 공식을 이용하여 각 국가의 수도에 대한 보로노이 영역과 실제 국가의 면적을 비교하면서 그 차이가 나타나는 지역을 찾고자 했다. 다음은 학생들이 수학적 모델인 보로노이 다이어그램을 설정하여 수학적 결론을 도출하는 과정에 대한 설명으로 아래와 같은 순서로 진행하였다.

(1-5) 앞에서 구한 보로노이 다이어그램을 삼각형으로 분할해준다.

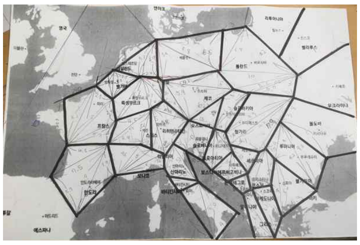
(1-6) 모든 변의 길이를 구한 후, 축척을 활용하여 면적을 구해준다.

- 암스테르담과 베를린 사이의 실제 거리와 지도상의 가상거리는 각각 574km와 8.3cm이다.
- 8.3cm : 574km = 가상길이: 실제길이라는 비례식을 이용하여

실제거리 = $\dfrac{574km \times \text{가상길이}}{8.3cm}$ 로 구할 수 있다.

- 데이터 처리하는 과정은 엑셀을 이용하였는데 헤론의 공식

$S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, $\left(s=\dfrac{a+b+c}{2}\right)$을 이용해 면적을 구한다.



(1-7) 이렇게 구한 보로노이 영역의 면적과 실제 국가의 면적을 비교한다.

분석 결과의 예) 단위 $km^2$

| 나라 | 분할된 삼각형을 합한 보로노이 면적 | 실제 면적 |
|---|---|---|
| 폴란드 | 40816.59+15991.47+56708.03+144973.1=297050.7 | 312685 |
| 벨기에 | 29861.88+19242.97=49104.85 | 30510 |
| 프랑스 | 64278.67+51572.73+44667.29+30817.36=191336.1 | 547030 |
| 불가리아 | 19560.7+75252.05=94812.75 | 110910 |

활동(1-5)과 (1-6)에서 영재학생들은 보로노이 다각형을 삼각형으로 분할하여 헤론의 공식을 이용해 삼각형의 넓이를 구한 뒤 다각형의 넓이를 구했다(F1). 한 학생이 예전에 영재교육원에서 헤론의 공식을 이용해 다른 활동을 한 적이 있다고 하였다. 이어 지도의 축척개념을 활용하여 지도상의 보로노이 다각형의 넓이를 실제 넓이로 변환하였다(P2, P3, F1, I2, I3, F1, F2). 활동(1-7)에서 영재학생들이 보로노이 다이어그램의 실제 넓이를 구한 목적은 각 국가의 수도가 미치는 영향력과 실제 수도가 포함된 국가의 면적의 비교를 위해서였다. 영재학생

들은 유럽의 모든 국가에 대한 면적을 제시하여 이를 비교하였고, 그 중 몇 개 국가에 대해 활동(1-7)의 예시로 기재하였다(P2, P3, F2, I2, I3). 수학적 결론을 도출하는 과정에서 필요한 수학개념을 다른 상황에 적용하려는 외적연결성(F2)과 수학 개념과 정보를 찾아 활용하는 정보처리(I)와 관련한 요소가 잘 드러났다. 또한 학생들은 전략을 탐색하여 계획을 실행하고, 서로 협력하는 과정 속에서 학생들 나름의 결론을 제시하려고 하였다(P2, P3).

라) 결론의 재해석 단계의 분석

영재학생들은 각 국가의 수도를 중심으로 한 보로노이 영역의 넓이와 실제 국가의 넓이를 비교하고, 모양의 유사성을 비교하였다. 점에 대한 보로노이 영역과 국가의 모양에 차이가 많은 지역은 해당 국가만큼이나 인접한 다른 나라의 영향을 받을 가능성이 높다고 생각하였다. 그런데 크기가 작은 국가들로 인해 다소 엉뚱한 결과가 도출되었고, 보로노이 다이어그램을 그린 결과에 문제가 있다고 판단하였다.

(1-8) 학생들의 결론

1. 보로노이 다이어그램을 통해 얻은 보로노이 영역을 각 국가의 수도가 미치는 영향력이라 할 수 있다.

2. 다른 국가의 수도와 가까운 지역은 해당 국가의 영향보다 오히려 인근 국가의 영향을 받을 가능성이 있다.

3. 예상했던 것과 달리 크기가 작은 국가들로 인해 보로노이 다이어그램에 문제가 있다고 생각했다. 그래서 조건을 수정하여 다시 진행할 필요가 있다.

⇒ <u>소규모 국가로 인해 오차가 많이 생긴다고 판단하여 조건을 수정하여 새롭게 모델링을 진행할 필요성을 느끼고 [탐구활동2]를 진행해야겠다고 생각하였다.</u>

영재학생들은 면적이 매우 작은 5개의 국가를 제외한 탐구활동2의 필요성을 제기한다(P2, P3, I2, I3). 앞선 2단계 모델링 과정과 달리 결론의 재해석을 통해 새롭게 문제를 제기하여 다시 한 번 모델링 과정을 거치게 되었다. 영재학생들이 결론을 재해석하는 과정에서는 단순한 사고가 아닌 상황을 분석하는 고도의 종합적인 사고력과 문제해결력이 포함되어 있다. 복잡한 모델링 과정을 거치는 과정에서 서로 협력하여 문제를 해결하고, 필요한 정보를 추가로 수집하며, 이를 분석하고 활용하는 모습이 잘 드러났다(P2, P3, I2, I3). 또한 수학을 다른 상황에 적용하면서 외적 연결성(F2)뿐만 아니라 학습 동기나 유용성과 가치, 태도 등의 정의적인 면에서도 긍정적인 효과가 나타났다.

2) [탐구활동2]의 분석

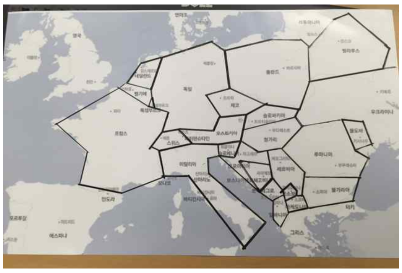
가) 문제 상황의 이해단계의 분석

영재학생들은 탐구활동의 문제점을 보완하기 위해 크기가 매우 작은 국가를 제외한 탐구활동2를 수행하였다. 방법은 [탐구활동1]과 동일하게 진행하였다. 이 과정에서 앞으로의 진행과정과 수정해야할 부분을 중심으로 토의를 진행하여 새롭게 문제를 제기한 뒤(P4), 문제해결의 방향을 수립하였다. 이 과정에서 서로 의견을 조율하면서 협력적 문제해결력(P3)과 문제해결의 전략 탐색(P1)이 잘 드러났다. 이는 평소 학교 수업에서 접하기 힘든 경험으로 수학 외적 연결성(F3)과 수학의 유용성을 느낄 수 있는 모습이었다.

나) 모델 설정 단계의 분석

영재학생들의 활동에서 현실 모델과 수학적 모델을 설정하는 단계의 구분이 모호하여 분석을 용이함을 위해 이 과정을 같이 분석하였다. 영재학생들은 탐구활동을 수행하는 과정에서 5개의 국가를 제외하여 모델을 수정하여 [탐구활동1]과 동일한 방법으로 다음과 같이 수행하였다.

(2-1) [탐구활동1]에서 구한 면적과 실제 면적이 100배 이상 차이나는 나라를 제외한다.
(2-2) 각 나라의 수도를 점으로 표시한다.
(2-3) 점과 점 사이를 컴퍼스와 자를 이용하여 수직이등분선을 그린다.
(2-4) 수직이등분선을 이용하여 보로노이 다이어그램을 그린다.
(2-5) 보로노이 다이어그램을 삼각형으로 분할해준다. 해안선과 국경선은 모두 직선으로 표기한다.



[탐구활동1]에서 나타난 문제점을 보완하고자 수학적 모델을 수정하여 모델을 다시 설정하였다(P4). 앞선 과정의 시행착오를 겪으면서 활동(2-1)~(2-4)까지 전반적인 수행하는 과정에서 [탐구활동1]과 비교하면서 결과를 미리 예측하기도 하였고, 계획 시행 및 반성(P2)과 협력적 문제해결(P3)의 과정이 잘 드러났다. 전반적으로 정보처리(I)와 문제해결(P)과 관련한 항목들이 잘 드러났다. 중학생들이다보니 수행하는 과정에 미숙한 점도 많았지만 학생 나름의 방법으로 문제를 해결하는 모습이 돋보였다.

다) 수학적 결론 도출 단계의 분석

영재학생들은 크기가 작은 국가를 제외하여 보로노이 영역을 분할한 결과를 OHP필름에 그린 뒤 원래의 지도와 비교하면서 유사한 정도를 확인하였다. 오차를 야기한 5개 국가를 제외하니 전체적인 보로노이 에지와 국경선이 비슷해졌다. 수학적 결론 도출 활동에 대한 전반적인 진행과정은 다음과 같다.

(2-6) 모든 변의 길이를 구한 후 축척을 활용하여 면적을 구해준다.
(2-7) 실제의 면적과 비교한다.

분석 결과의 예) 단위 $km^2$

| 나라 | 분할된 삼각형을 합한 보로노이 면적 | 실제 면적 |
|---|---|---|
| 폴란드 | 40816.59+15991.47+56708.03+144973.1=297050.7 | 312685 |
| 벨기에 | 29861.88+19242.97=49104.85 | 30,510 |
| 프랑스 | 64278.67+51572.73+44667.29+30817.36=191336.1 | 547030 |
| 불가리아 | 19560.7+75252.05=94812.75 | 110910 |

(2-8) 보로노이 다이어그램과 실제 국경선을 비교하여 유사도를 비교한다.

영재학생들은 크기가 작은 국가를 제외한 뒤 보로노이 영역을 분할한 결과를 OHP필름에 그려 원래의 지도와 비교하여 국경선의 유사한 정도를 확인하였다(P2, P3, F2). 이어 [탐구활동1]과 동일한 방법으로 지도 상의 면적을 영역별로 구한 뒤 이를 실제 면적과 비교하였다(P2, P3, F2, I2, I3). 활동(2-6)에서 영재학생들은 헤론의 공식과 축척의 개념을 이용하여 보로노이 영역의 넓이를 구했고(P2, P3, F1, I2, I3), 그 과정에서 문제해결(P)과 외적 연결성(F2), 정보처리(I)의 요소가 잘 드러났다. 또한 활동(2-8)에서 실제 국가별 실제 면적에 대한 정보를 정리하여 비교하는 과정에서 정보에 대한 분석과 해석, 활용의 모습이 나타났다(I2, I3). [탐구활동1]과의 결과를 비교하면서 반성의 모습과 협력적 문제해결의 모습도 드러났다(P2, P3).

라) 결론의 재해석 단계의 분석

영재학생들은 수학적 결론을 실제 상황에 적용하여 재해석하는 과정에서 다음과 같이 최종 결론을 정리하였다.

**학생들의 최종 결론**

[결론1] 유럽국가의 대부분은 수도가 중앙에 위치했지만 일부 국가는 한쪽에 치우쳐 있었다. 이런 지역의 경우 수도보다 다른 국가의 영향을 받는 곳이 있을 수 있다.

[결론2] 동유럽과 남부유럽은 보로노이 에지와 국경선이 어느 정도 유사하였으며, 이에 각 국가는 수도의 영향을 받을 가능성이 높다고 판단하였다.

[결론3] 서유럽은 보로노이 에지와 국경선이 차이가 있어 다른 국가의 영향을 더 많이 받는 경우가 생길 수 있다.

영재학생들은 결론을 제시하기까지 정보를 수집하여 활용하고(I1, I2), 이를 분석 적용하는 과정이 잘 드러났다(I3). 결론의 옳고 그름을 떠나 영재학생들은 나름의 논리를 가지고 수학적 결론을 재해석한 실제 문제의 3가지 결론을 내렸다(P1, P2, P3). 학생들은 자신들이 배운 수학적 개념과 수행한 수학적 결론을 적용하는 과정에서 수학 외적 연결성(F2)과 수학에 대한 가치와 유용성을 느끼고 있었다. 학생 중에는 탐구활동2에서도 결과가 좋지 않게 나올까 걱정하기도 했다고 한다. 학생들은 실제 상황에서의 문제는 문제 상황이 명확하지 않거나 결론이 정해지지 않은 경우도 많다는 것을 느끼고 있었다. 수학적 결론의 재해석이나 결론이 정해지지 않은 문제를 수학적 모델링을 통한 해결하는 과정은 일반 수업에서는 경험하기 힘든 과정이다. 본 연구에서는 주로 인지적인 부분에 대한 분석이 이루어졌지만 수학의 유용성과 가치 인식, 흥미 유발 등과 관련하여 정의적인 부분에서도 상당히 효과가 나타났다.

다. 3단계 심화과정인 연구 활동에서 나타나는 핵심역량 분석 종합

3단계 심화과정인 연구 활동에서 연구과제를 수행하는 과정에서 과제별로 나타나는 핵심역량의 분석을 종합하기 위해 수학적 모델링 단계별로 나타나는 핵심역량을 각 요소별로 분석하여 두드러지게 나타나는 요소는 ○로 표기하고, 부분적으로 나타나는 요소는 △으로 표기하였다. 연구 활동의 특성상 여러 가지 요소가 동시에 복합적으로 나타나며, 종합적인 사고가 이루어졌다. 영재학생들의 연구과제로 수학적 모델링을 수행하는 과정에서 단계별로 나타나는 핵심역량을 정리한 결과는 <표 Ⅳ-3>과 같다.

<표 Ⅳ-3> 수학적 모델링 단계별 핵심역량 분석 체크리스트

| 역량 | 하위요소 | 문제 상황의 이해 | 모델 설정단계 | 수학적 결론도출 | 결론의 재해석 |
|---|---|---|---|---|---|
| 문제 해결 (P) | 문제 이해 및 전략 탐색(P1) | ○ | △ | △ | △ |
| | 계획 시행 및 반성(P2) | | ○ | ○ | ○ |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 협력적 문제해결(P3) | ○ | ○ | ○ | ○ |
| | 문제 만들기(P4) | ○ | | | △ |
| 융합 (F) | 수학 내적연결(F1) | | △ | ○ | △ |
| | 수학 외적 연결 및 융합(F2) | ○ | ○ | ○ | ○ |
| 정보 처리 (I) | 자료와 정보 수집(I1) | △ | ○ | ○ | △ |
| | 자료와 정보 정리 및 분석(I2) | △ | ○ | ○ | ○ |
| | 정보 해석 및 활용(I3) | | ○ | ○ | ○ |

수학적 모델링은 문제해결이나 수학외적연결성을 신장시킬 수 있는 방안으로 잘 알려져 있다. 본 연구의 3단계 심화과정인 학생 중심의 수학적 모델링 과정에서는 다양하고 복합적인 요소들이 잘 드러났고, 문제해결이나 수학외적연결성뿐만 아니라 특히 정보처리와 관련한 요소들이 잘 드러났다. 일반적인 수업과 달리 아무런 정보가 주어지지 않은 상황에서 영재학생들은 정보 수집의 필요성을 느끼고, 수집한 자료와 정보를 적절하게 분석하고 활용하였다. 이를 위해 유럽 국가에 대한 수도와 면적에 대한 정보를 수집하고, 수학적 모델을 설정하기 위하여 보로노이 다이어그램과 헤론의 공식, 축척 개념을 활용하였다. 유럽의 지도에 보로노이 영역을 구하고, 넓이를 직접 구하는 과정에서 문제해결의 각 요소와 협력적 문제해결의 요소가 잘 드러났다. 탐구활동1에서 학생들이 예상한 결과와 차이가 많이 났는데, 그 이유가 소규모 국가라는 결론을 내렸다. 이에 소규모 국가를 제외하여 새롭게 탐구활동을 진행하면서 모델링의 의미를 제대로 이해했다고 판단된다. 이를 통해 최종적인 결론을 도출하게 되면서 고도의 종합적 사고능력과 문제해결력, 창의적 사고력이 요구되었다. 학교 수업에서는 수학이 실제로 어떻게 활용하는지 접할 기회가 많지 않다. 반면 실제 상황에 기반을 둔 모델링은 수학 외적 연결성을 향상시켜주며, 4명의 학생들이 하나의 문제를 해결하기 위한 과정 속에서 협력적 문제해결과 정보의 분석과 해석, 의사소통 등의 다양한 요소가 복합적으로 나타났다.

### 라. 현직교사의 설문조사 결과 분석

설문조사는 연구자의 설명과 연구과제를 수행한 연구보고서를 바탕으로 리커트 5점 척도에 의한 체크리스트 방식과 서술형 문항으로 이루어졌다. 2015 개정교육과정의 6가지 수학 교과 역량의 하위 요소를 중심으로 현직교사들이 응답을 정리한 결과는 <표 Ⅳ-4>와 같다.

<표 Ⅳ-4> 3단계 심화과정에 대한 현직교사의 설문조사 결과

| 역량 | 하위요소 | 평가결과 | 역량 | 하위요소 | 평가결과 |
|---|---|---|---|---|---|
| 문제해결 | 문제 이해 및 전략 탐색 | 4.7 | 융합 | 수학 내적연결 | 4.5 |
| | 계획 시행 및 반성 | 4.8 | | 수학 외적 연결 및 융합 | 4.9 |
| | 협력적 문제해결 | 4.9 | 정보처리 | 자료와 정보 수집 | 4.9 |
| | 문제 만들기 | 4.6 | | 자료와 정보 정리 및 분석 | 4.9 |
| | | | | 정보 해석 및 활용 | 4.8 |

현직교사들은 연구자가 개발한 프로그램에 대해 문제해결과 정보처리 능력, 수학외적 연결성 향상에 큰 도움이 될 것이라고 판단하였다. 학교 수업에서의 수학적 모델링은 정보와 자료가 제공되다보니 학생들의 정보처리 능력이 잘 드러나지 않는 반면 학생 중심의 수학적 모델링 과정에서는 정보처리 능력이 잘 드러났다는 의견이 많았다. 또한 수학적 모델링의 특성상 문제해결과 외적연결성이 잘 포함되었다고 하였다. 그 외에도 이러한 수행

과정에서 의사소통이나 정의적인 면에서도 효과가 있을 것이라고 응답하였다.

현직교사들은 평소 학교 수업에서는 어려운 영재학생들이 문제를 제기하는 과정과 수학적 결론의 재해석 과정을 잘 살린 수학적 모델링 수업이라고 평가하였다, 특히 영재학생들이 주도한 연구활동은 정보처리능력이나 문제해결력, 종합적 사고력을 키우기 적합하다고 하였다. 반면 교사의 발문, 충분한 시간 제공 등 수업과정에서 교사의 운영이 중요하며, 평가 계획도 구체적이었으면 한다는 반응이었다.

## Ⅴ. 결론 및 논의

본 연구에서 개발한 영재프로그램을 실제 수업에 적용한 뒤 연구 문제를 해결하는 과정에서 내린 결론은 다음과 같다.

첫째, 보로노이 다이어그램과 들로네 삼각분할은 최근 주목받기 시작한 수학이론으로 수학영재수업의 주제로 적합하다. 성질과 작도에 대한 내용은 사전 지식을 요구하지 않아 초등학생에게도 설명이 가능하며, 공학이나 지리학과 관련한 심화이론은 고등학생에게 활용할 수 있다. 최근 공간의 효율적인 분할방법으로 다양한 분야에 활용되며, 영재학생들의 외적연결성과 문제해결력, 정보처리 능력, 종합적 사고력을 향상시킬 수 있다.

둘째, 3단계 심화과정인 학생 중심의 수학적 모델링 활동에서는 교사가 문제를 제시하는 기존의 수업방식과 달리 문제제시와 역할 분담, 필요한 자료의 선정 및 수집, 결론 도출까지 모든 과정이 영재학생들에 의해 진행되었다. 과제 수행 과정에서 높은 수준의 수학적 능력과 지적 능력이 요구되었고, 영재학생들에게 종합적 사고력과 문제해결력, 창의력, 자기 주도적 학습 능력이 발현되었다. 앞으로의 영재교육은 교사 위주의 지식 전달이 아닌 고등사고력을 요구하는 학생 중심의 소규모 연구 활동을 반드시 포함하여야 한다.

셋째, 3단계 심화과정인 학생 중심의 수학적 모델링 과정에서 문제의 이해 단계는 직접 문제 상황을 설정하면서 영재학생들은 문제해결의 필요성을 느끼고 있었다. 현실 모델과 수학적 모델 설정 단계에서는 아무 정보가 주어지지 않은 상황에서 자료 수집의 필요성을 느끼고, 토의를 통해 자료의 활용 방안을 수립하였다. 수학적 결론 도출 단계에서는 유럽 지도에 보로노이 영역을 작도한 뒤 다각형을 삼각형으로 분할하여 헤론의 공식을 활용해 직접 면적을 구했다. 이 과정에서 정보의 분석 및 활용, 문제해결의 각 요소들이 잘 드러났다. 결론의 재해석 단계에서는 탐구활동1에서 설정한 모델에 문제점을 발견하여 모델을 보완하여 새롭게 탐구활동2를 진행한 뒤 최종적인 3가지 결론을 도출하면서 문제해결과 수학외적연결성, 정보처리 능력 등 다양한 복합적인 사고가 나타났다.

본 연구의 결론을 바탕으로 다음과 같은 사항을 제언하고자 한다.

가. 보로노이 다이어그램과 들로네 삼각분할은 최근 다양한 분야에 활용되고 있는 수학이론으로 영재학생들의 외적연결성과 문제해결력을 향상시킬 수 있다. 보로노이 다이어그램에 대한 연구가 최근 본격적으로 이루어지기 시작한 만큼 이와 관련한 교수·학습 자료가 활발히 개발되어야 할 것이다.

나. 앞으로 수학영재교육의 방향은 선행학습과 순수수학 위주가 아닌 심화된 수학개념을 바탕으로 다른 영역이나 교과에 적용하는 단계로 진행되어야 한다. 따라서 영재프로그램은 학교의 수업내용을 심화시킨 수학개념에 대한 학습을 진행한 뒤 학생 중심의 소규모 연구 활동을 통해 학생 스스로 문제 상황을 해결하는 과정으로 진행되어야 한다.

다. 최근 국내외에서 수학적 모델링이 강조하는 추세임에도 아직 수학적 모델링에 대한 교사의 지식과 관심이 부족하며, 수업 준비에 부담을 느끼고 있다. 이를 위해 수학적 모델링 프로그램의 개발과 이를 현장에 정착시킬 수 있는 방안에 대한 연구가 필요하다.

라. 학교 수업에서는 수학적 모델을 설정하고 이를 해결하는 과정에만 초점을 두면서 결론을 재해석할 기회

가 부족하다. 또한 답이 정해진 문제만 다루다보니 같은 수학적 결과일지라도 사람마다 다르게 해석할 수 있다는 것을 간과하고 있다. 진정한 의미의 수학적 모델링 수업은 실제 상황에서 문제 제기의 필요성을 직접 느끼고, 이를 적절한 모델을 설정하여 결론을 찾은 뒤 실제 상황에서 재해석하는 과정으로 모든 과정이 학생 주도적으로 진행되어야 한다.

## 참 고 문 헌


교육부 (2013). 제3차 영재교육진흥종합계획(2013-2017).

Ministry of Education(2013). *The third gifted education Comprehensive plan*(2013-2017)

교육부 (2015). 수학과 교육과정. 교육부 고시 제2015-74호 [별책8].

Ministry of Education(2013). *Mathematics Curriculum*.

교육부, 한국과학창의재단 (2015). 2015 개정 수학과 교육과정 시안 개발 연구Ⅱ.

Ministry of Education, The Korea Foundation for the Advancement of Science and Creativity(2015). *2015 Revision mathematics curriculums develop researchII*.

김경란 (2011). 렌줄리(Renzulli)의 3단계 심화학습 모형을 적용한 수학 영재 수업 연구. 서울교육대학교 석사학위논문.

Kim, K. R. (2011) *A study of a gifted Math class applying Renzulli's enrichment triad model*, Master's thesis, Seoul National University.

김수미 (1993). 중등학교에서의 수학적 모델링에 관한 고찰. 서울대학교 석사학위논문

Kim, S. M. (1993). *Consideration of the mathemtical modelling in the mathematics curriculum*, Master's thesis, Seoul National University.

김진수 (2012). STEAM교육론. 파주, 양서원.

Kim, J. S. (2012). *STEAM Education*. Paju, Yangsuwon.

김홍희 (2009). 초등수학영재학급 학생의 수학적 모델링 과정에 관한 분석. 경인교육대학교 석사학위논문.

Kim, H. H. (2009). *Analysis of the Mathematical Modeling Process of Mathematically Gifted Elementary Schoolers*. Master's thesis, Gyeongin National University of Education.

유홍규 (2017). 수학적 모델링에 기반을 둔 영재프로그램의 개발 및 적용 : 보로노이 다이어그램과 들로네 삼각분할을 중심으로. 한국교원대학교 석사학위논문.

Yu, H. G. (2017). *Development and application of program for mathematically gifted students based on mathematical modeling: focused on Voronoi diagram and Delaunay triangulation*. Master's thesis, Korea National University of Education.

이신동 · 이정규 · 박춘성 (2009). 최신영재교육학개론. 서울: 학지사.

Lee, S. D., Lee, J. K., Park, C. S. (2009). *An introduction to Latest Gifted Education*. Seoul: Hakji.

장혜원 (2012). 미국의 수학교육과정 규준 CCSSM의 수학적 실천에 대한 고찰. 대한수학교육학회지 수학교육학연구, 22(4), 557-580.

Chang, H. W. (2012). Study on the Standards for Mathematical Practice of Common Core States Standards for Mathematics. *Journal Of Educational Research In Mathematics*, 22(4), 557-580.

Blum, W. & Ferri, R. B.(2009). Mathematical Modeling: Can it be taught and learnt. *Journal of Mathematical Modeling and Application,* 2009, 1(1), 45-58.

Commom Core State Standards Initiative(CCSSI: 2010). *Commom Core State Standards for Mathematics(CCSSM)*. Washington, DC: National Governors Association Center for Best Practice and the Council of Chief State School Office.

# Development and application of program for mathematically gifted students based on mathematical modeling

## : focused on Voronoi diagram and Delaunay triangulation

**Yu, Hong-Gyu**
Graduate School, Korea National University of Education, Cheongju, Chungbuk, Korea
E-mail : neoape33@hanmail.net

**Yun, Jong-Gug**†
Department of Mathematics Education, Korea National University of Education, Cheongju, Chungbuk, Korea
E-mail : jgyun69@knue.ac.kr

The purpose of this research is divide into two kinds. First, develop the mathematical modeling program for mathematically gifted students focused on Voronoi diagram and Delaunay triangulation, and then gifted teachers can use it in the class. Voronoi diagram and Delaunay triangulation are Spatial partition theory use in engineering and geography field and improve gifted student's mathematical connections, problem solving competency and reasoning ability. Second, after applying the developed program to the class, I analyze gifted student's core competency.

Applying the mathematical modeling program, the following findings were given.

First, Voronoi diagram and Delaunay triangulation are received attention recently and suitable subject for mathematics gifted education.

Second,, in third enrichment course(Student's Centered Mathematical Modeling Activity), gifted students conduct the problem presentation, division of roles, select and collect the information, draw conclusions by discussion. In process of achievement, high level mathematical competency and intellectual capacity are needed so synthetic thinking ability, problem solving, creativity and self-directed learning ability are appeared to gifted students.

Third, in third enrichment course(Student's Centered Mathematical Modeling Activity), problem solving, mathematical connections, information processing competency are appeared.

---

* ZDM Classification : D40, U30
* 2000 Mathematics Subject Classification : 97D40
* Key words : Voronoi diagram and Delaunay triangulation, Mathematical modeling, Mathematics gifted education
† Corresponding author