

대화형 수학 디지털교과서 개발과 활용 사례 연구 - 선형대수학을 중심으로 -

이 상 구 (성균관대학교)

이 재 화 (성균관대학교)[†]

박 경 은 (성균관대학교)

스마트 교육 환경과 4차 산업 혁명 시대를 맞이하여 편리한 기능을 갖는 다양한 테크놀로지들을 활용하는 새로운 차원의 디지털 수학 교과서가 필요하게 되었다. 한국의 경우 초·중등 수학 교육에서는 여러 다양한 시도가 있었으나 대학 수학교육의 경우 디지털 수학 교과서 관련 연구는 미비하였다.

본 논문에서는 선형대수학을 중심으로 디지털 콘텐츠와 대화형 실습실을 활용하는 디지털 교과서를 소개한다. 본 교과서는 본 연구진이 직접 개발하여 누구나 <http://matrix.skku.ac.kr/LA-K>에서 다운로드 받을 수 있도록 제공하였으며, 기존의 종이 교과서(서책형)를 단순히 pdf 형태의 파일로 변환하여 애니메이션이나 참고자료 등을 추가한 수준에서 벗어나 전자책, 웹 콘텐츠, 강의 동영상, 대화형 실습실을 포함한다. 본 선형대수학 디지털 교과서는 학생들이 어떠한 모바일 기기에서든 시간과 장소의 제약 없이 자유롭게 사용할 수 있으며, 계산, 코딩 및 타이핑 과정에서 절약된 시간을 수학 개념을 더 깊이 이해하는데 사용할 수 있다. 코드를 포함한 대화형 실습실 및 동영상 강의를 탑재한 최초의 수학 디지털 교과서로 평가되는 본 연구의 결과물은 차세대 디지털 교과서의 주요 모델 중 하나가 될 것으로 판단된다.

I. 서론

다보스 세계경제포럼 2016(WEF-2016)에서 주요 의제로 채택된 '4차 산업혁명'은 이후 전 세계를 휩쓰는 주요 이슈로 떠올랐다. 그리고 WEF-2017 포럼에서도 '4차 산업혁명의 본격화'라는 이슈가 제일 중요한 위치를 차지할 만큼 앞으로의 사회가 어떤 형태로 변화해 갈지 그에 대한 활발한 논의가 진행되고 있다. 4차 산업혁명은 초연결성, 초지능성, 예측 가능성을 그 특징으로 하는데, 사물인터넷(IoT), 인공지능(AI), 빅데이터(Big Data) 등의 ICT기술을 기반으로 디지털 세계, 생물학적 영역, 물리적 영역 간 경계를 허물고 있다. 예를 들어, 인공지능 분야에서는 신경망을 필터로 이용한 합성곱 신경망(Convolutional Neural Network)으로 영상분류 문제에서 큰 진보를 이루었고, 구글의 Deep Mind사에서 개발한 알파고와 강화학습(Reinforcement learning)에서 얻은 학습을 바탕으로 세계 바둑 1인자로 올라섰다. 이 과정에서 수학의 중요성이 더욱 강조되었고, 수학을 학습하는 동시에 컴퓨터언어(코딩)에 대한 기본 능력을 갖추는 것이 누구에게나 필요하게 되었다.

이러한 변화에 따라 학교교육에서도 ICT를 활용한 새로운 패러다임의 전환이 요구되고 있으며(미래창조과학부, 2016; 허남구, 2016), ICT기술을 충분히 활용한 디지털교과서의 개발과 활용이 강조되었다. 한국에서도 이미

* 접수일(2017년 3월 21일), 심사(수정)일(2017년 5월 17일), 게재확정일(2017년 5월 25일)

* ZDM 분류 : U25, U75

* MSC2000 분류 : 97U20, 97U70

* 주제어 : 디지털교과서, 선형대수학, 강의 동영상, 대화형 실습실, SageMath, 무료 e-book

[†] 교신저자 : jhlee2chn@skku.edu

* 이 논문은 2017년도 정부(교육부)의 재원으로 한국연구재단의 지원을 받아 수행된 기초연구사업입(No.2017R1D1A1B03035865).

디지털교과서에 대한 다양한 모델이 소개되었고(교육과학기술부, 2012; 김광진, 2013; 류희찬·최경식, 2015; 미래창조과학부, 2016), 그 중 사회, 과학, 언어 등의 과목에서는 초등학교와 중등학교에 단계적으로 도입이 진행 중이다.¹⁾ 이미 여러 나라에서 디지털교과서가 중요한 교재로 자리 잡아가고 있으며, 디지털 학습 자료의 재정적 및 교육적 이점에 기인하여 결국 종이 교과서(서책형)의 주요 기능 일부를 대체할 것을 예상하고 있다.

수학의 교수·학습에서는 디지털교과서를 통하여 수학 교과가 가진 특징, 즉 복잡한 계산 및 시뮬레이션이 이루어질 수 있어야 학생들이 학습하면서 식을 세우고, 문제를 계산하면서 능동적으로 탐구할 수 있는 활동이 가능하다. 그러나 현재까지 개발된 디지털 수학 교과서는 계산과정이나 시뮬레이션 결과가 기록된 기존의 서책형 교과서를 단순히 e-pub, azw, mobi 및 pdf 파일 형식으로 변환하여 제공²⁾하는 정도이다. 특히 참고 자료가 있는 웹 주소를 제공하거나 플래시 애니메이션 또는 지오지브라(GeoGebra) 도구 등을 추가한 수준이다. 따라서 이러한 환경에서는 단순히 드래깅(Dragging)을 통하여 도형을 변환하거나 변수의 값을 조정하여 식의 변화를 관찰할 수 있는 활동과 관련된 수학 학습 정도만이 가능하다.

이에 본 연구에서는 기존의 서책형 교과서를 단순히 pdf 파일 등의 e-book형식으로 제공하는 디지털 수학 교과서와 차별화하여 동영상 강의와 복잡한 계산 및 시뮬레이션이 가능한 계산 도구(실습실) 등을 포함하는 새로운 차원의 디지털 수학 교과서의 개발과정을 소개하고, 그 과정과 결과물을 공유하려 한다.

본 연구진의 디지털교과서에 대한 관심은 새로운 차원의 선형대수학 디지털교과서의 필요성을 인식하면서 시작되었다. 즉, 본 연구자가 이십여 년 간 선형대수학, 미분적분학, 미분방정식, 공학수학, 통계학, 수치적 선형대수학, 수학적 모델링, 수학과 빅데이터 등의 디지털 콘텐츠와 실습실 등을 직접 제작하여 교수·학습에 활용하면서 최첨단 기술을 모두 반영한 효과적인 디지털 수학 교과서 모델에 관심을 갖게 되었고, 특히 선형대수학 디지털교과서와 관련하여 각 절별 강의 동영상과 실습실 등을 체계적으로 담은 새로운 차원의 디지털 수학 교과서 제작을 목표로 연구가 시작되었다.

이후 디지털교과서를 만드는 과정에서 사회적 기업인 ‘공유와 협력의 교과서 만들기 운동본부’가 시작한 ‘빅북(BigBook) 프로젝트([그림 1-1] 참조)³⁾’에 SK와 현대자동차 정몽구 재단 등이 지원을 하면서 그 내용이 구체화 되었으며, 국문과 영문으로 완성된 선형대수학 디지털교과서는 선형대수학을 공부하는 학생 그리고 일반인에게 이미 적지 않은 도움을 주기 시작하였다([그림 1-2] 참조).

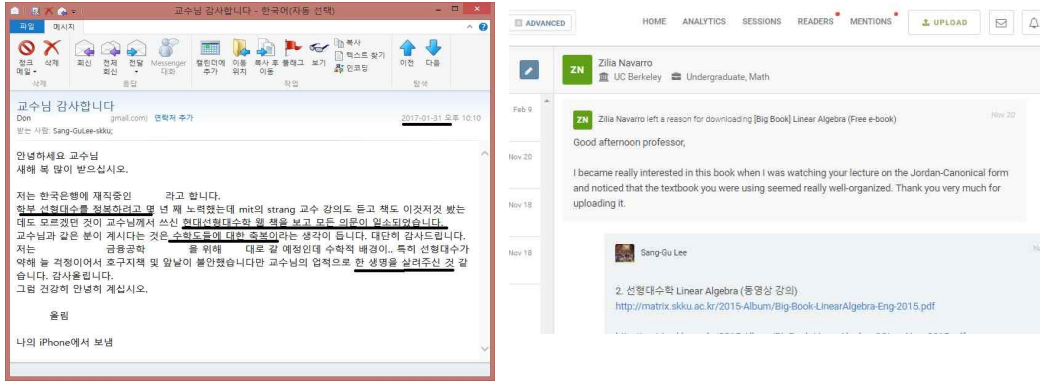


[그림 1-1] 빅북 프로젝트

1) 2016년 8월 28일 연합뉴스 기사, 디지털교과서, 초·중학교에 2018년부터 전면 보급

2) <https://betterexplained.com/ebook/math/>

3) <http://www.bigbook.or.kr/>



[그림 1-2] 디지털 수학교과서 사용자의 감사 글(국내외)

따라서 본 연구에서는 현재 연구진이 진행한 디지털 수화 교과서의 제작과 활용에 대하여 다음의 주제를 논하려 한다.

첫째, 현재까지 국내에서 진행된 디지털 수화 교과서, 특히 대학에서의 디지털 수화 교과서에 대한 연구 결과를 간단히 소개한다.

둘째, 연구자가 직접 제작하고, 누구나 교수·학습에 활용가능한 동영상과 계산도구가 결합된 무료 선형대수학 디지털교과서의 제작과정과 내용을 소개한다.

그리고 마지막으로 선형대수학 디지털교과서의 활용 가능한 모델을 제시하고, 대학생들에게 미칠 수 있는 수학의 인지적 측면과 정의적 측면을 논의한다.

II. 본론

1. 최근 한국에서의 디지털 수화 교과서 사례 연구

외국은 초·중등학교부터 대학교까지 디지털 수화 교과서⁴⁾가 이미 상용화되고 있다. 이와 달리 우리나라의 경우 아직은 디지털 수화 교과서의 개발 단계로, 디지털 수화 교과서에 대한 모델과 활용 방안에 대한 연구가 진행되고 있다. 예를 들어 허남규·류희찬(2015)은 국내와 국외의 디지털교과서를 분석하고 학생들의 활동중심 탐구 활동이 반영된 디지털교과서 개발을 소개하여 디지털교과서의 활용 가능성을 제시하였다. 노정민 외(2013)는 초등학교 5학년과 6학년을 대상으로 한 수화 디지털교과서를 개발하고 연구학교에 시범적으로 적용하여 효과성을 확인하였다. 최별님(2012)은 디지털교과서를 사용하는 학생들의 자기주도적 학습력 신장에 대한 가능성을 언급하였다. 그러나 현재까지 우리의 수화 디지털교과서는 단순히 기존의 서책형 교과서를 pdf 등의 파일 형식으로 디지털 화면에 옮겨 놓거나 플래시 애니메이션 등의 멀티미디어 자료 또는 참고 자료를 제시하는 수준으로, 학생들의 자유로운 수학적 탐구활동 및 조작활동 등을 충분히 지원하지는 못하고 있다.

국내의 초·중등 수화 디지털교과서 개발, 제작 및 그 활용에 대한 연구가 어느 정도 진행되는 것과 다르게 대학수학의 경우는 현재까지 디지털 수학교과에 대한 연구가 전무하다.

4) <http://www.openculture.com/free-math-textbooks>

사실, 대학수학교육은 수학을 필요로 하는 모든 전공분야에 기반을 제공하고, 특히 서비스 과목으로서 제공되는 미분적분학, 선형대수학, 이산수학, 공학수학, 통계학 등은 그 지식이 표준화되어 있으므로, 누구나 수학의 기초를 닦을 수 있는 다양한 기능을 담은 무료 디지털 수학 교과서가 꼭 필요하다. 그러나 현재까지 국내에서는 이와 관련한 시도가 구체적으로 이루어지지 않고 있다. 반면, 외국에는 이미 수많은 무료 대학수학교재가 공유되고 있으며, 특히 디지털 수학 교과서가 제작([그림 II-1]참조)⁵⁾되고 있어 전 세계 어느 곳에 있는 누구라도 쉽고 편리하게 활용하고 있다.

Mathematics Free Books

You can access the eBooks in either PDF and/or HTML format available for free download on this website.

#	Book Name	Book Author(s)	Book Publisher
1	A Computational Introduction to Number Theory and Algebra	Victor Shoup	Cambridge University Press
2	Elementary Linear Algebra	Kuttler	Freeware
3	A First Course in Linear Algebra	Robert A. Beezer	Wildron Press
4	A Course in Universal Algebra	Stanley N. Burris and H.P. Sankappanavar	Freeware
5	Fundamental Problems in Algorithmic Algebra	Chee K. Yap	Oxford University Press
6	Templates for the Solution of Algebraic Eigenvalue Problems: A Practical Guide	Zhaojun Bai, James Demmel, Jack Dongarra, Axel Ruhe, and Henk van der Vorst	SIAM Press
7	The Structure of Finite Algebras	David Hobby and Ralph McKenzie	AMS
8	Model Theory, Algebra, and Geometry	Deirdre Haskell, Anand Pillay, Charles Steinhorn	MSRI Publications
9	Elementary Algebra with	Bernard I. Klein	Bernard I.

[그림 II-1] 무료 대학수학 전자교재

또한 Wiley 수학 e-Books, Elsevier e-Books, Springer e-Books, SIAM e-Books, Cambridge대학 출판부 수학 e-books 등 상업용 대학 수학 교재⁶⁾는 e-book의 형태로 언제나 구입해 볼 수 있다.

그러면 수학과 코딩의 중요성이 동시에 강조되는 지금 대학수학 디지털 교과서, 특히 “대학수준의 선형대수학 디지털 교과서의 특징은 무엇이 되어야 하는가?”, “어떠한 요구조건을 만족시켜야 하는가?” 라는 질문을 제기할 수 있다. 이에 대해 여러 대안이 시도되고 있다. 예를 들어, MIT의 스트랭(Gilbert Strang) 교수는 선형대수학 공개 강좌⁷⁾에서 동영상 강의와 참고자료 및 웹 도구를 제공하였고, SageMath⁸⁾와 같은 파이썬(Python) 언어를 도입하려는 대학수준의 교과서([그림 II-2, II-3] 참조)도 등장하고 있다. 우리는 앞으로 코딩시대와 모바일 기기 등으로 자기주도적인 학습 역량을 키워야 할 미래를 위해 하나의 교과서에 내용과 영상과 코딩이 같이 이루어지는 학습 환경으로의 디지털 교과서가 필요하다고 생각하였다.

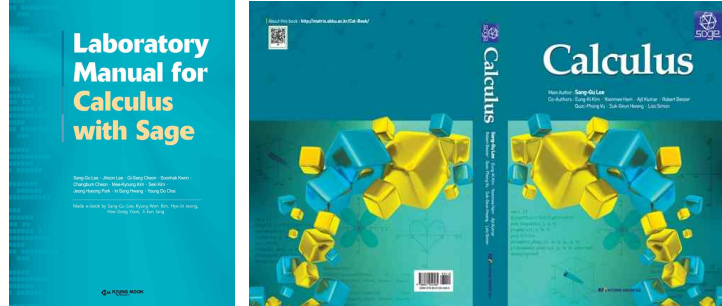
⁵⁾ <http://freebooks.pupilgarage.com/FreeBookDownload?category=mathematics>

⁶⁾ <http://mathematics.library.cornell.edu/find/E-Books>

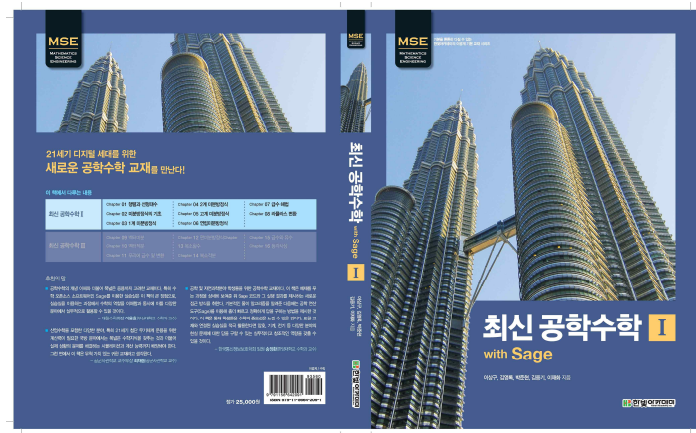
<http://olabout.wiley.com/WileyCDA/Section/id-818766.html>

⁷⁾ <https://ocw.mit.edu/courses/mathematics/18-06-linear-algebra-spring-2010/>

⁸⁾ <http://www.sagemath.org/> (Firefox 및 크롬, 사파리 등의 브라우저에서 무료로 모든 실습이 실시간으로 가능하다.)



[그림 11-2] 미분적분학 Lab Manual



[그림 11-3] 공학수학 무료 샘플 챕터 및 실습실

따라서 본 연구진은 현재까지 진행된 디지털교과서에 대한 연구 동향을 바탕으로 다음과 같은 교육적 의도와 기능을 포함한 선형대수학 디지털교과서를 개발 및 제작하는데 목적을 두었다.

첫째, 변화된 디지털 환경을 효율적으로 반영한다. 기존의 디지털교과서는 종이책을 단순히 pdf 파일 등의 형식으로 만들거나 동영상 강의를 추가한 정도로 능동적인 탐구활동이 제한적이다. 따라서 본 선형대수학 디지털교과서는 학생들이 모바일 기기를 통해 시간과 공간의 제약 없이 교재의 학습 및 강의 수강과 실습이 무료로 가능하며 실제 계산 기능이 포함되어 직접적인 계산과 시뮬레이션 등이 모두 가능하도록 제작한다. 이는 수학교과가 가진 특징, 즉 복잡한 계산 및 시뮬레이션이 가능한 환경이 필요하다는 것을 반영한 것이다. 그리고 학생 자신이 원하는 내용을 직접 가공, 편집, 출력해 볼 수 있으며, 학습과정에서 필요한 물적, 인적 자원들과 쉽게 연결될 수 있는 환경이 제공되어 다양한 교과관련 최신정보를 접할 수 있도록 한다.

둘째, 기존 선형대수학 교과서가 제공하는 모든 내용과 관련 정보를 담아 서책형 교과서가 추구하는 이상의 교육 목표를 달성할 수 있도록 하며, 학습자가 필요로 하는 내용을 손쉽게 찾을 수 있도록 추상적이고 논리적인 내용의 이해를 돕는 동영상 강의 연계, 관련 수학사 및 수학자 자료 사이트 연결 등을 포함한다. 특히 2015년 10월 7일 국내특허 등록⁹⁾을 마친 저자의 문제 자동생성(RPG)¹⁰⁾ 기능을 적용하여 학습자들의 확인학습이 가능하며, Q&A 게시판 등이 제공되도록 한다. 예를 들어, 각 단원별 연습문제마다 유사한 문제풀이 동영상을 연계시

켜 학생 스스로 자신의 문제풀이를 반성하고 깊이 탐색할 수 있는 기회를 제공한다.

셋째, 다양한 유형의 교수·학습이 가능하다. 컴퓨터를 기반으로 하는 학습을 설계하는 다양한 방법을 적용하여 자기주도적 학습, 시뮬레이션 학습, 반복 학습, 계산 학습 등의 다양한 학습유형을 적절하게 활용할 수 있도록 한다. 예를 들어, 통계 무료 공개 소프트웨어인 R과 파이썬 언어 기반의 SageMath등으로 설계된 그래프, 계산, 변환, 문제제기, 논의 및 합의 등의 활동을 할 수 있도록 한다.

더불어 이번 선형대수학 디지털교과서는 각종 수학 패키지의 사용과 연산 및 시뮬레이션 실습이 필요한 고등수학을 위한 학습자들이 고가의 소프트웨어를 구입하고 활용하면서 경제적, 환경적으로 받았던 여러 제약을 함께 해결해줄 수 있도록 하였다. 이와 관련해서는 본 연구진이 그간 SageMath와 R을 활용하여 미분적분학, 통계학, 선형대수학 및 공학수학 교육을 위해 웹 콘텐츠와 모바일 콘텐츠 및 계산도구가 포함된 실습실¹¹⁾을 개발하였으며(고래영 외, 2009; 김경원·이상구, 2013; 이상구·이재화·김경원, 2013; 이상구·장지은·김경원, 2013; 이상구 외, 2015) 이 중 필요한 기능을 모두 교재에 반영하였다.

2. 대학수학 교수·학습을 위한 무료 선형대수학 디지털교과서 제작 과정과 내용 소개

본 논문에서는 선형대수학을 중심으로 그간 개발한 강의동영상과 계산도구가 포함된 실습실을 연동하여 제작한 선형대수학 디지털교과서([그림 II-4] 참조)를 소개한다. 현재 모든 동영상, 계산도구, 실습실, 디지털교과서는 국문과 영문으로 제작하여 무료로 웹사이트¹²⁾에서 제공되고 있어 누구나 다운 받아 사용할 수 있다(이상구·이재화·김경원, 2014).



[그림 II-4] 선형대수학 디지털교과서(국문, 영문)

우선, 본 연구진이 선형대수학을 선택하여 디지털교과서로 개발하고 공개한 이유는 첫째, 선형대수학 디지털교과서의 모든 내용이 저자가 저술한 내용이므로 저작권에서 자유로우며 둘째, 본 교과서에 포함된 강의동영상

9) 등록번호-명칭-등록일: 10-1560802 임의 수학 문제를 제공하는 클라우드 컴퓨팅 서버, 방법 및 기록매체, 2015년 10월 8일

10) http://matrix.skku.ac.kr/RPG_English/

11) 미적분학 <http://matrix.skku.ac.kr/Lab-Book/Sage-Lab-Manual-1.htm>

통계 <http://matrix.skku.ac.kr/2015-R-Statistics/R-Sage-Statistics-Lab-1.htm>, <http://matrix.skku.ac.kr/2015-R-Statistics/R-Sage-Statistics-Lab-2.htm>

선형대수학 <http://matrix.skku.ac.kr/Lab-Book/Sage-Lab-Manual-2.htm>, 공학수학 <http://www.hanbit.co.kr/EM/sage/>

12) (국문) <http://ibook.skku.edu/Viewer/LA-Textbook> (영문) <http://ibook.skku.edu/Viewer/LA-Text-Eng>

도 저자가 직접 강의하면서 저장하여 편집한 내용이고 실습실 콘텐츠도 모두 직접 개발하였기 때문이다. 이는 앞으로 수학 교수자들이 디지털교과서를 개발할 때 고려해야 하는 실제적인 사항이라 본다.

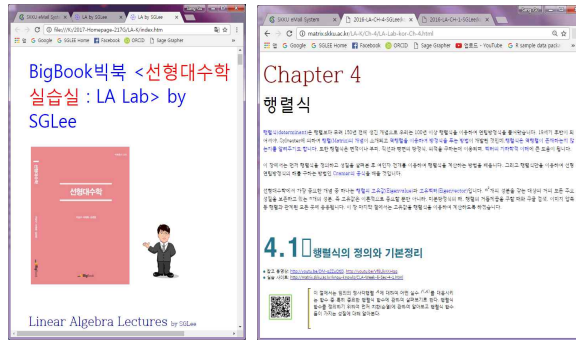
본 연구진이 개발한 선형대수학 디지털 교과서는 앞서 언급한 교육적 의도와 기능을 포함한 수학교과 디지털 교과서가 갖춰야 할 요구조건에 맞도록 구체적으로 다음과 같이 제작되었다.

- ① 선형대수학의 강의노트를 제작하면서 실습이 가능하도록 파이썬 언어 기반의 오픈소스 프로그램인 SageMath를 활용하여 코드를 작성, 강의노트에 반영하였다.
- ② 시각화와 시뮬레이션 도구를 포함하는 콘텐츠를 제작하여 웹페이지로 제작, 각각 웹 주소를 부여하였다.
- ③ 강의노트를 보강하여 실제 선형대수학 교재를 저술하며, 이 교재를 가지고 녹화한 강의동영상을 유튜브 등에 업로드 하여 그 웹 주소를 교재 적절한 곳에 배치하였다.
- ④ 연습 문제, 참고자료, 읽기 자료, 시험 관련 자료를 추가하여 교재를 완성하고 이를 pdf 형식의 디지털 교과서 파일로 제작하였다.
- ⑤ 이 파일과 연동하여 다음 <표 II-1>과 같은 구조로 선형대수학 디지털 교과서를 완성하였다. 이 교과서는 국문과 영문으로 각각 제작되었으며 <표 II-1>은 국문을 기준으로 한 것이다.

<표 II-1> 선형대수학 디지털교과서(국문)의 기본 구조

목차 \ 웹 주소	http://matrix.skku.ac.kr/LA-K
제 1장 벡터	http://matrix.skku.ac.kr/LA-K/Ch-1/
제 2장 선형연립방정식	http://matrix.skku.ac.kr/LA-K/Ch-2/
제 3장 행렬과 행렬대수	http://matrix.skku.ac.kr/LA-K/Ch-3/
제 4장 행렬식	http://matrix.skku.ac.kr/LA-K/Ch-4/
제 6장 선형변환	http://matrix.skku.ac.kr/LA-K/Ch-6/
제 7장 차원과 부분공간	http://matrix.skku.ac.kr/LA-K/Ch-7/
제 8장 행렬의 대각화	http://matrix.skku.ac.kr/LA-K/Ch-8/
제 9장 일반벡터공간	http://matrix.skku.ac.kr/LA-K/Ch-9/
제 10장 Jordan 표준형	http://matrix.skku.ac.kr/LA-K/Ch-10/
참고자료/주요정리	http://matrix.skku.ac.kr/2016-album/LA-Main-Theorems/index.html
연습문제 풀이	http://matrix.skku.ac.kr/2016-album/LA-Sol-Ch-1-2-3-4-6/index.html
강의자료 (1장-10장)	(예시, 제 1장) http://youtu.be/w7IzR4nGa3Q
연습 문제 풀이	(예시, 제 1장) https://youtu.be/4pneV9Wm_u8
동영상 (1장-10장)	http://matrix.skku.ac.kr/SOCW-sglee.htm
부록(문제/프로젝트)	http://matrix.skku.ac.kr/LA-Lab/Solution/ (Project 발표) http://youtu.be/cxdj7hDWk08
기출문제	http://matrix.skku.ac.kr/2016-Album/2016-S-LA-Final-Exam-F-3-Solution.pdf

먼저 웹사이트의 각 장별로 접속하면 [그림 II-5]와 같은 화면이 나온다. 전체적인 구성은 절별로 학습 목표, 참고 동영상, 핵심 개념 정의, 예시, 정리, 본문, 계산실습 및 시뮬레이션 등의 참고자료로 구성되어 있으며, 모바일 사용자의 편의를 위해 QR코드를 포함시켜 바로 접속할 수 있도록 하였다.

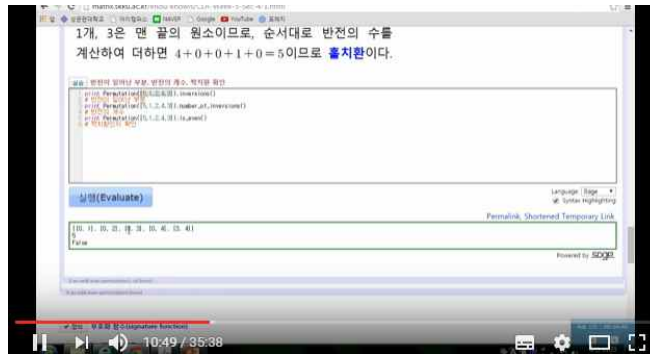


[그림 II-5] 선형대수학 디지털교과서 첫 페이지

그리고 앞서 언급한 선형대수학 디지털교과서 제작의 목적을 골격으로 다음의 사항에 주안점을 두고 제작하였다.

첫째, PC 및 모든 모바일 기기에서 학습이 가능하도록 구성하였다. 이는 현재 학생들이 PC뿐 아니라 주로 사용하는 모바일 기기에 맞는 디지털 교육환경을 제공하여 장소와 시간의 제약 없이 자유롭게 활용할 수 있게 한다.

둘째, 학습자가 웹사이트를 검색하지 않고도 필요한 부분과 기능에 바로 연결되도록 구성하였다. 즉 본 연구자가 선형대수학 디지털교과서로 직접 강의하며 제작한 강의동영상([그림 II-6] 참조)¹³⁾과 학습자가 수강하며 제작한 연습문제 풀이 동영상을 유튜브(YouTube)와 같은 무료 동영상 서비스 플랫폼에 편집하여 공개하였고, 해당 웹 주소를 디지털교과서에 포함시켰다. 더불어 웹사이트에서 여러 화면을 클릭하며 학습하는 번거로움을 제거하기 위해 장별로 모든 내용을 한 페이지에 구성하였다.

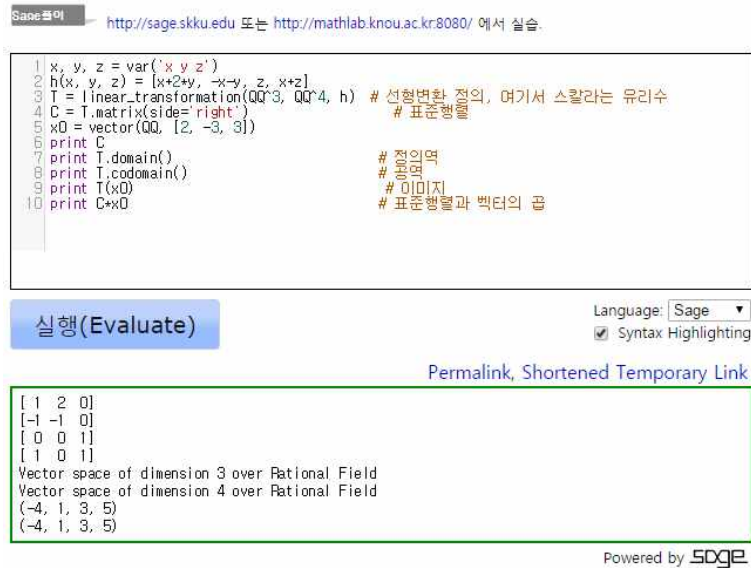


[그림 II-6] 동영상 강의(예시) <http://youtu.be/DM-q2ZuQtI0>

셋째, 학습자가 배운 개념을 계산도구(여기서는 SageMath)를 활용하여 동일한 웹페이지에서 바로 실습할 수 있도록 하였다([그림 II-7] 참조). 이는 이전 디지털교과서가 실습을 위하여 웹페이지를 이동하거나 접속하는 번거로움을 제거하고 학습과 동시에 바로 실습할 수 있도록 한 것이다. 더불어 학습자가 코딩하는 과정에서 코드

¹³⁾ (예시) <http://youtu.be/DM-q2ZuQtI0>

에 대한 두려움을 경감시키기 위하여 미리 문제와 풀이 및 코드까지 입력해 놓아 클릭만으로 풀이과정을 이해하고, 이어서 같은 유형의 어떤 문제라도, 주어진 코드에 숫자, 함수 또는 조건만을 바꾸면 바로 새로운 풀이 과정이 생성되는 대화형 실습실을 구성하였다. 이 부분은 앞서 언급한 수학 교과가 다른 교과와 구분되는 특징, 즉 복잡한 계산 및 시뮬레이션이 가능해야 능동적인 탐구활동이 가능하다는 것을 반영한 것으로 본 연구진이 중점을 둔 사항이다. 여기서 언급하는 ‘대화형’이란 여러 의미를 포함하고 있는데, 첫째는 학습자가 학습을 하다 실습실을 통해 행렬 등을 입력하여 클릭하면 실습실이 바로 답을 주는 상호작용(interactive)을 의미한다. 그리고 두 번째는 학습자가 학습 중에 생기는 질문 등을 강좌에 연동된 QnA 게시판이나 BBS 또는 담당교수/TA에게 수시로 질문하여 답을 얻을 수 있다는 의미이다. 이러한 시스템은 현재 우리나라 모든 대학의 대부분의 강좌에 이미 기본적으로 갖추어져 있으므로 학습 진행에 전혀 어려움이 없다고 본다. 이 방식은 4차 산업 혁명의 시대에 서 요구되는 알고리즘에 대한 이해 및 컴퓨터 코딩 지식과 능력을 별도의 교육과정 없이 대학수학을 학습하면서 동시에 효과적이고 자연스럽게 습득시키는 방식임이 학생들의 피드백을 통하여 확인되었다.



[그림 11-7] SageMath 실습화면

물론 JavaScript나 다른 프로그래밍 언어를 이용하여 웹페이지를 구성할 수도 있다. 그러나 본 연구진이 선택한 SageMath는 이미 수학과 관련한 여러 연구를 통해 그 효과성과 경제성이 입증되었고 현재 가장 각광받고 있는 파이썬 언어를 기반으로 하고 있으므로 향후 학습자가 빅데이터 등에 유용하게 활용할 수 있는 프로그래밍 언어로 이해할 수 있다.

넷째, 선형대수학 교재의 모든 내용을 포함시켰다. 이는 기존의 웹 페이지 형태로 구성된 디지털교과서가 핵심 내용만 간추린 형태와 대비된다.

행렬식의 성질

정리 4.1.2

정사각행렬 A 의 행렬식과 A 의 전치행렬 A^T 의 행렬식의 값은 같다.

https://www.projectrhea.org/rhea/index.php/Determinant_Transpose_Proof

예제 6

앞의 **정리 5**의 행렬 B 의 행렬식은 $|B| = 240$ 이고, $B^T = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 7 \\ 2 & 6 & -8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$ 이므로

$$|B^T| = \begin{vmatrix} 1 & -4 & 7 \\ 2 & 6 & -8 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix} = (46) + (96) + (84) - (106) - (-48) - (-72) = 240$$

따라서 $|B| = |B^T|$ 이다. \square

SageTools <http://cege.ckku.edu> 또는 <http://mathlab.knou.ac.kr:8080>

```
1 B=matrix(QQ, 3, 3, [1, 2, 3, -4, 5, 6, 7, -8, 9])
2 print B.transpose().det()
```

실행(Evaluate) Language: Sage Syntax Highlighting

Permalink, Shortened Temporary Link

240

Powered by SOGE

[그림 II-8] 디지털교과서 구성 예시(정리, 예제, 실습)

다섯째, 디지털교과서에 있는 글자, 수식, 코드 등을 마우스 클릭과 드래그를 통해 캡처(capture) 및 복사가 가능하도록 하였다. 더구나 대화형 실습실에서 사용된 계산도구는 오픈 프로그램으로써 학습자가 실습하여 얻은 결과(콘텐츠)를 쉽게 복사하여 붙여넣기(copy and paste)가 가능하므로 학습한 수학 지식을 자신의 전공분야에 적용, 새로운 지식을 재생산 하고 과제 작성이 용이하다. 이는 기존의 디지털교과서가 저작권 등의 문제로 코드 등을 웹페이지로 제시하여도 복사 및 캡처 등을 제한하여 실제 활용이 불가능하다는 부분을 수정한 것이다. 본 디지털교과서에서는 이러한 환경을 접목시켜 학습자가 학습한 지식을 자신의 전공분야에 활용하거나 다른 내용을 재생산하는데 전혀 어려움이 없도록 하였다.

그 외에, 웹에서 직접 마우스 스크롤을 통해 보기를 원하는 학생들과 기존의 인쇄된 형태를 원하는 학생들의 필요를 모두 충족할 수 있도록 출판사를 통해 최소의 비용으로 인쇄된 형태로 제공될 수 있도록 하였다.

3. 선형대수학 디지털교과서의 활용과 의미

선형대수학 디지털교과서는 유튜브와 오픈 소스 프로그램인 SageMath를 활용하여 학생들이 PC뿐 아니라 모바일 기기를 통해 시간과 공간의 제약 없이 교재의 학습 및 강의 수강과 실습이 무료로 가능하도록 설계되었다. 특히 실습이 필요한 위치에 프로그래밍 언어를 웹 페이지 상에 직접 추가하여 학생들이 프로그래밍 언어 습득

에 따로 시간을 들이지 않도록 하였고, 심지어 직접 명령어를 타이핑하는 수고마지도 없이 바로 실습이 가능하도록 하였다. 그 결과, 학생들은 수학에서 다루는 다양한 주제의 수학적 내용 습득과 더불어 계산과 시뮬레이션을 추가의 수고 없이 클릭만으로 실행 및 실습하면서 선형대수학 교과내용을 시각적, 직관적으로 이해하고 분석할 수 있게 되었다. 더불어 문제풀이에 소요되는 계산과 코딩 및 타이핑 과정에서 절약된 시간을 광범위한 주제에 대하여 질문하고 답하는데 이용함으로써 선형대수학을 깊이 이해하여 활용할 수 있게 되었다.

이제 디지털교과서를 활용한 거꾸로 학습(flipped learning)모형과 집단지성(collective intelligence) 학습모형을 소개하고, 학습효과를 인지적 측면과 정의적 측면으로 구분하여 살펴본다. 본 연구진은 위에 소개한 기능을 담은 선형대수학 디지털교과서를 활용하는 학습 모형으로 학생의 자기주도적 학습을 돕는 거꾸로 학습모형과 생산적인 협력학습이 가능한 집단지성의 발현을 지원하는 학습모형을 현장에서 수년간 적용하는 시도를 진행해왔다.

거꾸로 학습모형은 테크놀로지와 교실 수업이 접목된 블렌디드 러닝(blended learning)의 한 형태로, 기존 교수자 중심의 강의식 수업이 가정학습(온라인 동영상강의 시청 등)에서 이루어지고 학교에서 배운 내용을 적용하는 ‘과제(토론, 토의, 프로젝트 및 문제해결 활동)’를 교실에서 진행하는 방법이다(박경은·이상구, 2016). 학습자들은 선형대수학 디지털교과서에 포함된 동영상 수업 내용을 본 수업 전에 미리 학습하며 본 수업시간에는 제기된 질문에 대한 답을 포함한 포인트 강의(focus lecture)와 동료들의 문제풀이를 공유하고 토론하며, 확장된 문제풀이와 심화 프로젝트를 경험할 기회를 갖는 등, 자기주도적 완전학습에 도달하도록 한다.

선형대수학 Interactive 학습실	
5	역행렬 Inverse matrices
6	행렬을 이용한 암호시스템 Cryptography
7	흑백게임의 선형대수학 Blackout Game and LA
8	삼각형의 넓이 Determinant
9	도형의 방정식 Vector equations of planes
10	정사영 Projection
11	최소제곱직선 Least square solutions
12	고유값과 고유벡터 Eigenvalues and Eigenvectors
13	대칭변환 Linear transformations
14	대칭변환과 정사영변환 Linear transformations
20	이차형식 Quadratic Forms
21	푸리에 급수 Fourier Series
22	조르단 표준형 Jordan Canonical Forms
23	행렬 계산기 Matrix Calculator
24	미적분학 계산기 Calculus, CAS
25	그래프, 3D
26	마코르체인
27	평면의 방정식
28	Linear Combination(일차결합)
29	행렬변환

그리고 각 지식과 관련된 수학사나 수학자 등의 내용을 디지털교과서 내에서 즉시 확인함으로써 지식의 발생 배경과 성장과정을 통해 선형대수학 지식을 결과로써가 아닌 과정으로써 이해 가능하다. 더불어 디지털 선형대수학 교과서에 포함된 SageMath를 적시에 활용하여 2차원의 성질을 3차원의 성질로 연결하고 비교하며 n 차원으로 확장함으로써 유추적 사고력과 일반화 능력을 신장시킬 수 있다. 또한 최근에 주목을 받고 있는 집단지성의 발현을 지원하는 학습 모형은 학생들이 개별적으로 새로운 사실을 파악하고 자신만의 정보와 지식을 산출한 후 동료학습자들과 생각을 공유하면서 새로운 지식을 구성하게 된다. 이 모형은 토의·토론 활동, 디지털 기반 제작 활동, 모델링 및 시뮬레이션 수업에서도 적용할 수 있고, 학생들의 흥미와 수업 참여도가 증진되며, 정보 공유 및 지식 구성에 대한 관심이 높아짐이 알려져 있다(한국교육학술정보원, 2012). 선형대수학 디지털교과서에는 학생들 개개인이 동영상 강의와 계산활동을 경험하고 이에 근거하여 책임감 있게 연습문제를 해결하고 자신의 풀이와 동료의 풀이를 미리 준비된 동영상상을 통해 비교하거나 인터넷게시판을 통해 풀이과정을 함께 공유하고 가장 효과적인 풀이를 논의하면서 최선의 결과물을 완성하는 등 각 개인이 문제 해결의 주체로서 참여하게 된다. 이 과정을 공유하면서 학생들이 교수목표 이상의 지식과 경험을 습득하는 것이 가능하다.

즉 선형대수학 디지털교과서를 활용하면서 학생들의 인지적 측면과 정의적 측면의 교육적 의의를 향상시킬 수 있다. 여기서 수학의 인지적 측면이란 수학적 지식 및 수학적 사고방식과 관련된 지적인 특성을 대상으로 하는 것이며 정의적 측면이란 수학에 대한 전형적인 태도 및 감정 표현의 방식과 관련된 특성을 대상으로 하는 것이다(교육인적자원부, 2007). 학생의 인지적 측면에서 볼 때, 선형대수학 디지털교과서에 포함된 동영상 강의로

예습을 하거나 반복학습이나 보충학습을 하고 SageMath로 연산결과를 직접 확인하고 다양한 계산을 경험함으로써 선형대수학 내용과 원리 및 관계를 바르게 이해할 수 있다.

정적 측면은 수학에 대한 긍정적 태도나 바람직한 가치관이 수학 학습을 성공적으로 수행하도록 하고 수학에 높은 성취를 이루는 데에 중요한 역할을 하게 되어 매우 중요하다. 특히 대학에서 학습하는 수학은 그 내용이 추상적이고 논리적이며 이성적이므로 수학에 대한 흥미와 호기심 또는 자신감과 끈기가 지속적으로 필요하다. 본 선형대수학 디지털교과서의 다양한 기능, 예를 들어 학습해야 하는 내용을 즉시 동영상으로 시청할 수 있고, 관련된 내용을 바로 클릭하여 확인할 수 있으며, 계산이 필요한 부분에서 SageMath를 이용해 쉽게 계산하고 자신의 결과를 바로 비교할 수 있는 등의 활동을 통해 선형대수학을 학습하는 즐거움과 흥미 그리고 자신감을 가질 수 있다. 그리고 선형대수학 과목은 공대생들이나 기업체에서 직접 활용하는 과목이며 실생활 관련 문제를 해결하는데 필요하고, 현실 문제를 코드를 이용하여 계산하고 그 결과를 시각적으로 확인함으로써 수학의 유용성과 필요성을 직관적으로 느끼고 직업현장에서 크게 도움이 되는 과목임을 인식하게 된다.

마지막으로 본 선형대수학 디지털교과서의 QR코드와 연결된 문제자동생성 기능과 SageMath에서 직접 변수를 바꾸고 새롭게 문제를 만들어 해결하는 기회를 통해 큰 크기의 새로운 문제들을 실제로 해결하는 과정을 거치면서 창의력이 신장되고, 새로운 형태의 수학 디지털교과서의 여러 기능을 직접 수업과정에서 접하는 다양한 경험을 함으로써 수학의 과정에 참여하는 적극성을 기대할 수 있다. 위의 분석에서 보듯이 본 선형대수학 디지털교과서는 디지털 수학 교과서의 한 모델이 될 수 있다고 판단된다.

III. 결론

빠르게 변화하는 스마트교육 환경과 4차 산업혁명의 시대를 맞이하여 첨단 ICT 교수학습 환경을 충분히 활용한 새로운 수학 디지털교과서의 필요가 대두되었으며, 한국의 경우도 초·중등 수학교육에서는 여러 다양한 시도가 있었다. 그러나 대학수학 디지털교과서에 관련된 연구는 미비하였다. 본 논문에서는 최근 개발을 마친 선형대수학 디지털교과서에 대한 동기, 개발과정, 활용을 소개하고 실제 디지털교과서를 무료로 다운 받을 수 있는 웹 사이트 주소를 공개하였다. 이 디지털교과서는 기존 서책형 교재의 모든 내용을 포함하는 동시에 PC와 모바일을 활용하여 강의동영상 시청과 계산도구 실습이 가능하다. 동시에 실습에 필요한 코드를 미리 입력해두었으며, 계산과정의 간결화를 통해 절약된 시간은 개념을 깊게 이해하고 토론 학습하는데 사용되도록 하였다. 이 수학 디지털교과서 모델은 기존의 국내의 어떤 디지털 수학교과서와도 차별화되며, 관련 연구가 진행되면서 학습자에게 실제로 도움을 줄 수 있는 다양한 기능을 담은 중등수학 디지털교과서를 포함하여 많은 수학 디지털교과서가 개발되고 또 널리 효과적으로 활용되고, 이를 활용한 평가 방안에 대한 후속 연구가 진행될 수 있기를 기대한다.

참 고 문 헌

- 고래영·김덕선·박진영·이상구 (2009). 모바일 환경에서의 Sage-Math의 개발과 선형대수학에서의 활용, 한국 수학교육학회지 시리즈 E <수학교육 논문집>, **23(4)**, 1023-1041.
- Ko, R.Y., Kim, D.S., Bak, J.Y. & Lee, S.G. (2009). Development of Mobile Sage-math and its use in Linear Algebra, *J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E: Communications of Mathematical Education*, **23(4)**, 1023-1041.
- 교육인적자원부 (2007). 2007년 개정 중학교 수학과 교육과정 해설(3), 교육과학기술부 고시 제2006-75호 및 제2007-79호에 따른.

- The Ministry of Education, Science and Technology (2007). *Commentary about the 2007 Revised Mathematics Curriculum*.
 교육과학기술부 (2012). 스마트교육 추진 전략에 따른 교과서 개선 계획(안).
 MOE (2012). *Improvement plan of textbooks according to smart education promotion strategy*.
 김경원 · 이상구 (2013). 모바일 선형대수학 스마트폰 콘텐츠 개발과 활용, 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학
 교육 논문집>, **27(2)**, 121-134.
 Kim, K.W. & Lee, S.-G. (2013). Development of smart-phone contents for mobile linear algebra, *J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E: Communications of Mathematical Education*, **27(2)**, 121-134.
 김광진 (2013). 한국과 미국의 고등학교 수학 디지털교과서 비교 연구 : 직선의 방정식을 중심으로. 석사학위논문, 성균관대학교.
 Kim, K.J. (2013). *Contrastive analysis on mathematics digital textbooks of high school in Korea and U.S.A. : Focused on the area of linear equation*. Master's thesis, Sungkyunkwan University.
 노경민 · 장신호 · 조근영 (2013). 초등 과학과 디지털 교과서 활용을 위한 사례 기반 창의적 문제해결 수업모형 개발 및 적용, 한국열린교육학회 춘계학술대회 논문집, 139-147.
 No, J.M., Jang, S.H. & Jo, G.Y. (2013). Development and application of case-based creative problem-solving instructional model for using elementary science and digital textbooks, *Korea International Education Association Spring Conference*, 139-147.
 류희찬 · 최경식 (2015). 수학교육에서 테크놀로지 활용의 새로운 모델 : 디지털교과서. In 고상숙, 고호경, 구나영, 김남희, 김리나, 김향숙, 김화경, 류희찬, 박만구, 손홍찬, 송민호, 윤인준, 이경화, 이상구, 이종학, 이종권, 임해미, 장경윤, 전영국, 조정수, 채정림, 최경식, 한세호(Eds.). 수학교육에서 공학적 도구 (pp. 125-253). 서울: 경문사.
 Lew, H. & Choi, K.S. (2015). *New model of using technology in mathematics education : Digital textbook*, In Koh, S.S., Ko, H.K., Ku, N., Kim, N.H., Kim, R.N., Kim, H.S., Kim, H.K., Lew, H., Park, M.G., Son, H.C., Song, M.H., Yoon, I.J., Lee, K.H., Lee, S.G., Lee, J.H., Lee, J.G., Im, H.M., Chang, K.Y., Jun, Y.G., Cho, J.S., Chae, J.L., Choi, K.S. & Han, S.H.(Eds.). *Technologies in Mathematics Education*. (pp. 125-253). Seoul: Kyongmoonsa.
 미래창조과학부 (2016). 2016년도 대학 ICT연구센터육성지원사업 제공고, 미래창조과학부 공고 제2016-0263호.
 Future Creative Science and Technology Research Institute(2016). *A Study on Support of University ICT Research Center in 2016, 2016-0263*.
 박경은 · 이상구 (2016). 선형대수학 플립드러닝(Flipped Learning) 강의 모델 설계 및 적용, 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육 논문집>, **30(1)**, 1-22.
 Park, K.E. & Lee, S.-G. (2016). Flipped Learning teaching model design and application for the University's "Linear Algebra". *J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E: Communications of Mathematical Education*, **30(1)**, 1-22.
 이상구 · 이궁희 · 최용석 · 이재화 · 이지영 (2015). R을 활용한 '대화형 통계학 입문 실습실' 개발과 활용, 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육 논문집>, **29(4)**, 573-588.
 Lee, S.-G., Lee, G.H., Choi, Y.S., Lee, J.H. & Lee, J.J. (2015). Interactive Statistics Laboratory using R and Sage, *J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E: Communications of Mathematical Education*, **29(4)**, 573-588.
 이상구 · 이재화 · 김경원 (2013). Sage 행렬계산기와 선형대수학 Sage 콘텐츠, 한국수학논문집, **21(4)**, 503-521.
 Lee, S.-G., Lee, J.H. & Kim, K.W. (2013). Sage Matrix Calculator and full Sage contents for Linear Algebra, *The Korean Journal of Mathematics*, **21(4)**, 503-521.
 이상구 · 이재화 · 김경원 (2014). [빅북] 선형대수학, 교보출판사.
 Lee, S.-G., Lee, J.H. & Kim, K.W. (2014). [BigBook] *Linear Algebra*, Kyobo Book.
<http://matrix.skku.ac.kr/2015-Album/BigBook-LinearAlgebra-SGLee-New-2015.pdf>
 이상구 · 장지은 · 김경원 (2013). Sage와 Geogebra를 이용한 선형대수학 개념의 Visual-Dynamic 자료 개발과 활

- 용, 수학교육 학술지, 2013국제수학영재교육학술대회 프로시딩, 113-123.
- Lee, S.-G., Jang, J.E. & Kim, K.W. (2013). Development and Application of Visual-Dynamic Data for Linear Algebra Using Sage and Geogebra, *Studies in Mathematical Education, Proceedings of the 2013 International Conf on Math Edu*, 113-123
- 최별님 (2012). 수학과 디지털교과서를 활용한 수업에서 자기주도적학습능력 신장, 석사학위 논문, 울산대학교 교육대학원.
- Choe, B.N. (2012). *Advantage of self-learning ability in classes using math digital textbook*, Master's thesis, Ulsan Univ.
- 한국교육학술정보원 (2012). 디지털교과서 활용 수업모형 연구(중등편). 연구보고 CR 2013-6.
- KERIS(2012). *A Study on the Application of Digital Textbook System. Research Report CR 2013-6*
- 허남구 (2016). 수학과 디지털교과서에 대한 예비수학교사의 인식 연구, 한국콘텐츠학회논문지, **16(10)**, 364-372.
- Heo, N.G. (2016). Analysis of Preservice Mathematics Teachers' Perceptions on Mathematics Digital Textbook. *Journal of the Korea Contents Association*, **16(10)**, 364-372.
- 허남구 · 류희찬 (2015), 활동 중심 수학과 디지털교과서의 개발 및 적용, 수학교육학연구, **25(2)**, 241-261.
- Heo, N.G. & Lew, H. (2015). Development and Application of Action Based Mathematics Digital Textbook. *The journal of educational research in mathematics*, **25(2)**, 241-261.

Development and Usage of Interactive Digital Linear Algebra Textbook

Sang-Gu Lee

Department of Mathematics, Sungkyunkwan University, Suwon 440-746, Korea
E-mail : sglee@skku.edu

Jae Hwa Lee[†]

Department of Mathematics, Sungkyunkwan University, Suwon 440-746, Korea
E-mail : jhlee2chn@skku.edu

Kyung-Eun Park

Department of Mathematics Education, Sungkyunkwan University, Seoul 110-745, Korea
E-mail : postmedu@skku.edu

The 4th industrial revolution is coming. In order to prepare for the new learning environment with it, we may need digital mathematics textbooks that fully utilize all possible technologies. So various attempts have been made in elementary and middle school mathematics education. However, despite the importance of higher mathematics, we haven't seen a best possible math digital textbooks yet in Korea.

In this paper, we introduce our new model of interactive math digital textbook about Linear Algebra/ Calculus/ Differential Equations/ Statistics/ Engineering Math. Especially, this manuscript focuses on our experience of using digital contents and interactive labs for developing a new model for linear algebra digital textbook.

We introduce our works on linear algebra digital textbooks which include pdf e-book, web contents, video clips of lectures, interactive lab. Using this linear algebra digital textbook, students can freely use any mobile devices to access diverse learning materials, lessons, and hands-on exercises without any limitations. Also, times saved in the computation, coding, and typing process can be used to have more discussions for deeper understanding of mathematical concepts. This type of linear algebra digital textbook, which contains all interactive free cyber-lab with codes and all lectures for each sections, can be considered as a new model for the next generation of math digital textbook.

* ZDM Classification : U25, U75

* 2000 Mathematics Subject Classification : 97U20, 97U70

* Key Words : Digital math textbook, Linear algebra, Video lectures, Interactive laboratory, SageMath, Free e-book

* This research was supported by Basic Science Research Program through the National Research Foundation of Korea(NRF) funded by the Ministry of Education(2017RID1A1B03035865).

[†] Corresponding author