<학술논문> DOI https://doi.org/10.3795/KSME-A.2017.41.10.905 ISSN 1226-4873(Print)
2288-5226(Online)

부분 구조의 주파수 응답 함수를 이용한 봉의 치수 최적화

윤 홍 근* · 이 진 우**†
* 현대 모비스, ** 아주대학교 기계공학과

Size Optimization of a Rod Using Frequency Response Functions of Substructures

Hong Geun Yoon* and Jin Woo Lee**†
* Hyundai Mobis and ** Dept. of Mechanical Engineering, Ajou Univ.

(Received February 10, 2017 ; Revised August 10, 2017; Accepted August 11, 2017)

Key Words: Frequency Response Function(주파수 응답함수), Equivalent Vibration System(등가 진동계), Size Optimization(치수 최적화), Modal Analysis(모달 해석), Rod(봉), Substructure(부분 구조)

초록: 본 연구에서는 형상 정보가 주어지지 않은 부품과 형상 정보가 주어진 부품으로 구성된 봉의 고유 주파수를 최대화하는 치수 최적화 방법을 제시한다. 두 부품으로 구성된 봉의 진동 특성을, 각 부품의 형상 대신, 두 부품의 주파수 응답 함수들로부터 예측한다. 이를 위해, 실험 모달 해석 방법을 이용하여 각 부품의 등가 진동계를 구하고, 두 등가 진동계의 질량 행렬과 강성 행렬들로부터, 두 부품이 결합된 봉의 등가 질량 행렬과 강성 행렬을 도출한다. 몇 가지 수치 예제에서, 제시한 방법으로 얻어진 봉의 등가 진동계의 주파수 응답 함수를 실제 봉의 주파수 응답 함수와 비교하여, 등가 진동계를 이용한 고유 주파수 예측 방법의 유효성을 검증한다. 검증된 방법으로 얻어진 등가 진동계를 이용하여, 봉의 1차 고유 주파수를 최대화하기 위한 치수 최적화 문제를 정식화하고, 최적화 알고리즘을 사용하여 봉의 구조를 최적화한다.

Abstract: In this work, a method of size optimization is proposed to maximize the natural frequency of a rod that consists of a hidden shape in one part and an exposed shape in the other. The frequency response function of a rod composed of two parts is predicted by using the frequency response functions of each of the parts instead of the shapes of the parts. The mass and stiffness matrices of the rod are obtained by using the mass and stiffness matrices of the equivalent vibration systems, which are obtained by applying the experimental modal analysis method to the frequency response functions of the parts. Through several numerical examples, the frequency response function obtained by using the proposed method is compared with that of a rod to validate the prediction method based on equivalent vibration systems. A size optimization problem is formulated for maximizing the first natural frequency of a combined rod, which is replaced with an equivalent vibration system, and a rod structure is optimized by using an optimization algorithm.

1. 서 론

각기 다른 하청 회사(subcontractor)에서 제작된 부품들을 원청 회사(contractor)에서 생산된 부품에 결합하여 완성품을 설계/생산하는 과정을 산업 현장에서는 쉽게 찾아볼 수 있다. 일반적으로 원청 회사는 납품 받을 부품만의 정적/동적 특성이 아니라, 납품 받은 부품이 원청 회사 부품에 결합되었을 때 나타날 수 있는 정적/동적 특성값을 설계 조건으로 하청 회사에 요구한다. 그런데, 보안상의 문제로 설계/해석 과정에서 필요한 부품의 3차원 도면 정보나 유한 요소 모델을 원청 회사와 하청 회사는 서로 공유하지 않는 경우가 많다. 이런 이유로 하청 회사에서는 자사에서 만든 부품이 원청 회사의 부품에 결합되었을 때의 응답을 확인하지 못한 채 부품을 설계/제작하여, 원청 회사에 납품

† Corresponding Author, jinwoolee@ajou.ac.kr
Ⓒ 2017 The Korean Society of Mechanical Engineers
본 논문의 일부 문장, 그림과 표는 1 저자의 석사 학위 논문에 있는 것을 사용하였습니다.

하게 된다. 이렇게 제작된 하청 회사의 부품이 원청 회사의 부품에 결합되어 만들어진 완성품의 계산/측정값이 설계 조건에 미치지 못하는 경우가 자주 발생하여, 원청 회사와 하청 회사 사이에 재설계 과정이 반복된다.

이러한 재설계 과정에서 발생하는 시간적/경제적 낭비를 최소화 하기 위한 노력이 필요하다. 먼저, 원청 회사는 형상 정보는 아니더라도 자사 부품의 동특성을 나타내는 정보를 하청 회사에게 전달하여야 한다. 또한, 하청 회사는 전달 받은 동특성 데이터로부터 설계에 필요한 정보를 추출해 내어 자사의 부품 설계에 반영할 수 있어야 한다. 본 연구에서는 형상이나 재질에 대한 정보를 포함하지 않으면서 부품의 진동 특성을 나타낼 수 있는 데이터 형식으로 주파수 응답 함수를 사용한다. 그리고, 이 주파수 응답 함수로부터 부품이 결합된 완성품의 응답을 예측하는 방법을 제안한다. 이런 응답 예측 방법을 이용하여, 원청 회사의 설계 조건을 충족하는 하청 회사 부품의 구조를 최적화하는 방법론을 제시하고 예제를 통해 그 유효성을 입증하고자 한다.

부분 구조의 특성을 먼저 파악한 후, 연결된 전체 구조의 특성을 파악하는 방법으로 부분 구조 합성법(substructure synthesis method)이 널리 연구되어 오고 있다. Hurty[1]는 분할된 부분 구조의 고유 모드로 전체 구조물의 동특성을 파악하는 부분 구조 모드 합성법(component mode synthesis method)을 제안하였다. Craigd와 Bampton[2]은 부분 구조 모드 합성법을 개선하여 Craig-Bampton 방법으로 발전시켰다. 이런 부분 구조 모드 합성법을 이용하여 오재응 등[3]은 안테나 시스템을 부분 구조로 나누고, 부분 구조의 동특성 해석 결과를 결합하여 안테나 시스템의 동특성을 파악하였다. 김범석 등[4]은 전차량 모델의 진동 특성을 파악하기 위해 부분 구조 합성법을 활용하였다. 최욱한 등[5]은 구조물의 성능을 개선시키기 위해 부분 구조 모드 합성법을 이용하여 구조 최적 설계를 수행하였다. Tsai와 Chou[6]는 볼트 결합의 동특성을 파악하기 위해 최소 자승법(least square method)과 주파수 응답 함수 기반의 부분 구조 합성법을 활용하였으며, Yang등[7]은 측정된 주파수 응답 함수를 이용하여 결합부의 특성을 알아내는 연구를 수행하였다. Klerk등[8]은 부분 구조 합성법에 관한 연구들과 부분 구조 합성법의 장점과 한계점을 정리하였다. 이런 부분 구조 모드 합성법은 주로 한정된 계산 자원으로 인하여 전체 구조물에 대한 유한 요소 해석을 수행하기 어렵거나 보다 빠른 계산을 위해 주로 사용되어 왔다.[9]

본 논문에서는 축 방향(axial direction)으로 진동하는, 길이와 단면적이 서로 다른 봉(rod) 2개로 구성된 완성품을 최적 설계할 해석 모델로 선정하여, 원청 회사와 하청 회사 간의 보안 문제와 설계 문제를 함께 해결하고자 한다. 2개의 봉을 원청 회사와 하청 회사에서 각각 제작한다는 가정하에 완성품의 진동 특성을 예측하는 방법과 하청 회사의 봉을 최적 설계하여 완성품의 진동 특성을 개선하는 방법을 제시한다. 이를 위해, 주파수 응답 함수들로부터 각 봉의 등가 진동계를 구성하고, 얻어진 두 등가 진동계를 결합하는 방법을 2장에서 제시하며, 3장에서는 제시한 방법을 다양한 수치 예제 문제에 적용하여 제시한 방법의 유용성을 파악한다. 이렇게 얻어진 완성품의 등가 진동계를 이용하여 4장에서는 최적 설계 문제를 정식화하고 구체적인 수치에 대해 구조 최적화를 수행한다. 마지막으로 제안한 방법의 확장성에 대해 논의한다.

2. 등가 진동계 구성

2.1 주파수 응답 함수와 모달 행렬

가진 주파수(excitation frequency)에 따른 진동계의 정상 상태 응답(steady state response)의 진폭 변화 정보를 담고 있는 주파수 응답 함수는 진동계의 동특성을 나타내는 목적으로 널리 사용된다. 이런 주파수 응답 함수로부터 시스템의 형상이나 재질 정보 등을 파악할 수는 없지만, 시스템의 진동 특성을 충분히 파악할 수 있기에, 원청 회사와 하청 회사간의 보안 문제를 해결할 수 있는 데이터 형식으로 사용될 수 있다. 일반적으로 주파수 응답 함수 곡선 상에서의 피크 주파수는 선형 시스템의 모든 점에서 동일하지만, 피크 주파수 주변의 응답 크기는 가진점과 응답점에 따라 달라진다.

가진점 k와 응답점 l 사이의 주파수 응답 함수 ($\alpha_{kl}(j\omega)$)는 식 (1)과 같이 r번째 등가 1 자유도 진동계의 주파수 응답 함수(${}_r\alpha_{kl}(j\omega)$)들의 합으로 나타낼 수 있다.[10] 식 (1)에서 ω 와 ω_r 는 각각 주파수(frequency)와 고유 모드 주파수(natural mode frequency)이고, η_r 는 해당 모드에서의 구조 감쇠계수(structural damping loss factor)이며, R 은 전체 피크 주파수 개수를 나타낸다.

$$\alpha_{kl}(j\omega) = \sum_{r=1}^{R} {}_r\alpha_{kl}(j\omega) \tag{1a}$$

$$ {}_r\alpha_{kl}(j\omega) = \frac{{}_rA_{kl}}{\omega_r^2 - \omega^2 + j\omega_r^2\eta_r} \tag{1b} $$

식 (1b)의 r번째 모달 상수(Modal constant: ${}_rA_{kl}$)는 식 (2)처럼 r번째 고유 모드 벡터($\vec{\varphi}_r$)의 성분들의 곱으로 나타낼 수 있다.[11~14] 또한, 식 (2a)로부터 얻어지는 식 (2b)의 고유 모드 벡터를 이용하여 식 (2c)와 같은 모달 행렬(modal matrix: Φ)을 얻을 수 있다.

$$ {}_rA_{kl} = \varphi_{kr}\varphi_{lr} \tag{2a} $$

$$ \vec{\varphi}_r = \{\varphi_{1r}\ \varphi_{2r}\ \cdots \varphi_{Rr}\}^T \tag{2b} $$

$$ \Phi = [\vec{\varphi}_1\ \cdots\ \vec{\varphi}_R] = \begin{bmatrix} \varphi_{11} & \cdots & \varphi_{1R} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_{R1} & \cdots & \varphi_{RR} \end{bmatrix} \tag{2c} $$

2.2 등가 진동계의 질량과 강성 행렬

정규화된 모달 행렬은 식 (3)을 만족하므로, 주어진 주파수 응답 함수를 갖는 진동계의 질량 행렬($\mathbf{M}$)과 강성 행렬($\mathbf{K}$)을 식 (4)로부터 구할 수 있다.[15] 식 (3)에서 $\mathbf{I}$는 항등 행렬(identity matrix)이고, Ω는 고유 주파수 값의 제곱을 주 대각 성분(ω_r^2)으로 갖는 대각행렬(diagonal matrix)이다.

$$ \Phi^{*T}\mathbf{M}\Phi = \mathbf{I} \tag{3a} $$

$$ \Phi^{*T}\mathbf{K}\Phi = \Omega \tag{3b} $$

$$ \mathbf{M} = \Phi^{*T-1}\mathbf{I}\Phi^{-1} \tag{4a} $$

$$ \mathbf{K} = \Phi^{*T-1}\Omega\Phi^{-1} \tag{4b} $$

2.3 등가 진동계의 결합

Fig. 1(a)에 있는 봉 A(Rod A)와 봉 B(Rod B)의 등가 질량 행렬과 강성 행렬을 각각 $\mathbf{M_A}$와 $\mathbf{M_B}$, $\mathbf{K_A}$와 $\mathbf{K_B}$로 나타낸다. Fig. 1(b)에 있는 연결된 두 봉에 대해, 식 (5)와 같은 독립된 진동 행렬 방정식을 구성할 수 있다.

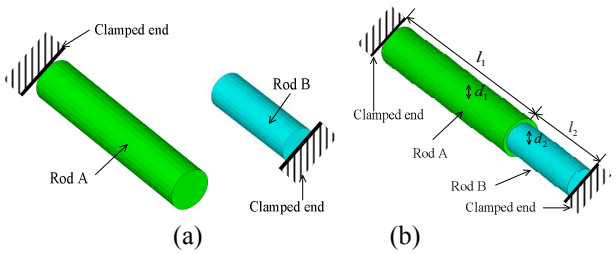


Fig. 1 Analysis models: (a) Rod A and Rod B and (b) combined rod

$$ \mathbf{M_A}\ddot{\vec{x}} + \mathbf{K_A}\vec{x} = \vec{f}_A + \vec{g}_A,\ \ \vec{x} = \{x_1\ x_2\ \cdots x_L\}^T \tag{5a} $$

$$ \mathbf{M_B}\ddot{\vec{u}} + \mathbf{K_B}\vec{u} = \vec{f}_B + \vec{g}_B,\ \ \vec{u} = \{u_1\ u_2\ \cdots u_P\}^T \tag{5b} $$

식 (5)에서 $\vec{x}$와 $\vec{u}$는 각각 봉 A와 B의 등가 진동계들의 변위 벡터들이고, $\vec{f}_A$와 $\vec{f}_B$는 각각 봉 A와 봉 B에 작용하는 외부 가진력을 나타낸다. $\vec{g}_A$와 $\vec{g}_B$는 봉 A와 B 사이에서 발생하는 힘을 나타낸다. 식 (5a)와 (5b)를 블록 대각 행렬(block-diagonal matrix)을 사용하여 식 (6)과 같이 하나의 행렬 방정식으로 나타낼 수 있다.

$$ \mathbf{M_t}\ddot{\vec{x}}_t + \mathbf{K_t}\vec{x}_t = \vec{f}_t + \vec{g}_t \tag{6a} $$

$$ \mathbf{M_t} = \begin{bmatrix} \mathbf{M_A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M_B} \end{bmatrix},\ \mathbf{K_t} = \begin{bmatrix} \mathbf{K_A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K_B} \end{bmatrix} \tag{6b} $$

$$ \vec{x}_t = \begin{Bmatrix} \vec{x} \\ \vec{u} \end{Bmatrix},\ \vec{f}_t = \begin{Bmatrix} \vec{f}_A \\ \vec{f}_B \end{Bmatrix},\ \vec{g}_t = \begin{Bmatrix} \vec{g}_A \\ \vec{g}_B \end{Bmatrix} \tag{6c} $$

봉 A와 봉 B의 연결 조건을 결합행렬 $\mathbf{B}$를 사용하여 식 (7a)와 같은 적합 조건(compatibility condition)으로 나타낼 수 있다. 또한, 결합되는 봉 사이에서 작용하는 힘이 크기가 서로 같고, 방향은 서로 반대라는 평형 조건(equilibrium condition: $\vec{g}_A + \vec{g}_B = 0$)은 식 (7b)로 나타낼 수 있다. 행렬 $\mathbf{B}$와 $\mathbf{L}$은 식 (7c)와 같은 관계가 있는 것으로 알려져 있고, *null*은 영공간(nullspace)을 나타낸다.[8]

$$ \mathbf{B}\vec{x}_t = \vec{0} \tag{7a} $$

$$ \mathbf{L}^T\vec{g}_t = 0 \tag{7b} $$

$$ \mathbf{L} = null(\mathbf{B}) \tag{7c} $$

두 봉이 연결되는 지점의 변위가 동일한 경우($x_L = u_1$), 두 봉이 결합된 시스템의 진동 변위 벡터 $\vec{v}$와 결합 전 진동 변위 벡터 $\vec{x}_t$[식 (6c)]는 식 (8)를 만족한다.

$$ \vec{x}_t = \mathbf{L}\vec{v},\ \ \vec{v} = \{x_1\ x_2\ \cdots x_{L-1}\ u_1\ u_2\ \cdots u_P\}^T \tag{8} $$

식 (8)을 이용하여 식 (6a)를 다시 쓰면 식 (9a)와 같고, 식 (9a)의 양변에 $\mathbf{L}^T$를 곱하면 결합된 등가 진동계의 운동 방정식[식 (9b)]을 얻을 수 있다. $\mathbf{M_{eq}}$과 $\mathbf{K_{eq}}$는 연결된 봉의 등가 진동계의 질량 행렬과 강성 행렬이다.

$$ \mathbf{M_t}\mathbf{L}\ddot{\vec{v}} + \mathbf{K_t}\mathbf{L}\vec{v} = \vec{f}_t + \vec{g}_t \tag{9a} $$

$$\mathbf{M}_{eq}\ddot{\vec{v}} + \mathbf{K}_{eq}\vec{v} = \vec{f}_{eq} \tag{9b}$$

$$\mathbf{M}_{eq} = \mathbf{L}^T\mathbf{M}_t\mathbf{L}\,,\quad \mathbf{K}_{eq} = \mathbf{L}^T\mathbf{K}_t\mathbf{L}\,,\quad \vec{f}_{eq} = \mathbf{L}^T\vec{f}_t \tag{9c}$$

식 (9c)의 등가 질량 행렬과 강성 행렬을 갖는 진동계의 고유 주파수(ω_q)와 고유 모드 벡터($\vec{\psi}_q$)는 식 (10)에서 구할 수 있다.

$$\mathbf{K}_{eq}\vec{\psi}_q = \omega_q^2\mathbf{M}_{eq}\vec{\psi}_q \tag{10a}$$

$$\vec{\psi}_q = \left\{\psi_{1q}\ \psi_{2q}\ \cdots\psi_{Qq}\right\}^T \tag{10b}$$

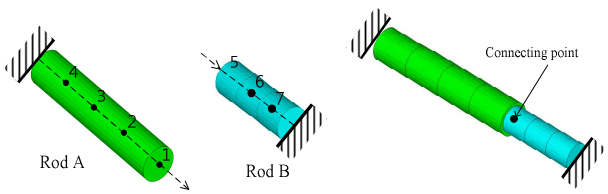
명시적인 감쇠를 무시할 수 있다면, 두 봉이 연결된 완성품의 k 지점을 가진하여 l 점에서 얻은 주파수 응답 함수는 식 (11)을 이용하여 구할 수 있다.

$$\alpha_{kl}(j\omega) = \sum_{q=1}^{Q}\frac{\psi_{kq}\psi_{lq}}{\omega_q^2-\omega^2} \tag{11}$$

3. 등가 진동계 구성 방법 검증

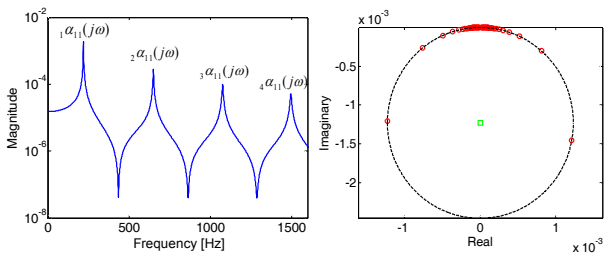
3.1 모달 파라미터 추출과 등가 진동계 구성

상용 유한 요소 프로그램에서 Fig. 1(a)의 봉 A와 봉 B를 Fig. 2(a)와 같이 등 간격으로 절점(node)을 생성하였다. Table 1에 있는 값을 사용하여 조화 해석(harmonic analysis)을 수행하기 위해, 봉 A에서는 점 1을, 봉 B에서는 점 5를 가진하여 주파수 응답 함수를 얻었다. Fig. 3(a)는 봉 A의 점 1에서 계산된 주파수 응답 함수의 절대값을 주파수 영역에서 도시한 것이고, Fig. 3(b)는 첫 번째 피크 주파수 부근의 주파수 응답 함수 값을 복소 평면에 도시한 것이다. 이 점들에 실험 모달 해석(experimental modal analysis)에서 사용하는 원 적합법(circle fitting method)을 적용하면, 점들을 지나는 원(circle)을 얻을 수 있다. 각 피크 주파수 부근의 값을 이용하여 얻어진 원의 반경과 중심점으로부터, 식 (1b)의 ω_r, η_r, ${}_rA_{kl}$를 구할 수 있다.[10,11]



(a) (b)

Fig. 2 Finite element models: (a) Rod A and Rod B and (b) combined rod



(a) (b)

Fig. 3 Frequency response function: (a) Bode plot and (b) Nyquist plot

Table 2는 나머지 점들의 주파수 응답 함수의 첫 번째 피크 주파수 부근의 데이터에서 얻은 ${}_1A_{1l}$와 식 (2a)를 이용하여 얻은 첫 번째 모드 벡터의 성분(φ_{l1})을 정리한 것이다. 같은 방법을 나머지 피크 주파수 주변 데이터에 적용하여 피크 주파수에 대응하는 고유 모드 벡터를 구하면, 식 (2c)를 구성하는 모달 행렬을 얻을 수 있다(나머지 모달 행렬의 성분은 지면 관계로 생략한다). 이렇게 얻어진 모달 행렬과 고유 주파수를 식 (4)에 대입하면, 식 (12)와 같은 등가 진동계의 질량 행렬과 강성 행렬을 구할 수 있다. 같은 방법을 봉 B의 주파수 응답 함수들에 적용하면, 식 (13)과 같은 등가 진동계의 질량 행렬과 강성 행렬을 구할 수 있다. 이런 질량 행렬과 강성 행렬을 갖는 봉 A와 봉 B의 등가 진동계는 각각 Fig. 4(a)와 Fig. 4(b)로 나타낼 수 있고, Fig. 4(c)는 Fig. 2(b)의 등가 진동계를 나타낸다.

Table 1 Specific values of parameters and material properties used in finite element analysis

Quantity	Rod A	Rod B
Young's modulus	21 MPa	11 MPa
Density	2800 kg/m^3	2800 kg/m^3
Length (l_i)	0.1 m	0.05 m
Diameter(d_i)	0.01 m	0.008 m

Table 2 Modal constants and components of the 1st mode vector

Symbol	Value	Symbol	Value
${}_1A_{11}$	$22.79+1.23j$	φ_{11}	$4.78+0.13j$
${}_1A_{12}$	$8.72+0.47j$	φ_{21}	$1.83+0.05j$
${}_1A_{13}$	$16.11+0.87j$	φ_{31}	$3.38+0.09j$
${}_1A_{14}$	$21.05+1.13j$	φ_{41}	$4.41+0.12j$

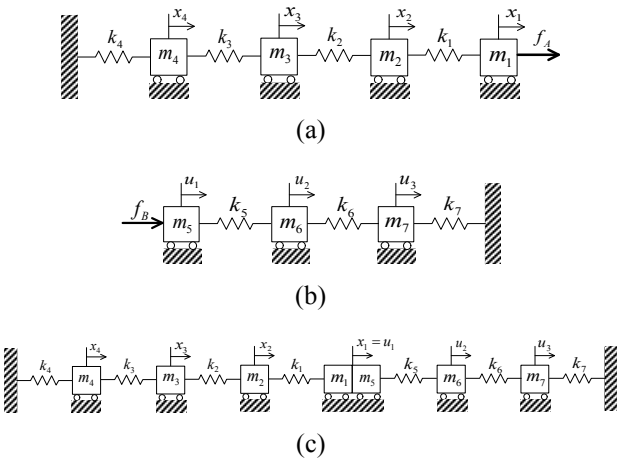


Fig. 4 Equivalent vibration systems: (a) Rod A; (b) Rod B and (c) combined rod

$$\mathbf{M_A} = \begin{bmatrix} 1.10-0.00j & 0.00-0.01j & -0.00-0.01j & -0.00+0.00j \\ 0.00+0.01j & 2.19-0.00j & -0.01-0.00j & -0.00+0.01j \\ -0.00+0.01j & -0.01+0.00j & 2.19-0.00j & -0.00+0.01j \\ -0.00-0.00j & -0.00-0.01j & -0.00-0.01j & 2.20+0.00j \end{bmatrix} \times 10^{-2} \quad (12a)$$

$$\mathbf{K_A} = \begin{bmatrix} 4.19-0.00j & -0.34-0.03j & 1.09-0.02j & -5.01+0.02j \\ -0.34+0.03j & 7.27-0.00j & -4.67-0.01j & 1.10-0.02j \\ 1.09+0.02j & -4.67+0.01j & 8.37-0.00j & -5.34-0.02j \\ -5.01-0.02j & 1.10+0.02j & -5.34+0.02j & 9.47-0.00j \end{bmatrix} \times 10^{5} \quad (12b)$$

$$\mathbf{M_B} = \begin{bmatrix} 0.57+0.00j & 0.15-0.29j & 0.09-0.16j \\ 0.15+0.29j & 1.13-0.00j & 0.11-0.00j \\ 0.09+0.16j & 0.11+0.00j & 1.00+0.00j \end{bmatrix} \quad (13a)$$

$$\mathbf{K_B} = \begin{bmatrix} 1.60+0.00j & -0.99-1.27j & 0.22-0.46j \\ -0.99+1.27j & 2.96+0.00j & -1.09+0.47j \\ 0.22+0.46j & -1.09-0.47j & 2.81+0.00j \end{bmatrix} \times 10^{5} \quad (13b)$$

3.2 등가 진동계 결합

Fig. 4(a)의 질량 m_1이 Fig. 4(b)의 m_5와 강결합되는 경우($x_1 = u_1$)에는, 식 (7)의 **B**와 **L**은 식 (14)와 같이 구체화된다. 식 (14b)를 식 (9c)에 넣으면 Fig. 4(c)에 있는 봉의 등가 질량 행렬과 강성 행렬을 구할 수 있다. 이렇게 구해진 행렬들을 식 (10a)의 고유값 문제에 대입하여 풀어서 구한 고유 주파수를 Table 3에 정리하였다. Fig. 5에서는 식 (9b)를 이용하여 얻은 Fig. 4(c)의 주파수 응답 함수와 유한 요소 해석 프로그램을 이용하여 얻은 Fig. 2(b)의 주파수 응답 함수를 비교한다. 반공진점(anti-resonance frequency)을 제외한 주파수 영역에서 두 주파수 응답 함수들이 거의 일치하는 것을 알 수 있다.

Table 3 Natural frequencies of the combined rod, which are obtained for the equivalent systems

Symbol	Value [rad/s]	Symbol	Value [rad/s]
ω_1	1.51×10^3	ω_4	5.66×10^3
ω_2	3.31×10^3	ω_5	6.46×10^3
ω_3	4.35×10^3	ω_6	6.97×10^3

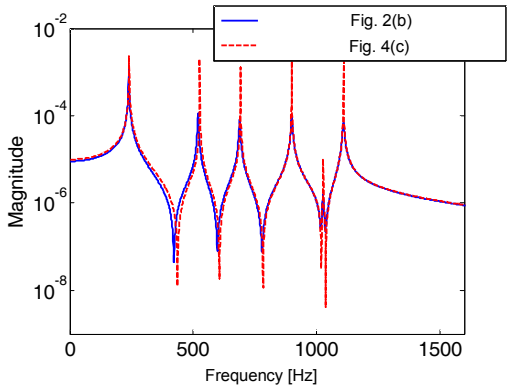


Fig. 5 Comparison of frequency response functions of Fig. 2(b) and Fig. 4(c)

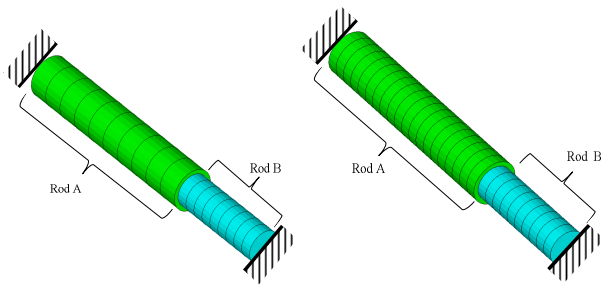


Fig. 6 Additional analysis models: (a) Case 1 (b) Case 2

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (14a)$$

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (14b)$$

등가 진동계의 자유도 수가 변경되더라도 제시한 방법이 유효한지 살펴 보기 위해서, Fig. 6(a)와

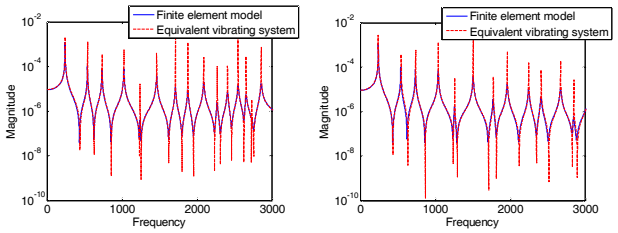


Fig. 7 Comparison of frequency response functions: (a) Case 1 and (b) Case 2

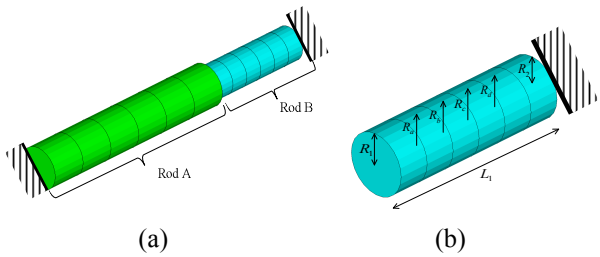


Fig. 8 Analysis models for a size optimization problem: (a) combined rod and (b) design variables in Rod B

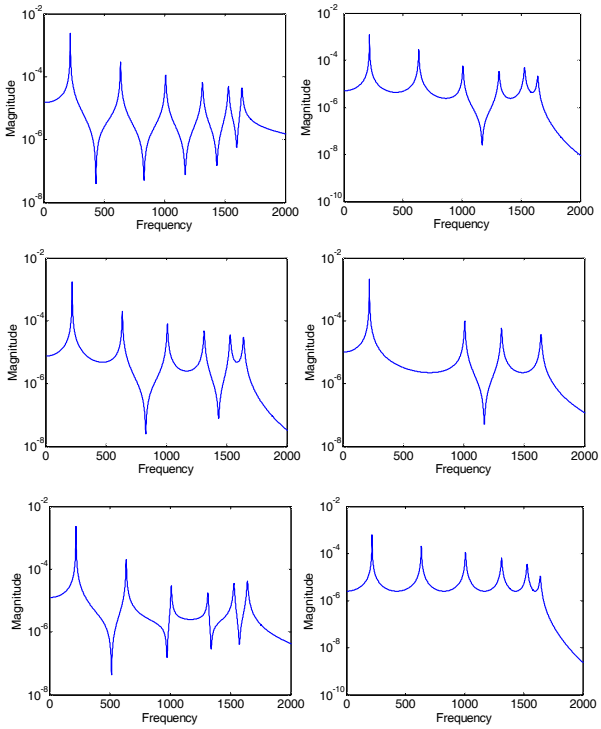


Fig. 9 Frequency response functions of Rod A

6(b)의 해석 모델에 대해서도 제시한 방법을 적용해 보았다: Case 1[Fig. 6(a)]에서는 봉 A를 10등분, 봉 B를 7 등분으로 분할하였고, Case 2[Fig. 6(b)]에서는 봉 A를 15등분, 봉 B를 9등분으로 분할하였다. Case 1과 Case 2에 대해 각각 구한 등가 진동계의 주파수 응답 함수와 유한 요소 모델의 주파수 응답 함수를 Fig. 7에서 비교한다. Fig. 5에서와 같이, 본 논문에서 제시한 방법이 두 봉이 직접 연결된 봉의 주파수 응답 함수를 아주 잘 예측한다는 것을 알 수 있다.

Table 4 Specific values of parameters used in the size optimization problem

Symbol	Value	Symbol	Value
R_a^{lower}	0.003 m	R_a^{upper}	0.013 m
R_b^{lower}	0.003 m	R_b^{upper}	0.013 m
R_c^{lower}	0.003 m	R_c^{upper}	0.013 m
R_d^{lower}	0.003 m	R_d^{upper}	0.013 m
R_1	0.008 m	R_2	0.008 m
L_1	0.05 m		

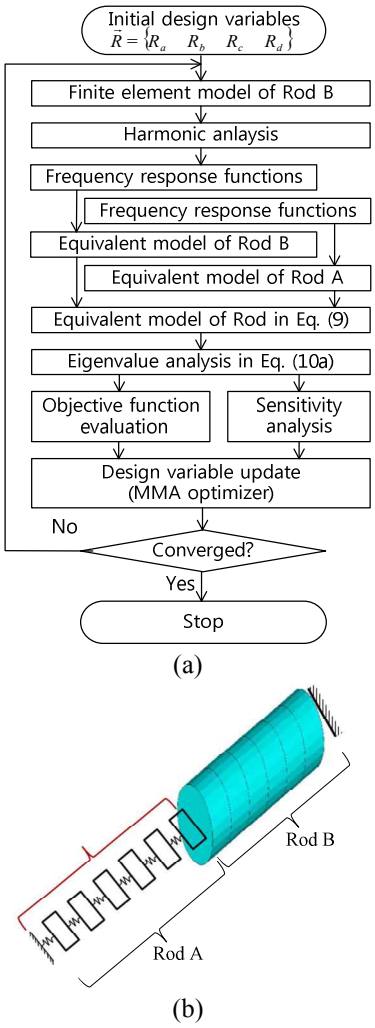
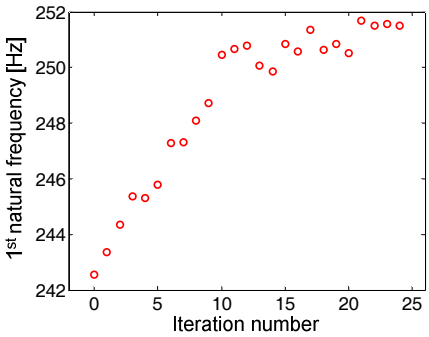


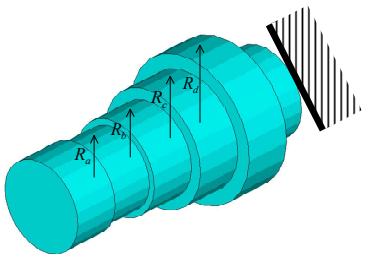
Fig. 10 Solving procedure in the size optimization problem: (a) flow chart and (b) conceptual model for vibration analysis

Table 5 Optimal results: 1st natural frequency and design variables

Symbol	Value	Symbol	Value
f_1^{ini}	242.56 Hz	f_1^{opt}	251.51 Hz
R_a^{ini}	0.008 m	R_a^{opt}	0.007 m
R_b^{ini}	0.008 m	R_b^{opt}	0.009 m
R_c^{ini}	0.008 m	R_c^{opt}	0.010 m
R_d^{ini}	0.008 m	R_d^{opt}	0.013 m



(a)



(b)

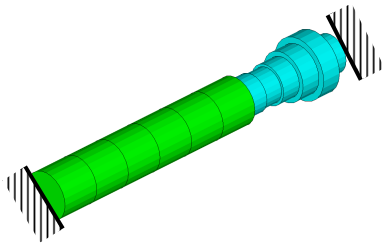
Fig. 11 Optimal results: (a) history of the objective function and (b) optimized Rod B

4. 결합된 봉의 최적 설계

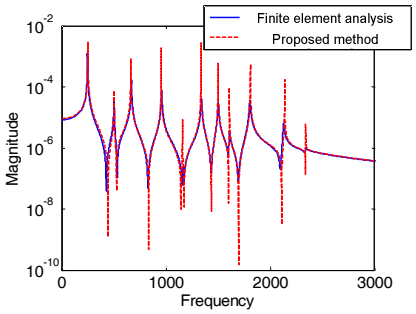
4.1 치수 최적 설계 문제 정식화

Fig. 8(a)에 있는 결합된 봉의 1차 고유 주파수를 최대화하는 문제를 정식화한다. 그림에서 봉 A(Rod A)와 봉 B(Rod B)를 각각 원청 회사와 하청 회사에서 제작하는 부품이라고 가정하고, 원청 회사에서는 봉 A의 주파수 응답 함수(Fig. 9 참조)만을 하청 회사에 제공하고, 최적 설계를 위해 하청 회사에서 변경할 수 있는 것은 봉 B의 분할된 요소 반지름(Fig. 8(b) 참조: R_a, R_b, R_c, R_d)이다.

앞서 기술한 설계 문제를 다음과 같은 치수 최적 설계 문제로 정식화한다. 식 (15a)와 같이 결합된 봉의 1차 고유 주파수(f_1)를 목적 함수로 선정하고, 봉 B의 분할된 6개 요소 중 가운데 4개 요소의 반지름을 설계 변수로 선정하였다. 또한 설계 변수의 범위를 식 (15b)와 같이 제한하였다.



(a)



(b)

Fig. 12 Validation of the proposed method: (a) finite element model of the optimized rod and (b) comparison of frequency response functions

$$Max\ f_1 \tag{15a}$$

$$R_i^{lower} \le R_i \le R_i^{upper} \quad (i = a,b,c,d) \tag{15b}$$

Fig. 10(a)는 정식화한 치수 최적화 문제의 해를 구하는 과정을 순서도로 나타낸 것이다. 봉 A의 주파수 응답 함수들에 원적합법(circle fitting method)를 적용하여 등가 진동계의 질량 행렬과 강성 행렬을 추출한다. 같은 방법으로 봉 B의 초기 치수를 사용하여 계산된 주파수 응답 함수로부터 등가 진동계의 질량 행렬과 강성 행렬을 구한다. 이렇게 얻어진 행렬들을 식 (6b)와 식 (9c)에 대입하여, 봉 A와 봉 B가 연결된 봉의 등가 진동계의 질량과 강성 행렬을 구한다. 이를 식 (10a)에 대입하여, 연결된 봉의 1차 고유주파수를 구한다. 이렇게 구한 1차 고유 주파수를 식(15a)의 목적함수 값으로 사용하고, 식 (15b)의 제한 조건을 만족하는 고유 주파수 최대화 문제의 해를 구배 기반 최적화 알고리즘(Method of Moving Asymptotes)[16]을 이용하여 구한다. 본 설계 문제는 Fig. 10(b)에 있는 해석 모델에 대하여, Table 4에 있는 값을 사용하여 최적 치수를 구하는 문제로 간주할 수 있다.

Fig. 11(a)는 최적화 과정 동안 설계 변수 변화에 따른 목적 함수가 최대화 되는 과정을 보여주고

있고, Fig. 11(b)는 최적화된 봉 B를 보여준다. Table 5에서는 최적화된 봉의 고유 주파수와 치수를 초기값과 비교하여 정리하였다. 최적화 과정에서, 고유 주파수는 모두 등가 진동계를 사용하여 계산되었다. 따라서, 본 연구에서 제시된 주파수 응답 함수 추정법의 유효성을 살펴보기 위해, Fig. 11(b)와 봉 A가 직접 연결된 봉[Fig. 12(a) 참조]의 주파수 응답 함수와 수렴된 치수로 계산된 등가 진동계의 주파수 응답 함수를 Fig. 12(b)에서 비교하였다. 두 그래프가 아주 잘 일치함을 알 수 있다. 본 연구에서는 1차 고유 주파수 최적화 문제만 다루었지만, 본 논문에서 제시한 방법은 2차 고유 주파수 최적화 또는 1차 고유 주파수에 대한 제한 조건을 만족하는 치수 최적화 문제 등에도 적용이 가능하다.

5. 결 론

본 연구에서는 주파수 응답 함수만 알 수 있는 부분 구조와 형상 정보까지 주어지는 부분 구조로 구성된 봉의 구조 최적화를 수행하였다. 제공된 두 부분 구조의 주파수 응답 함수를 이용하여 각각 등가 진동계를 구성하였고, 적합조건을 고려하여 완성품의 등가 진동계를 얻을 수 있는 수식적 표현을 전개하였다. 등가 진동계와 실제 유한 요소 모델의 주파수 응답 함수를 비교하여 도출한 등가 진동계의 유효성을 확인할 수 있었다. 본 연구에서 제시한 주파수 응답 함수기반 구조 합성법은 분계(substructure)의 질량과 강성 행렬을 합성한다는 점이 기존의 부분 구조 합성법과 유사하지만, 실험 모달 기법을 이용하여 제한된 수의 주파수 응답 함수로부터 각 분계의 질량과 강성행렬을 구하는 방법이 기존의 부분 구조 합성법과 큰 차이가 있다. 제안한 방법을 이용하여 부분 구조 A를 비 설계 영역으로, 부분 구조 B를 설계 영역으로 설정하여, 완성품의 1차 고유 주파수를 최대화하는 치수 최적화 문제를 정식화 하였다. 축 방향으로 진동하는 봉의 진동 설계 문제에 적용하여, 본 연구에서 제시한 방법의 유효성을 확인하였다. 이러한 설계 기법은 회사간에 협업이 이루어지는 산업 현장에서 보안 문제로 인해 부품의 형상이나 재질에 관한 정보가 제공될 수 없는 상황에 적용할 수 있다. 유한 요소 모델이나 3차원 도면대신 주파수 응답 함수를 제공함으로써 부품의 형상이나 재질에 관한 정보는 제외하고 진동 특성만 전달할 수 있었으며, 이를 활용하여 완성품의 응답을 예측해 볼 수 있다.

후 기

본 연구는 산업통상 자원부 기술혁신 사업(과제번호: 10048305, 모듈형 시스템 설계를 위한 플러그인 디지털 해석 프레임 워크 개발)의 지원을 받아 수행하였음을 밝힙니다.

참고문헌
(References)

(1) Hurty, W. C., 1960, “Vibrations of Structural Systems by Component Mode Synthesis,” *J. Eng Mech. Div-ASCE*, Vol. 86, No. 4, pp. 51~70.
(2) Craig Jr, R. R. and Bampton, M. C., 1968, “Coupling of Substructures for Dynamic Analyses,” *AIAA J.*, Vol. 6, No. 7, pp. 1313~1319.
(3) Oh, J. E., Lee, J. H. and Lim, D. K., 1994, “A Study on the Identification and Improvement of Dynamic Characteristics of Large Structure by Component Mode Synthesis Method,” *Trans. Korean Soc. Noise Vib.*, Vol. 4, No. 3, pp. 327~335.
(4) Kim, B. S., Kim, B. S. and Yoo, H. H., 2010, “Analysis of Vibration Characteristics of a Full Vehicle Model Using Substructure Synthesis Method,” *Trans. Korean Soc. Mech. Eng. A*, Vol. 34, No. 5, pp. 519~525.
(5) Choi, W. H., Na, Y. S. and Park, G. J., 2015, “Structural Optimization Using Equivalent Static Loads and Substructure Synthesis Method,” *Trans. Korean Soc. Mech. Eng. A*, Vol. 39, No. 8, pp. 823~830.
(6) Tsai, J. S. and Chou, Y. F., 1988, “The identification of Dynamic Characteristics of a Single Bolt Joint,” *J Sound Vib.*, Vol. 125, No. 3, pp. 487~502.
(7) Yang, T., Fan, S. H. and Lin, C. S., 2003, “Joint Stiffness Identification Using FRF Measurements,” *Comput. Struct.*, Vol. 81, No. 28-29, pp. 2549~2556.
(8) Klerk, D. D., and Rixen, D. J. and Voormeeren, S. N., 2008, “General Framework for Dynamic Substructuring: History, Review, and Classification of Techniques,” *AIAA J.*, Vol. 46, No. 5, pp. 1169~1181.
(9) Craig, R. R. and Kurdila, A. J., 2006, *Fundamentals of Structural Dynamics*, John Wiley & Sons, New Jersey.
(10) Maia, N. M. M. and Silva, J. M. M., 1997, *Theoretical and Experimental Modal Analysis*, Research Studies Press LTD., England.
(11) Heylen, W., Lammens, S. and Sas P., 1995, *Modal Analysis Theory and Testing*, Department Werktuigkunde, Katholieke Universteit Leuven.
(12) Ewins, D. J., 2000, *Modal Testing: Theory, Practice and Application*, Research Studies Press LTD., England.
(13) McConnell, K. G., 1995, *Vibration Testing: Theory and Practice,* John Wiley & Sons, New York.
(14) Allen, M. S., Mayes, R. L. and Bergman, E. J., 2010,

"Experimental Modal Substructuring to Couple and Uncouple Substructures with Flexible Fixtures and Multi-Point Connections," *J Sound Vib*, Vol. 329, No. 23, pp. 4891~4906.
(15) Meirovitch, L., 2001, *Fundamentals of vibrations*, McGraw-Hill, New York.
(16) Svanberg, K., 1987, "The Method of Moving Asymptotes- a New Method for Structural Optimization," *Int. J. Numer. Meth. Eng.,* Vol. 24, No. 2, pp. 359~373.