

Reliability Analysis of Multi-functional Multi-state Standby System Using Weibull Distribution

Ji-Hye Kim · Young-Bae Chung[†]

Dept. of Industrial and Management Engineering, Incheon National University

와이블 분포를 이용한 다기능 다중상태 대기시스템의 신뢰도 분석

김지혜 · 정영배[†]

인천대학교 산업경영공학과

As the functions and structure of the system are complicated and elaborated, various types of structures are emerging to increase reliability in order to cope with a system requiring higher reliability. Among these, standby systems with standby components for each major component are mainly used in aircraft or power plants requiring high reliability. In this study, we consider a standby system with a multi-functional standby component in which one standby component simultaneously performs the functions of several major components. The structure of a parallel system with multifunctional standby components can also be seen in real aircraft hydraulic pump systems and is very efficient in terms of weight, space, and cost as compared to a basic standby system. All components of the system have complete operation, complete failure, only two states, and the system has multiple states depending on the state of the component. At this time, the multi-functional standby component is assumed to be in a non-operating standby state (Cold Standby) when the main component fails. In addition, the failure rate of each part follows the Weibull distribution which can be expressed as increasing type, constant type, and decreasing type according to the shape parameter. If the Weibull distribution is used, it can be applied to various environments in a realistic manner compared to the exponential distribution that can be reflected only when the failure rate is constant. In this paper, Markov chain analysis method is applied to evaluate the reliability of multi-functional multi-state standby system. In order to verify the validity of the reliability, a graph was generated by applying arbitrary shape parameters and scale parameter values through Excel. In order to analyze the effect of multi-functional multi-state standby system using Weibull distribution, we compared the reliability based on the most basic parallel system and the standby system.

Keywords : Markov Analysis, Multi-Functional Component, Multi-State System(MSS), Weibull Distribution, Standby Redundancy

1. 서론

신뢰도란 구성품, 장치, 설비 또는 시스템이 주어진 사용

조건하에서 규정된 기간 동안 의도한 기능을 수행할 확률을 의미한다.

오늘날 과학기술이 발전됨에 따라 일상생활에서 사용되는 용품부터 각종 전자제품, 자동차, 선박, 항공기 등 첨단 장치에 이르기까지 시스템의 기능과 구조가 복잡하고 정교화 되면서 과거보다 고장에 대한 우려가 커지고 있다. 이에 따라 시스템이 주어진 기간 동안 정해진 임무를

성공적으로 수행할 수 있는지에 높은 관심을 갖게 되었으며, 그 중 가장 널리 알려진 시스템의 임무 성공에 대한 척도가 신뢰도이다[5].

기업들은 복잡하고 새로운 시스템 구조에 대응하기 위해 주요부품 고장 시 대기부품이 작동되는 중복구조를 많이 채택하고 있다. 중복구조의 경우 비 중복구조에 비해 높은 신뢰도를 갖추고 있기 때문에 높은 신뢰도를 필요로 하는 산업에서 주로 이용되고 있다. 한편, 중량이 큰 부분을 차지하는 선박이나 항공기의 경우 주요부품마다 대기부품을 갖추기 어려워 일반적인 중복구조를 적용시키기에 제약이 따른다. 이러한 점을 보완하기 위해 여러 주요부품의 기능을 대신 수행할 수 있는 다기능 대기부품을 이용하여 중복시스템을 구성할 경우 중량과 신뢰도라는 두 가지 목표를 모두 만족시킬 수 있다.

신뢰도는 시스템의 운영단계에서 향상시키기 어렵기 때문에 시스템 설계 시 반드시 고려해야 하는 중요한 요소이며, 이러한 신뢰도를 향상시키기 위해 시스템에 중복구조를 적용한다. 가장 기본적인 시스템 중복구조에 관한 연구는 MIL-HDBK-338B[9], Osaki and Asakura[11], Subramanian and Venkatakrishnan[13]이 제안한 2개의 부품을 갖는 대기중복시스템이다. 이 시스템의 경우 주요부품이 고장이 나면 대기 중이던 대기부품이 그 기능을 대신 수행한다. Agarwal et al.[1]은 부품의 고장을 경미한 고장과 주요 고장으로 분류하여 2개의 수리시설이 있는 작동 장치와 비 작동 대기(cold standby) 장치로 구성된 복잡한 시스템의 신뢰도를 연구하였다. Ram et al.[12]은 수리를 고려한 주 장치와 대기 장치로 구성된 5개의 상태를 갖는 시스템에서 라플라스 변환을 이용하여 가용성, 평균고장시간, 비용을 분석하였다.

모든 시스템은 주어진 환경에서 의도한 작업을 수행하도록 설계되었다. 그 중 일부는 시스템의 성능지수에 따라 완전작동과 완전고장 사이에 다양한 수준의 상태에서 작업을 수행할 수 있다. Lisnianski et al.[8]은 이러한 성능지수가 유한한 시스템을 다중상태시스템(Multi-state System)이라고 정의하였다. 일반적으로 이진 시스템은 완전작동과 완전고장 2가지 상태만을 갖는 다중상태시스템의 가장 간단한 경우이다. 이러한 다중상태시스템의 신뢰성 평가 방법으로 확률론적 과정 접근법인 마르코프 체인(Markov Chain) 분석 방법이 있다. El-Damces and Temraz[2]은 시스템이 완전작동과 완전고장 사이에 다양한 성능수준을 가질 수 있는 다중상태시스템에 대해 연속 마르코프 보상 모델을 적용하여 가용도와 신뢰도를 분석하였다. Muhammad et al.[10]은 4개의 상태를 갖는 다중상태시스템에서 이산 시간 마르코프(discrete time markov) 과정과 연속 시간 마르코프(continuous time markov) 과정을 기반으로 한 신뢰도 평가 모델을 제시하였다. Lisnianski et al.[7]은 화력발전부품의 신뢰도 연구에서 4개의 상태를 갖는 시스템을 가정하

고 다중상태 마르코프 모델을 이용하여 신뢰도를 분석하였다. Jackson[3]은 마르코프 분석과 와이블 분포를 결합하여 복잡한 시스템에서의 신뢰도 모델링을 수행함으로써, 기존의 지수분포만을 고려한 전통적인 마르코프 분석의 다양성을 확장시켰다.

본 연구의 목적은 기존의 Kim et al.[4]이 고려한 다기능 대기부품을 갖는 항공기 유압펌프 시스템에서 부품의 고장률이 일정한 경우만을 분석한 지수분포의 한계점을 보완하여 보다 현실적으로 다양한 고장률을 반영할 수 있는 와이블 분포를 이용하여 마르코프 분석 방법을 통해 신뢰도 분석 모델을 개발하는 것이다.

2. 이론적 배경

본 논문에서 사용되는 기호는 다음과 같다.

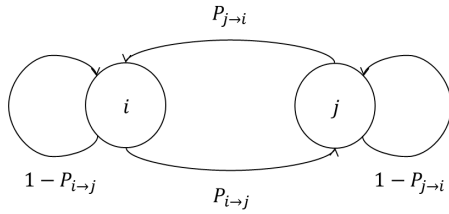
n	: 부품의 수
k	: 성능수준의 수
X_i	: 부품 i ($i = 1, 2, \dots, n$)
$h_i(t)$: 부품 i 의 고장률($i = 1, 2, \dots, n$)
g_j	: 시스템의 성능수준($j = 1, 2, \dots, k$), $g_k > g_{k-1} > \dots > g_2 > g_1$
$p_j(t)$: t 시점에서 시스템 성능수준이 g_j 일 확률 ($j = 1, 2, \dots, k$)
$P(t)$: 상태확률벡터
$P^T(t)$: 상태확률 전치벡터
A	: 상태전이행렬
$R_j(t)$: 시스템의 요구성능수준(w)이 g_j 인 경우 신뢰도($j = 1, 2, \dots, k$)

2.1 마르코프 체인(Markov Chain)

마르코프 체인은 확률론적 과정 접근법의 일종으로, 각 시행의 결과가 바로 앞의 시행의 결과에만 영향을 받는 일련의 확률적 시행을 말한다. 마르코프 분석을 적용하기 위해서 다음과 같은 제약조건을 만족시켜야 한다.

- (1) 이전 상태에서 다음 상태로의 전이 확률은 일정하게 유지되어야 한다.
- (2) 상태 i 에서 상태 j 로 전이하는 확률 $P_{i \rightarrow j}$ 는 상태 i 와 j 에만 연관되어 있기 때문에 상태 i 이외의 과거 상태와는 독립적이다.

상태 i 에서 j 로의 전이 확률을 $P_{i \rightarrow j}$, 상태 j 에서 i 로의 전이 확률을 $P_{j \rightarrow i}$ 라 할 때 <Figure 1>과 같은 상태전이도로 표시할 수 있다.



<Figure 1> State Transition Diagram

<Figure 1>의 상태천이도의 전이확률을 통해 식 (1)과 같은 상태천이행렬을 작성할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} P_{i \rightarrow i} & P_{i \rightarrow j} \\ P_{j \rightarrow i} & P_{j \rightarrow j} \end{bmatrix} \quad (1)$$

2.2 다중상태 신뢰도

부품들의 고장에 따른 시스템 성능수준 g_j 의 상태를 다음과 같이 표현할 수 있다. 이때의 시스템 구조는 2개의 주요부품이 병렬로 연결된 시스템에 다기능 대기부품을 추가한 구조이다.

- (1) g_4 : 2개의 주요부품 모두 고장이 나지 않고 완전히 작동하는 가장 양호한 상태이다.
- (2) g_3 : 1개의 주요부품의 고장으로 다기능 대기부품이 그 기능을 대신 수행하는 상태이다. 전체 시스템 관점에서 봤을 때 g_4 에 비해 시스템 성능은 저하된다.
- (3) g_2 : 1개의 주요부품만 작동하거나 다기능 대기부품만 작동하는 상태이다. 시스템의 기능이 한쪽 방향으로만 작동되므로 g_3 에 비해 시스템 성능은 저하된다.
- (4) g_1 : 2개의 주요부품, 다기능 대기부품 모두 작동이 불가능한 완전한 고장 상태이다.

Kim et al.[4]이 정의한 다중상태시스템의 신뢰도는 다음과 같다. $j = 2, 3, 4$ 에 대하여 시스템의 요구성능수준 (w)이 j 번째 성능수준과 일치한다면, 즉, $w = g_j$ 이라면 t 시점에서의 신뢰도는 다음의 식 (2)와 같이 정의된다.

$$R_j(t) = 1 - \sum_{i=1}^{j-1} p_i(t) = \sum_{i=j}^4 p_i(t), j = 2, 3, 4 \quad (2)$$

2.3 와이블 분포(Weibull Distribution)

본 논문에서는 부품의 고장률이 항상 일정한 지수분포 대신, 다양한 고장률 형태를 반영할 수 있는 와이블 분포를 사용한다. 와이블 분포는 형상모수(β), 척도모수(α), 위치모수(γ) 모수를 갖는 연속형 확률분포로 시간의 경

과에 따라 감소($\beta < 1$), 일정($\beta = 1$), 증가($\beta > 1$)하는 고장률을 표현할 수 있다. 본 논문에서는 위치모수를 0으로 가정한다. 따라서 와이블 분포의 고장밀도함수 $f(t)$, 신뢰도 $R(t)$, 불신뢰도 $F(t)$, 고장률 $h(t)$ 는 각각 식 (3)~식 (6)과 같이 정의된다.

$$f(t) = \alpha^\beta \beta t^{(\beta-1)} e^{-(\alpha t)^\beta} \quad (3)$$

$$R(t) = e^{-(\alpha t)^\beta} \quad (4)$$

$$F(t) = 1 - R(t) = 1 - e^{-(\alpha t)^\beta} \quad (5)$$

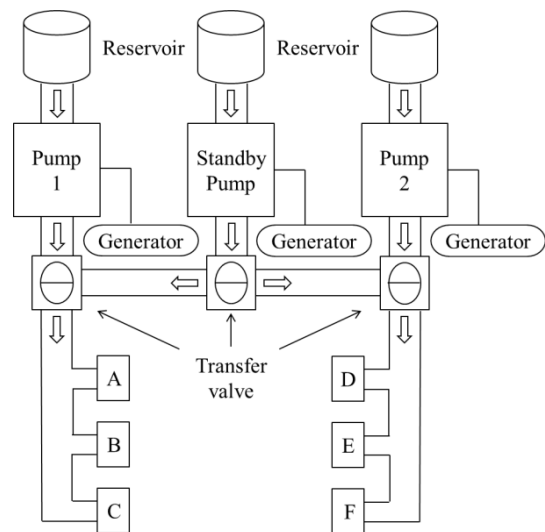
$$h(t) = \frac{f(t)}{R(t)} = \frac{\alpha^\beta \beta t^{(\beta-1)} e^{-(\alpha t)^\beta}}{e^{-(\alpha t)^\beta}} = \alpha^\beta \beta t^{(\beta-1)} \quad (6)$$

3. 다기능 다중상태 대기시스템의 신뢰도모형

3.1 다기능 다중상태 대기시스템의 신뢰도

3.1.1 항공기 유압펌프 시스템의 구조

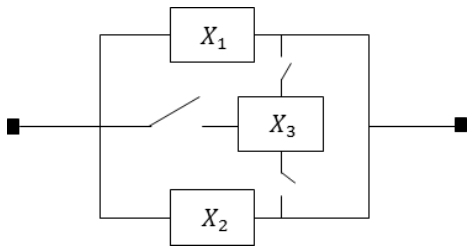
Kim et al.[4]이 고려한 다기능 대기부품을 갖는 항공기 유압펌프 시스템의 구조는 <Figure 2>와 같다. 이 시스템의 모든 펌프는 동일한 압력을 생성하고 상호교환이 가능하다. 펌프 1과 펌프 2는 주요펌프로 각각 저유기와 전환밸브를 통해 왼쪽 부품(A, B, C)과 오른쪽 부품(D, E, F)에 유압을 공급한다. 이때, 대기펌프는 주요펌프가 고장이 날 때까지 작동하지 않는 비 작동 대기상태(Cold standby)에 있다. 주요펌프 고장 시 대기펌프는 전환밸브를 통해 왼쪽 부품(A, B, C)과 오른쪽 부품(D, E, F)에 유압을 공급할 수 있으므로 다기능을 가진 대기부품이라 할 수 있다.



<Figure 2> Structure of Aircraft Hydraulic Pump System

3.1.2 시스템 구조

<Figure 2>의 유압펌프 시스템을 신뢰성 블록도로 표현하면 <Figure 3>과 같다. 이 시스템의 구조는 기본적인 병렬시스템에 다기능 대기부품이 추가된 형태이다. X_1 과 X_2 는 주요부품으로 동일한 부품이지만 서로 다른 기능을 수행한다. X_3 는 다기능 대기부품으로 비 작동 대기상태에 있다가 주요부품 고장 시 그 기능을 대신 수행한다.



<Figure 3> Reliability Block Diagram of the System

본 모형의 신뢰도를 분석하기 위한 가정사항은 다음과 같다.

- (1) 주요부품과 대기부품은 모두 동일한 부품이며 동일한 기능을 수행한다.
- (2) 각 부품의 고장은 상호 독립적이고 동시에 2개 이상의 부품이 고장 나지 않는다.
- (3) 각 부품은 완전작동과 완전고장 2가지 상태만을 갖는다.
- (4) 각 부품의 고장시간 분포는 와이블 분포를 따르며 고장 시 수리되지 않는다.
- (5) 다기능 대기부품은 비 작동 대기부품으로 대기상태에서 고장률은 0이다.

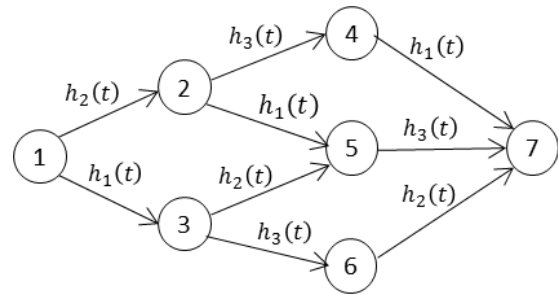
3.1.3 신뢰도 분석

<Figure 3>의 신뢰성 블록도를 참고하여 부품들의 고장유무에 따른 시스템의 상태는 <Table 1>과 같이 7개의 상태로 정의한다. 이때 W(Work)는 작동상태, F(Fail)는 고장상태, 그리고 SB(Standby)는 비 작동 대기상태이다.

<Table 1> Table of the System States

State No.	X_1	X_2	X_3	System State	g_j	$p_j(t)$
1	W	W	SB	W	g_4	$p_4(t)$
2	W	F	W	W	g_3	$p_3(t)$
3	F	W	W	W	g_3	$p_3(t)$
4	W	F	F	W	g_2	$p_2(t)$
5	F	F	W	W	g_2	$p_2(t)$
6	F	W	F	W	g_2	$p_2(t)$
7	F	F	F	F	g_1	$p_1(t)$

<Table 1>를 이용하여 시스템의 상태천이도를 작성하면 <Figure 4>와 같다. <Figure 4>에서 상태 1은 주요부품 모두 고장이 나지 않은 시스템의 완전작동 상태이고 상태 2와 상태 3은 주요부품 1개 고장 시 다기능 대기부품이 그 기능을 대신 수행한 상태이다. 상태 4, 5, 6은 모든 부품 중 1개의 부품만 작동한 상태이다. 마지막으로 상태 7은 모든 부품의 고장으로 인한 시스템 완전고장 상태이다. 임의의 시간 t에 대한 각 부품의 고장률은 $h_1(t)$, $h_2(t)$, $h_3(t)$ 로 표기하였다.



<Figure 4> State Transition Diagram of the System

<Figure 4>의 상태천이도를 통해 콜모고로프 전진 방정식 $[P'(t)^T] = [P(t)^T] \cdot [A]$ 을 이용하여 미분연립방정식을 작성할 수 있다. 이 때 상태천이행렬은 식 (7)과 같다.

$$\begin{bmatrix} -h_1(t)-h_2(t) & h_2(t) & h_1(t) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -h_1(t)-h_3(t) & 0 & h_3(t) & h_1(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -h_2(t)-h_3(t) & 0 & h_2(t) & h_3(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -h_1(t) & 0 & 0 & h_1(t) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -h_3(t) & 0 & h_3(t) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -h_2(t) & h_2(t) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (7)$$

식 (7)의 상태천이행렬을 이용하여 식 (8)과 같은 미분연립방정식을 작성할 수 있다.

$$P_1'(t) = -(h_1(t) + h_2(t)) \cdot P_1(t) \quad (8)$$

$$P_2'(t) = h_2(t) \cdot P_1(t) - (h_1(t) + h_3(t)) \cdot P_2(t)$$

$$P_3'(t) = h_1(t) \cdot P_1(t) - (h_2(t) + h_3(t)) \cdot P_3(t)$$

$$P_4'(t) = h_3(t) \cdot P_2(t) - h_1(t) \cdot P_4(t)$$

$$P_5'(t) = h_1(t) \cdot P_2(t) + h_2(t) \cdot P_3(t) - h_3(t) \cdot P_5(t)$$

$$P_6'(t) = h_3(t) \cdot P_3(t) - h_2(t) \cdot P_6(t)$$

$$P_7'(t) = h_1(t) \cdot P_4(t) + h_3(t) \cdot P_5(t) + h_2(t) \cdot P_6(t)$$

식 (8)의 미분방정식에 와이블 분포의 고장률 $h(t) = \alpha^\beta \beta t^{(\beta-1)}$ 를 대입하여 방정식을 풀면 식 (9)와 같이 임의의 시간 t 시점에서 각 상태에 있을 확률을 구할 수 있다. 이때 모든 상태의 확률의 합은 1이므로 상태 7의 확률은 1에서 모든 상태의 확률을 뺀 여사건의 형태로 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned}
 P_1(t) &= e^{-2(\alpha t)^\beta} & (9) \\
 P_2(t) &= (\alpha t)^\beta e^{-2(\alpha t)^\beta} \\
 P_3(t) &= (\alpha t)^\beta e^{-2(\alpha t)^\beta} \\
 P_4(t) &= [1 - (1 + (\alpha t)^\beta) e^{-(\alpha t)^\beta}] e^{-(\alpha t)^\beta} \\
 P_5(t) &= 2[1 - (1 + (\alpha t)^\beta) e^{-(\alpha t)^\beta}] e^{-(\alpha t)^\beta} \\
 P_6(t) &= [1 - (1 + (\alpha t)^\beta) e^{-(\alpha t)^\beta}] e^{-(\alpha t)^\beta} \\
 P_7(t) &= 1 - \sum_{i=1}^6 P_i(t)
 \end{aligned}$$

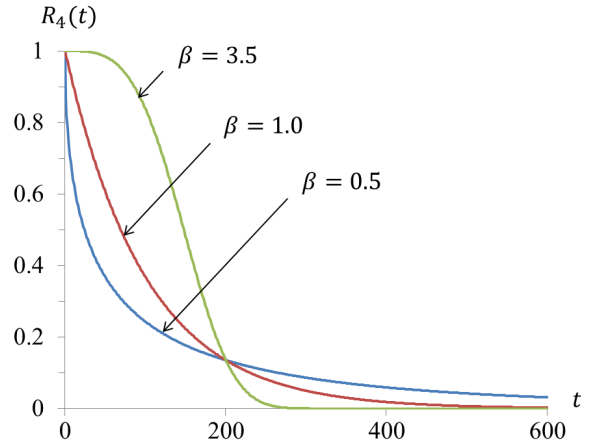
앞서 식 (2)에서 요구성능수준(w)이 $g_j(j=2, 3, 4)$ 인 경우 시스템 신뢰도를 정의하였다. 이를 이용하여 다음의 식 (10)과 같이 각 요구성능수준에 대한 신뢰도를 구할 수 있다.

$$\begin{aligned}
 R_4(t) &= p_4(t) = P_1(t) = e^{-2(\alpha t)^\beta} & (10) \\
 R_3(t) &= p_4(t) + p_3(t) = P_1(t) + P_2(t) + P_3(t) \\
 &= [1 + 2(\alpha t)^\beta] e^{-2(\alpha t)^\beta} \\
 R_2(t) &= p_4(t) + p_3(t) + p_2(t) = \sum_{i=1}^6 P_i(t) \\
 &= [4 - (3 + 2(\alpha t)^\beta) e^{-(\alpha t)^\beta}] e^{-(\alpha t)^\beta}
 \end{aligned}$$

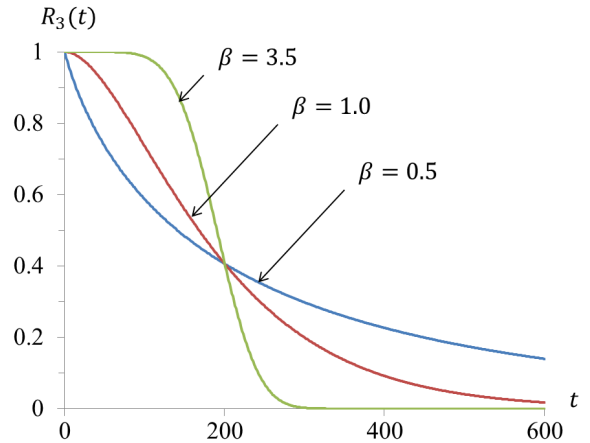
식 (10)에서 구한 각 성능수준 별 다기능 다중상태 대기시스템의 신뢰도 검증을 위해 척도모수 $\alpha = 0.005$, 형상모수 $\beta = 0.5$ (감소형), 1.0 (일정형), 3.5 (증가형)로 설정하여 임의의 시간 t 에 대한 신뢰도 그래프를 <Figure 5>~<Figure 7>에서 작성하였다. 그 결과 시스템은 각 성능수준에 대해서 형상모수에 따라 다양한 형태의 신뢰도를 반영할 수 있다.

3.2 비교 모형

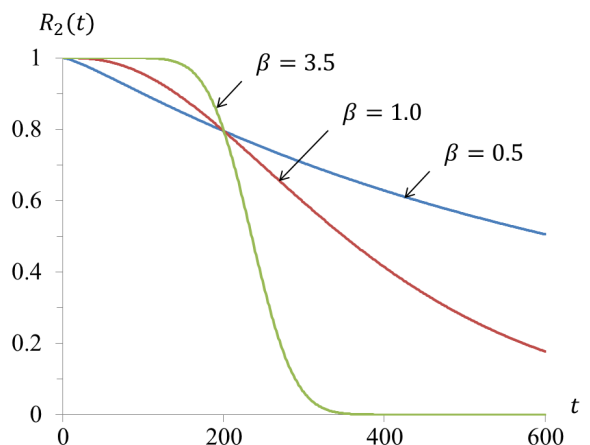
부품의 고장률이 와이블 분포를 따르는 다기능 다중상태 대기시스템의 효과를 분석하기 위해 본 논문에서는 두 가지 비교 모형을 제시한다. 대기부품을 갖지 않는 기본적인 병렬시스템과 주요부품 모두 대기부품을 갖는 대



<Figure 5> Reliability for the Required Performance Level g_4



<Figure 6> Reliability for the Required Performance Level g_3

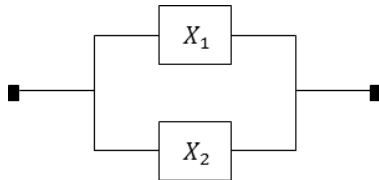


<Figure 7> Reliability for the Required Performance Level g_2

기시스템의 신뢰도를 분석한다. 모든 부품의 고장시간 분포는 와이블 분포를 따르며, 앞의 다기능 다중상태 대기시스템의 모형에서 신뢰도 분석 시 사용한 5가지 가정 사항을 동일하게 적용한다.

3.2.1 병렬시스템(Parallel System)

<Figure 8>은 대기부품을 갖지 않는 가장 기본적인 병렬 시스템의 신뢰성 블록도로 X_1, X_2 는 모두 주요부품이다. <Figure 8>을 참고하여 부품들의 고장유무에 따른 시스템의 상태는 <Table 2>와 같이 4개의 상태로 정의한다.

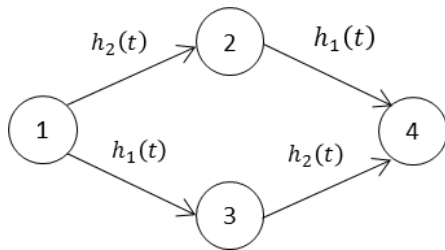


<Figure 8> Reliability Block Diagram of Parallel System

<Table 2> State Table of Parallel System

State No.	X_1	X_2	System State	g_j	$p_j(t)$
1	W	W	W	g_4	$p_4(t)$
2	W	F	W	g_2	$p_2(t)$
3	F	W	W	g_2	$p_2(t)$
4	F	F	F	g_1	$p_1(t)$

<Table 2>를 이용하여 시스템의 상태천이도를 작성하면 <Figure 9>와 같다. 임의의 시간 t 에 대한 각 부품의 고장률은 $h_1(t), h_2(t)$ 로 표기하였다.



<Figure 9> State Transition Diagram of Parallel System

<Figure 9>의 상태천이도를 통해 본 논문의 제 3.1절과 같이 콜모고로프 전진 방정식을 이용하여 식 (11)과 같은 미분연립방정식을 작성할 수 있다.

$$\begin{aligned}
 P_1'(t) &= -(h_1(t) + h_2(t)) \cdot P_1(t) \\
 P_2'(t) &= h_2(t) \cdot P_1(t) - h_1(t) \cdot P_2(t) \\
 P_3'(t) &= h_1(t) \cdot P_1(t) - h_2(t) \cdot P_3(t) \\
 P_4'(t) &= h_1(t) \cdot P_2(t) + h_2(t) \cdot P_3(t)
 \end{aligned}
 \tag{11}$$

제 3.1절과 동일한 방법으로 식 (11)의 미분방정식에 와이블 분포의 고장률 $h(t) = \alpha^\beta \beta t^{\beta-1}$ 를 대입하여 방정식을

풀면 식 (12)와 같이 임의의 시간 t 시점에서 각 상태에 있을 확률을 구할 수 있다.

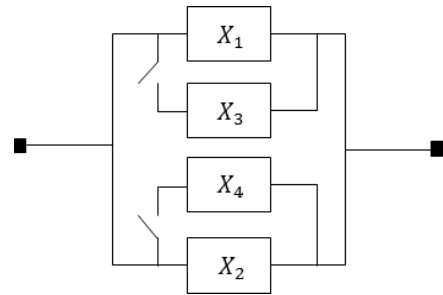
$$\begin{aligned}
 P_1(t) &= e^{-2(\alpha t)^\beta} \\
 P_2(t) &= (1 - e^{-(\alpha t)^\beta})e^{-2(\alpha t)^\beta} \\
 P_3(t) &= (1 - e^{-(\alpha t)^\beta})e^{-2(\alpha t)^\beta} \\
 P_4(t) &= 1 - \sum_{i=1}^3 P_i(t)
 \end{aligned}
 \tag{12}$$

따라서 각 요구성능수준에 따른 시스템 신뢰도는 다음 식 (13)과 같다.

$$\begin{aligned}
 R_4(t) &= p_4(t) = P_1(t) = e^{-2(\alpha t)^\beta} \\
 R_3(t) &= p_4(t) + p_3(t) = P_1(t) = e^{-2(\alpha t)^\beta} \\
 R_2(t) &= p_4(t) + p_3(t) + p_2(t) = P_1(t) + P_2(t) + P_3(t) \\
 &= (2 - e^{-(\alpha t)^\beta})e^{-2(\alpha t)^\beta}
 \end{aligned}
 \tag{13}$$

3.2.2 대기시스템(Standby System)

<Figure 10>은 주요부품 모두 대기부품을 갖는 가장 기본적인 대기시스템의 신뢰성 블록도로 X_1, X_2 는 주요 부품이며 X_3, X_4 는 각 주요부품에 대한 대기부품이다. <Figure 10>을 참고하여 부품들의 고장유무에 따른 시스템의 상태는 <Table 3>와 같이 9개의 상태로 정의한다.

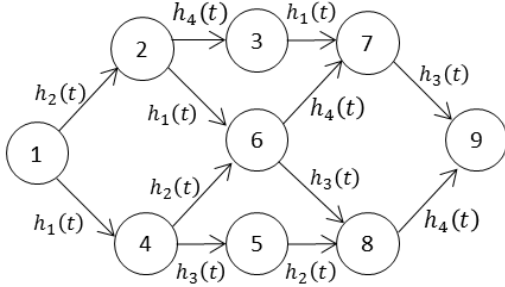


<Figure 10> Reliability Block Diagram of Standby System

<Table 3> State Table of Standby System

State No.	X_1	X_2	X_3	X_4	System State	g_j	$p_j(t)$
1	W	W	SB	SB	W	g_4	$p_4(t)$
2	W	F	SB	W	W	g_4	$p_4(t)$
3	W	F	SB	F	W	g_2	$p_2(t)$
4	F	W	W	SB	W	g_4	$p_4(t)$
5	F	W	F	SB	W	g_2	$p_2(t)$
6	F	F	W	W	W	g_3	$p_3(t)$
7	F	F	W	F	W	g_2	$p_2(t)$
8	F	F	F	W	W	g_2	$p_2(t)$
9	F	F	F	F	F	g_1	$p_1(t)$

<Table 3>를 이용하여 시스템의 상태전이도를 작성하면 <Figure 11>과 같다. 임의의 시간 t 에 대한 각 부품의 고장률은 $h_1(t)$, $h_2(t)$, $h_3(t)$, $h_4(t)$ 로 표기하였다.



<Figure 11> State Transition Diagram of Standby System

<Figure 11>의 상태전이도를 통해 본 논문의 제 3.1절과 같이 콜모고로프 전진 방정식을 이용하여 식 (14)와 같은 미분연립방정식을 작성할 수 있다.

$$\begin{aligned}
 P_1'(t) &= -(h_1(t) + h_2(t)) \cdot P_1(t) \\
 P_2'(t) &= h_2(t) \cdot P_1(t) - (h_1(t) + h_4(t)) \cdot P_2(t) \\
 P_3'(t) &= h_4(t) \cdot P_2(t) - h_1(t) \cdot P_3(t) \\
 P_4'(t) &= h_1(t) \cdot P_1(t) - (h_2(t) + h_3(t)) \cdot P_4(t) \\
 P_5'(t) &= h_3(t) \cdot P_4(t) - h_2(t) \cdot P_5(t) \\
 P_6'(t) &= h_1(t) \cdot P_2(t) + h_2(t) \cdot P_4(t) \\
 &\quad - (h_3(t) + h_4(t)) \cdot P_6(t) \\
 P_7'(t) &= h_1(t) \cdot P_3(t) + h_4(t) \cdot P_6(t) - h_3(t) \cdot P_7(t) \\
 P_8'(t) &= h_2(t) \cdot P_5(t) + h_3(t) \cdot P_6(t) - h_4(t) \cdot P_8(t) \\
 P_9'(t) &= h_3(t) \cdot P_7(t) + h_4(t) \cdot P_8(t)
 \end{aligned} \tag{14}$$

제 3.1절과 동일한 방법으로 식 (14)의 미분방정식에 와이블 분포의 고장률 $h(t) = \alpha^\beta \beta t^{\beta-1}$ 를 대입하여 방정식을 풀면 식 (15)와 같이 임의의 시간 t 시점에서 각 상태에 있을 확률을 구할 수 있다.

$$\begin{aligned}
 P_1(t) &= e^{-2(\alpha t)^\beta} \\
 P_2(t) &= (\alpha t)^\beta e^{-2(\alpha t)^\beta} \\
 P_3(t) &= [1 - (1 + (\alpha t)^\beta) e^{-(\alpha t)^\beta}] e^{-(\alpha t)^\beta} \\
 P_4(t) &= (\alpha t)^\beta e^{-2(\alpha t)^\beta} \\
 P_5(t) &= [1 - (1 + (\alpha t)^\beta) e^{-(\alpha t)^\beta}] e^{-(\alpha t)^\beta} \\
 P_6(t) &= (\alpha t)^{2\beta} e^{-2(\alpha t)^\beta} \\
 P_7(t) &= (\alpha t)^\beta [1 - (1 + (\alpha t)^\beta) e^{-(\alpha t)^\beta}] e^{-(\alpha t)^\beta} \\
 P_8(t) &= (\alpha t)^\beta [1 - (1 + (\alpha t)^\beta) e^{-(\alpha t)^\beta}] e^{-(\alpha t)^\beta} \\
 P_9(t) &= 1 - \sum_{i=1}^8 P_i(t)
 \end{aligned} \tag{15}$$

따라서 각 요구성능수준에 따른 시스템 신뢰도는 다음 식 (16)과 같다.

$$R_4(t) = p_4(t) = P_1(t) + P_2(t) + P_4(t) = (1 + 2(\alpha t)^\beta) e^{-2(\alpha t)^\beta} \tag{16}$$

$$R_3(t) = p_4(t) + p_3(t) = P_1(t) + P_2(t) + P_4(t) + P_6(t) = [1 + (\alpha t)^\beta]^2 e^{-2(\alpha t)^\beta}$$

$$R_2(t) = p_4(t) + p_3(t) + p_2(t) = \sum_{i=1}^8 P_i(t) = (1 + (\alpha t)^\beta) [2 - (1 + (\alpha t)^\beta) e^{-(\alpha t)^\beta}] e^{-(\alpha t)^\beta}$$

4. 수치 예제

앞서 제 3장을 통해 시스템의 요구성능수준(w)이 $g_j (j=2, 3, 4)$ 인 경우 각 시스템에 대한 신뢰도를 확인하였다. 이때, 다기능 다중상태 대기시스템의 신뢰도를 $R_{M_j}(t)$, 병렬 시스템의 신뢰도를 $R_{P_j}(t)$, 대기시스템의 신뢰도를 $R_{S_j}(t)$ 로 설정한다. 직관적인 판단에 의해 $R_{M_j}(t)$ 는 $R_{P_j}(t)$ 와 $R_{S_j}(t)$ 사이에 위치함을 알 수 있다. 본 논문에서는 다기능 다중상태 대기시스템의 효과를 분석하기 위해 Kim et al. [4]이 고려한 $[R_{S_j}(t) - R_{P_j}(t)]$ 에 대한 $[R_{M_j}(t) - R_{P_j}(t)]$ 의 비를 이용한다. 식 (17)은 다기능 다중상태 대기시스템의 효과 $E_{M_j}(t)$ 에 관한 식이다. $E_{M_j}(t)$ 의 값이 1이면 다기능 다중상태 대기시스템의 신뢰도가 대기시스템의 신뢰도와 같다는 것이므로, 효과가 높다고 할 수 있다. $E_{M_j}(t)$ 의 값이 0이면 다기능 다중상태 대기시스템의 신뢰도가 병렬 시스템과 같다는 것이므로, 효과가 낮다고 할 수 있다.

$$E_{M_j}(t) = \frac{R_{M_j}(t) - R_{P_j}(t)}{R_{S_j}(t) - R_{P_j}(t)}, \quad (j=2, 3, 4) \tag{17}$$

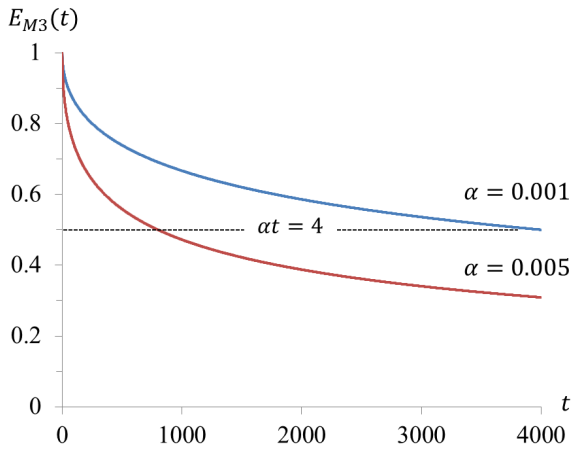
시스템의 요구성능수준(w)이 g_4 인 경우, $R_{M_4}(t)$ 의 값과 $R_{P_4}(t)$ 의 값이 동일하므로 $E_{M_4}(t)$ 의 값은 식 (18)과 같이 0으로 나오게 된다. 따라서 다기능 다중상태 대기시스템의 효과는 없다고 할 수 있다.

$$E_{M_4}(t) = \frac{R_{M_4}(t) - R_{P_4}(t)}{R_{S_4}(t) - R_{P_4}(t)} = \frac{0}{2(\alpha t)^\beta e^{-2(\alpha t)^\beta}} = 0 \tag{18}$$

시스템의 요구성능수준(w)이 g_3 인 경우, 다기능 다중상태 대기시스템의 효과 $E_{M_3}(t)$ 는 식 (19)와 같다.

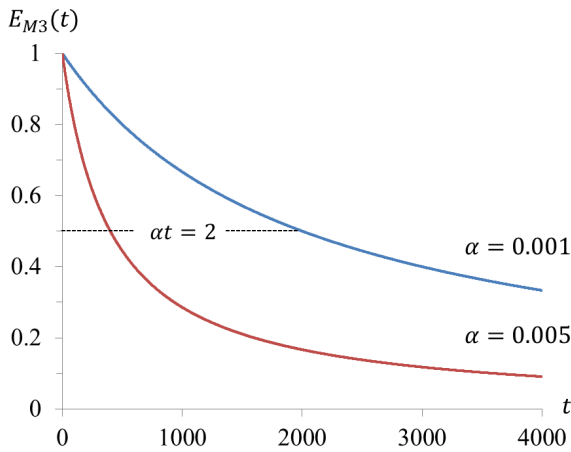
$$E_{M_3}(t) = \frac{R_{M_3}(t) - R_{P_3}(t)}{R_{S_3}(t) - R_{P_3}(t)} = \frac{2}{2 + (\alpha t)^\beta} \tag{19}$$

(1) $\beta = 0.5$ (감소형)인 경우



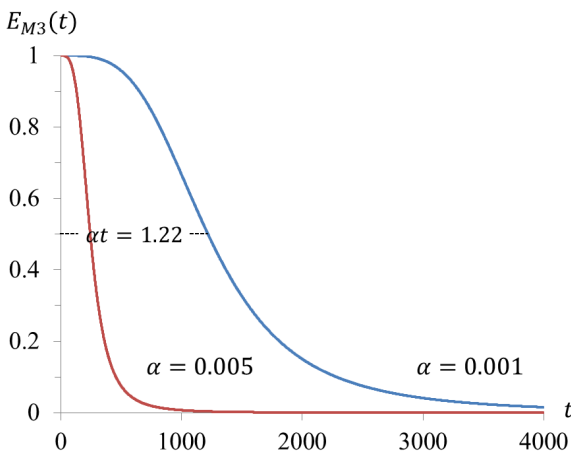
<Figure 12> $E_{M3}(t)$ for the Required Performance Level g_3

(2) $\beta = 1.0$ (일정형)인 경우



<Figure 13> $E_{M3}(t)$ for the Required Performance Level g_3

(3) $\beta = 3.5$ (증가형)인 경우



<Figure 14> $E_{M3}(t)$ for the Required Performance Level g_3

이때, 형상모수의 값에 따라 고장률의 형태가 달라지므로 형상모수 $\beta = 0.5$ (감소형), 1.0 (일정형), 3.5 (증가형) 세 가지 경우로 분류하여 $E_{M3}(t)$ 의 변화를 확인하였다. 임의의 척도모수 $\alpha = 0.001$ 과 $\alpha = 0.005$ 로 설정하여 각 형상모수 값에 따른 $E_{M3}(t)$ 의 변화는 <Figure 12>~<Figure 14>와 같다.

<Figure 12>에서 $\beta = 0.5$ 인 경우, $E_{M3}(t)$ 는 $at < 4$ 즉, $t < \frac{4}{\alpha}$ 일 때 $E_{M3}(t)$ 의 값이 0.5보다 크게 되므로 다기능 다중상태 대기시스템의 효과가 크다고 할 수 있다. <Figure 13>에서 $\beta = 1.0$ 인 경우, $E_{M3}(t)$ 는 $at < 2$ 즉, $t < \frac{2}{\alpha}$ 일 때 $E_{M3}(t)$ 의 값이 0.5보다 크게 되므로 시스템의 효과가 크다고 할 수 있다. <Figure 14>에서 $\beta = 3.5$ 인 경우, $E_{M3}(t)$ 는 $at < 1.22$ 즉, $t < \frac{1.22}{\alpha}$ 일 때 $E_{M3}(t)$ 의 값이 0.5보다 크게 되므로 시스템의 효과가 크다고 할 수 있다. 고장률의 형태에 따른 세 가지 경우 모두 신뢰도가 약 $R_{M3}(t) = 0.092$, $R_{P3}(t) = 0.018$, $R_{S3}(t) = 0.165$ 이다. 실제 공정에서 요구하는 시스템 신뢰도는 이보다 훨씬 크므로 각각 $at \ll 4$, $at \ll 2$, $at \ll 1.22$ 일 때이다. 따라서 다기능 다중상태 대기시스템의 효과는 더 크다고 할 수 있다.

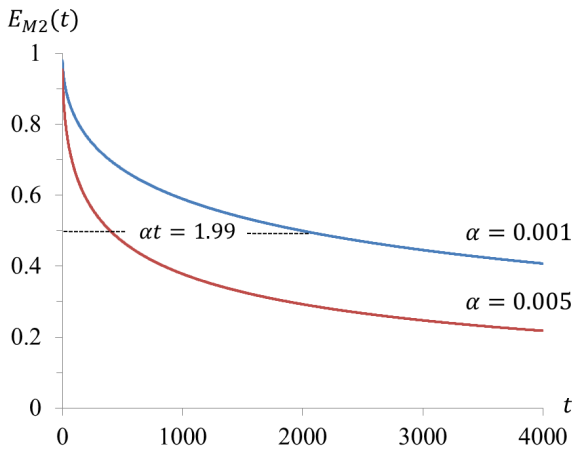
시스템의 요구성능수준(w)이 g_2 인 경우, 다기능 다중상태 대기시스템의 효과 $E_{M2}(t)$ 는 식 (20)과 같다.

$$E_{M2}(t) = \frac{R_{M2}(t) - R_{P2}(t)}{R_{S2}(t) - R_{P2}(t)} = \frac{2[1 - (1 + (at)^\beta)e^{-(at)^\beta}]}{(at)^\beta [2 - (2 + (at)^\beta)e^{-(at)^\beta}]} \quad (20)$$

앞과 동일하게 형상모수의 값에 따라 고장률의 형태가 달라지므로 형상모수 $\beta = 0.5$ (감소형), $\beta = 1.0$ (일정형), $\beta = 3.5$ (증가형) 세 가지 경우로 분류하여 $E_{M2}(t)$ 의 변화를 확인하였다. 임의의 척도모수 $\alpha = 0.001$ 과 $\alpha = 0.005$ 로 설정하여 각 형상모수 값에 따른 $E_{M2}(t)$ 의 변화는 <Figure 15>~<Figure 17>과 같다.

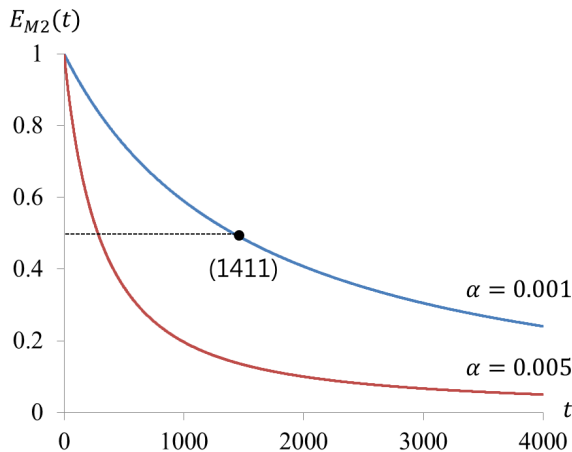
<Figure 15>에서 $\beta = 0.5$ 인 경우, $E_{M2}(t)$ 는 $at < 1.99$ 즉, $t < \frac{1.99}{\alpha}$ 일 때 $E_{M2}(t)$ 의 값이 0.5보다 크게 되므로 다기능 다중상태 대기시스템의 효과가 크다고 할 수 있다. <Figure 16>에서 $\beta = 1.0$, $\alpha = 0.001$ 인 경우 $t < 1411$ 일 때 $E_{M2}(t)$ 의 값이 0.5보다 크게 되므로 시스템의 효과가 크다고 할 수 있다. <Figure 17>에서 $\beta = 3.5$, $\alpha = 0.001$ 인 경우 $t < 1104$ 일 때 $E_{M2}(t)$ 의 값이 0.5보다 크게 되므로 시스템의 효과가 크다고 할 수 있다. $\alpha = 0.005$ 인 경우에도 이와 비슷한 특성을 가진다. 고장률의 형태에 따른 세 가지 경우 모두 신뢰도가 약 $R_{M2}(t) = 0.629$, $R_{P2}(t) = 0.428$, $R_{S2}(t) = 0.830$ 이다. 실제 공정에서 요구하는 시스템 신뢰도는 이보다 훨씬 크므로 각각 $at \ll 1.99$, $t \ll 1411$, $t \ll 1104$ 일 때이다. 따라서 다기능 다중상태 대기시스템의 효과는 더 크다고 할 수 있다.

(1) $\beta = 0.5$ (감소형)인 경우



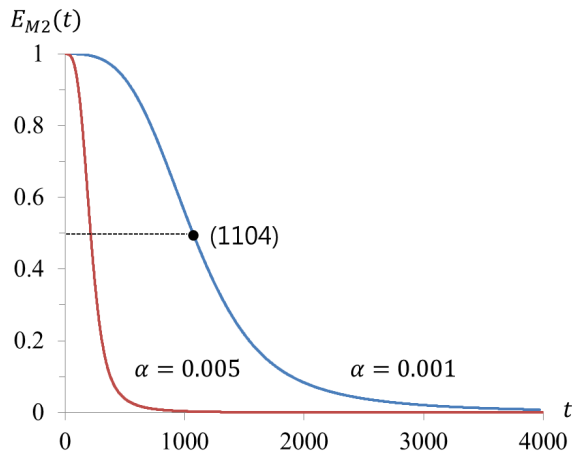
<Figure 15> $E_{M2}(t)$ for the Required Performance Level g_2

(2) $\beta = 1.0$ (일정형)인 경우



<Figure 16> $E_{M2}(t)$ for the Required Performance Level g_2

(3) $\beta = 3.5$ (증가형)인 경우



<Figure 17> $E_{M2}(t)$ for the Required Performance Level g_2

5. 결 론

본 논문에서는 부품의 고장시간 분포가 와이블 분포를 따르는 다기능 대기부품을 갖는 다중상태 대기시스템의 신뢰도 분석 모형을 제안하였다. 해당 시스템의 신뢰도를 분석하기 위해 마르코프 체인 분석 방법을 이용하였다. 시스템의 신뢰도 그래프를 작성해본 결과 신뢰도는 항상 0과 1사이에 존재한다. 또한 형상모수에 따라 다양한 형태의 신뢰도를 반영할 수 있는 것을 통해 신뢰도 모형의 타당성을 검증하였다.

본 논문에서 제시한 시스템의 효과를 분석하기 위해 수치 예제를 통한 가장 기본적인 병렬시스템과 대기시스템을 고려하여 형상모수에 따라 각 고장률의 형태(감소형, 일정형, 증가형)에 대한 다기능 다중상태 대기시스템의 신뢰도 분석 효과를 확인하였다. 본 연구에서 제시한 와이블 분포를 이용한 신뢰도 분석 모델링은 고장률이 증가형을 따르는 선박이나 항공기 등 다기능 대기부품을 갖는 다양한 산업 외에도 다양한 고장률의 시스템 신뢰도 분석 시 용이하게 사용될 수 있다.

본 논문에서는 부품이 고장 났을 경우 수리가 불가능한 비수리계 시스템의 경우로 한정하였는데 이를 확장하여 일반적인 수리계 시스템에서의 가용도를 분석할 수 있다. 또한 브릿지 시스템과 같은 구조가 복잡한 시스템이 다기능 대기부품을 갖고 있을 경우 신뢰도를 용이하게 분석할 수 있도록 확장할 수 있다. 마지막으로 본 연구에서 제시한 신뢰도 분석 모델링을 확장하여 비용함수를 포함한 다기능 대기부품의 최적 교체 주기 모형을 개발할 수 있을 것이다.

References

- [1] Agarwal, S.C., Sahani, M., and Bansal, S., Reliability Characteristic of Cold-Standby Redundant System, *International Journal of Research and Reviews in Applied Sciences*, 2010, Vol. 3, No. 2, pp. 193-199.
- [2] El-Damcese, M.A. and Temraz, N.S., Availability and reliability measures for multi-state system by using markov reward model, *Journal of Reliability : Theory & Applications*, 2011, Vol. 2, No. 3, pp. 68-85.
- [3] Jackson, A., Reliability Modeling that Combines Markov Analysis and Weibull Distributions, *Proceedings Annual Reliability and Maintainability Symposium*, 2013, Orlando, FL, USA, pp. 1-6.
- [4] Kim, D.H., Lee, S.H., and Lim, J.H., Reliability analysis of multi-state parallel system with a multi-functional standby component, *Journal of the Korea Industrial*

- Information Systems Research*, 2015, Vol. 20, No. 4, pp. 75-87.
- [5] Kim, H.S. and Kim, P.S., A Reliability-Redundancy Optimization Problem of Series-Parallel system Using CTMC Model, *Journal of Yonsei Business Review*, 2013, Vol. 50, No. 2, pp. 273-294.
- [6] Kim, Y.S. and Chung, Y.B., A Study on Reliability Prediction of System with Degrading Performance Parameter, *Journal of Society of Korea Industrial and Systems Engineering*, 2015, Vol. 38, No. 4, pp. 142-148.
- [7] Lisnianski, A., Elmakias, D., Laredo, D., and Haim, H.B., A Multi-state Markov model for a short-term reliability analysis of a power generating unit, *journal of Reliability Engineering and System Safety*, 2012, Vol. 98, No. 1, pp. 1-6.
- [8] Lisnianski, A., Frenkel, I. and Ding, Y., *Multi-state System Reliability Analysis and Optimization for Engineers and Industrial Managers*, London : Springer, 2010.
- [9] MIL-HDBK-338B : *Electronic reliability design handbook*, Fort Belvoir, VA : Defense Quality and Standardization Office, 1998.
- [10] Muhammad, M., Mokhtar, A.A., and Majid, M.A.A., Reliability Assessment of Multi-State Repairable System Subject to Minimal Repairs and Constant Demand, *IEEE Colloquium on Humanities, Science and Engineering Research*, 2011, Penang, Malaysia, pp. 1-5.
- [11] Osaki, S. and Asakura, T., A Two-Unit Standby Redundant System with Repair and Preventive Maintenance, *Journal of Applied Probability*, 1970, Vol. 7, No. 3, pp. 641-648.
- [12] Ram, M., Singh, S.B. and Singh, V.V., Stochastic Analysis of a Standby System With Waiting Repair Strategy, *IEEE Transactions on Systems*, 2013, Vol. 43, No. 3, pp. 698-707.
- [13] Subramanian, R. and Venkatakrishana, K. S., Reliability of a 2-Unit Standby Redundant System with Repair, Maintenance and Standby Failure, *IEEE Transactions on Reliability*, 1975, Vol. R-24, No. 2, pp. 139-142.

ORCIDJi-Hye Kim | <http://orcid.org/0000-0002-9141-4262>Young-Bae Chung | <http://orcid.org/0000-0003-4259-6677>