https://doi.org/10.5392/JKCA.2017.17.09.437

수학의 1차적 개념이 초등학교 3학년 영재아의 수학적 개념구성 과정에 미치는 영향에 대한 사례연구 -소수의 덧셈을 중심으로-

A Case Study about Influence of Primary Mathematic Concepts on the Composition of Mathematic Concepts in 3rd Grade Prodigies of Elementary Schools -Focusing on Addition of Decimals-

김화수
세한대학교 수학교육과

Hwa-Soo Kim(hskim@sehan.ac.kr)

요약

본 연구에서는 나눗셈과 분수와 소수의 1차적 개념을 학습한 초등학교 3학년 영재아 2명을 대상으로 소수의 덧셈을 내용으로 하였을 때, 어떠한 변형된 1차적 개념[1]과 변형된 스키마[2]를 어떻게 구성하여 소수의 덧셈에 대한 관계적 이해를 하는지에 대해서 질적 사례연구를 통하여 알아보았다. 즉, 연구대상자들이 스스로 형성한 변형된 1차적 개념과 변형된 스키마를 어떻게 이용하여 소수의 덧셈에 대한 문제 해결에 접근을 하는지, 또한 연구대상자들이 개념구성과 문제해결력에서의 스키마는 어떻게 변형을 이루어 나가는지를 심도 있게 조사하였다. 그 결과 나눗셈과 분수와 소수의 1차적 개념에 대한 학습으로 형성된 변형된 1차적 개념과 변형된 스키마가 소수의 덧셈에 대한 관계적 이해에 중요한 요인으로 작용 한다는 것을 알 수 있었다.

■ 중심어 : | 1차적 개념 | 변형된 1차적 개념 | 스키마 | 변형된 스키마 |

Abstract

This study was conducted as a qualitative case study for examining what transformed primary concepts and transformed schemas were formed for the addition of decimals and how they were formed, and how the relational understanding of the addition of decimals was in three 3rd grade elementary school children who had studied the primary concepts of division, fraction and decimal. That is, this study investigated how the subjects approached problems of decimal addition using transformed primary concepts and transformed schemas formed by themselves, and how the subjects formed concepts and transformed schemas in problem solving. According to the results of this study, transformed primary concepts and transformed schemas formed through the learning of the primary concepts of division, fraction, and decimal functioned as important factors for the relational understanding of decimal addition.

■ keyword : | Primary Concepts | Transformed Primary Concepts | Schema | Transformed Schema |

* 이 논문은 2017년도 세한대학교 교내 연구비 지원을 받아 써진 것임.

접수일자 : 2017년 06월 07일
수정일자 : 2017년 07월 12일
심사완료일 : 2017년 07월 12일
교신저자 : 김화수, e-mail : hskim@sehan.ac.kr

I. 서 론

1. 연구의 필요성 및 목적

초등학교 수학영재아들은 사칙연산 각각의 1차적 개념은 무엇이고 사칙연산 각각의 1차적 개념의 연결로 무엇을 구성할 수 있으며, 사칙연산 각각의 1차적 개념의 연결로 구성된 2차적 개념은 무엇인지 궁금해 하고 알고 싶어 한다. 또한 분수는 어떠한 개념들의 연결로 구성되었는지, 그리고 분수는 소수와 소수의 덧셈과 곱셈 등 다른 상위 개념들에 어떠한 영향을 주는 지도 매우 궁금해 한다. 예를 들어 $a:b=c:d$ 에 대해서 $b\times c=a\times d$ 가 되는 것은 알고 있지만, 왜 $a:b=c:d$ 가 $b\times c=a\times d$ 가 되는지에 대해서 아는 학생은 거의 없이, “내항의 곱과 외항의 곱($b\times c=a\times d$)은 같기 때문에 그렇습니다.” 라는 말과 “공식은 아는데 그 공식이 왜 그렇게 나오는지 잘 몰라요.”라는 말을 대부분의 연구대상자들이 언급하는 것을 보았을 때, 1차적 개념에 대한 학습이 이루어지지 않은 2차적 개념의 학습은 학생들에게 2차적 개념에 대한 관계적 이해가 이루어지지 않을 뿐만 아니라 수학에 대한 흥미도도 떨어지는 것을 볼 수 있다. 연구대상자들(영재아)은 본인 스스로가 문제를 해결하기를 원하기 때문에 반복적인 문제풀이학습이나, 과정이 없는 결과위주의 학습(공식을 이용한 문제풀이)은 매우 싫어하는 경향을 보인다. 소수가 무엇이고, 소수와 관계가 있는 개념은 무엇이며, 소수의 덧셈에서 왜 계산을 세로셈으로 만들고 소수점의 위치를 같이 맞추어서 소수점이 그대로 내려오게 하는지, 소수의 곱셈은 소수의 덧셈처럼 소수점이 그대로 내려오지 않고 소수점이하의 수의 개수를 세어서 그 수만큼의 위치에 소수점을 찍는지, 또한 소수의 덧셈과 곱셈을 다른 개념들의 연결로 해결할 수 없는지, 있다면 어떠한 형태로 어떤 개념들의 연결로 만들어지는지 알고 싶어 한다. 수학은 단순히 사실, 절차, 규칙, 공식 등을 모아 놓은 것이 아니라 창의적으로 생각하고 논리적으로 사고하며 의사소통이 필요한 문제를 해결하는 하나의 탐구과정이다[3]. 그러므로 수학을 하기 위해서는 수학의 1차적 개념이 필요하다. 1차적 개념이 연구되고 학습되어야 학습자들은 그 1차적 개념을 바탕으로 2차적 개념을 형성하고 1차적 개념과 2차적 개념, 2차적 개념끼리의 연결로 3차적 개념을 형성하고 그 이상의 고차원적인 개념들을 학습자들 스스로가 형성할 수 있는 것이다. 그리고 이렇게 형성된 개념의 구성체는 학습자들에 의해서 논리적으로 설명될 수 있을 뿐만 아니라, 학습자들끼리 서로 각각의 생각을 주고받으면서 수학적 의사소통을 할 수 있는 것이다.

2002년부터 현재까지 초등학생들을 대상으로 1차적 개념과 변형된 스키마를 활용한 개념구성과정을 계속하여 종단적인 연구를 해 오는 과정에서 연구대상자들 대부분은 연구 초반에는 1차적 개념에 대한 학습이 거의 되어있지 않아서(반복적인 계산에 의한 훈련된 수학에 익숙해져 있어서) 수학영재아들 조차도 문제를 풀었을 때, 답은 맞아도 그 이유가 왜인지를 설명하는 학생은 거의 없을 뿐만 아니라, 문제를 해결하는 방법 또한 오직 한 가지 밖에 없었다. 하지만 수학영재의 특성에 관한 연구에서 Krutetskii[4]는 수학영재는 수학에 대한 강한 호기심을 가지고 수학적 창의성, 유연성, 정확성 그리고 문제 해결력이 뛰어나며, 수학적 상관관계에 대한 합리적이고 분석적인 사고를 하고, 자료에 대한 개념화와 일반화 능력이 뛰어난 특성을 가지고 있다고 보고 지적한 바와 마찬가지로, 본 연구에서도 1차적 개념에 대한 학습을 시켰을 때, 수학영재아들은 1차적 개념의 본질은 변하지 않으면서 모양을 다르게 변화 시킨 변형된 1차적 개념을 더욱 다양하게 형성하는 것을 볼 수 있었고, 자신이 스스로 형성한 변형된 1차적 개념들을 여러 가지 형태로 연결하여 더욱더 다양하고 창의적인 변형된 스키마를 형성하여 문제 해결에 접근하는 것을 볼 수 있었다.

일반적으로 영재교육에서 강조해야 할 세 가지 유형의 기회는 다음과 같다. 첫째, 상위 지식을 학습할 기회[5]; 둘째, 도전적인 수학문제를 접할 기회[6]; 셋째, 창의적 사고를 발전시키는 기회[7]. 이러한 초점을 바탕으로 본 논문에서는 변형된 스키마를 구성하기 위해 필요한 1차적 개념에 대한 연구와 이로 인해 형성되는 변형된 스키마를 분석 하고 이것을 중심으로 수업을 실시할 때, 나타나는 여러 현상, 즉 학생들의 개념형성 과정상의 1차적 개념에서 2차적 개념으로 발전해 나갈 때, 나

타나는 현상을 소수의 덧셈과 곱셈을 중심으로 조사 연구 하였다.

2. 연구 문제

본 연구의 목적을 달성하기 위하여 다음과 같은 연구문제가 설정되었다.

1) 연구대상자들은 나눗셈과 분수와 소수의 1차적 개념의 이해로 소수의 덧셈에 대하여 어떠한 변형된 스키마를 형성하는가?

3. 용어의 정의

3.1 1차적 개념

개념들의 결합으로 만들어지지 않은 단독으로 형성된 개념. 즉, 그 개념이 가지고 있는 본질적인 의미를 뜻한다[1].

예를 들어, 덧셈의 1차적 개념은 하나의 수 또는 양에 또 하나의 수 또는 양(같은 종류, 같은 크기)을 첨가하거나 병합하는 계산법으로, 더해짐을 당하는 수는 피가수라 하고 더하는 수를 가수라고 하며, 그 결과를 합이라고 한다[8].

3.2 변형된 1차적 개념

1차적 개념에 대한 본질은 변하지 않으면서, 모양을 다르게 변화시킨 1차적 개념을 뜻한다[3].

예) 나눗셈의 1차적 개념,

피제수가 제수에 의해서 몇 등분이 되는지 아는 것(등분제).

피제수에 제수가 얼 만큼 포함이 되는지 아는 것(포함제).

나눗셈의 변형된 1차적 개념,

피제수에서 제수를 몇 번 뺄 수 있는지 아는 것.

제수가 몇 번 더해지면 피제수가 되는지 아는 것.

제수에 얼마를 곱하면(더해진 개수만큼) 피제수가 되는지 아는 것.

3.3 2차적 개념

1차적 개념들의 연결이나, 1차적 개념과 변형된 1차적 개념의 연결, 그리고 변형된 1차적 개념들의 연결로 형성된 개념을 뜻한다[2].

3.4 변형된 스키마

Skemp[9]가 말하는 스키마는 개념과 개념들의 결합으로 이루어진 개념의 구성체를 말한다. 그러나 본 연구에서 변형된 스키마라 함은 변형된 1차적 개념을 다른 1차적 개념이나 다른 변형된 1차적 개념과 연결하여 형성한 기존에 나와 있지 않은 새로운 형태의 스키마를 의미한다(변형된 스키마 또한 큰 의미에서 스키마에 포함됨)[2].

예를 들면, 약수는 나눗셈의 변형된 1차적 개념과 덧셈, 뺄셈, 곱셈의 1차적 개념이 연결되어 만들어진 변형된 스키마이다. 그러므로 피제수에 제수가 한 번 또는 여러 번 포함되거나, 포함된 개수만큼 피제수에서 제수를 뺐을 때, 피제수의 나머지가 없으면 그때의 제수는 약수가 된다. 그리고 제수를 한 번 또는 여러 번 더하거나, 더한 제수의 개수를 제수에 곱했을 때, 피제수가 나오면 이때의 제수와 곱해진 수(더한 제수의 개수)는 약수가 된다.

II. 이론적 배경

1. 이해

우리는 학교수학을 수학자들의 활동(주어진 이론이 왜 그렇게 되는지 알아내고, 새로운 이론을 발명하고, 주장을 정당화하는 등)을 고찰하는 인간 활동의 관점으로 바라봐야 한다. 또한 수학을 이용하는 사람들이 어떻게 문제 상황을 조사하고, 변수를 결정하고, 변수를 수량하여 관련짓는 방법을 결정하고, 계산을 실행하고, 예측해보고, 예측의 유용성을 확인하는지를 고찰해야 한다[10]. 수학이라는 학문은 관련된 내용 영역의 거대한 아이디어의 집합이며, 수학자, 수학교육자, 수학 사용자의 공동체에 의해 정의되기 때문이다[11]. 이해의 발달을 단순히 기존의 지식에 새로운 개념과 과정을 덧붙이는 것으로 생각하는 것은 충분하지 않다. 장기적인 측면에서 이해를 발달시키는 것은 단순히 이전의 지식

에 새로운 지식을 연결하는 것 이상을 포함한다. 또한 풍부하고 통합적인 지식구조의 창조를 포함한다[10].

"수학은 쭉 뻗은 긴 몸통 하나에 수식이 마구 덮여 있는 야자나무가 아니다. 수학은 서로 연결된 많은 몸통과 가지가 있으며, 숲의 크기로 자라 우리가 오르고 탐험하도록 초대하는 반얀나무이다[12]."

Hiebert[13], Resnick 등[14], Drexel[15]에 의하면 "학생들은 소수를 개념적으로 이해하지 못하고 선수학습인 범자연수(즉, 0과 자연수)와 분수 지식을 과대 일반화한다." 그러므로 학생들이 소수의 덧셈을 관계적으로 이해하기 위해서는 여러 가지의 수학적인 1차적 개념과 각각의 1차적 개념에서 의미는 변하지 않으면서 새로운 모양으로 뻗어져 나오는 변형된 1차적 개념들을 찾아내고 그들을 여러 형태로 연결하여 문제 해결에 필요한 스키마를 형성하여야 한다. 즉, 문제해결을 위해서는 문제에 대한 정확한 이해가 필요하고, 문제에 대한 정확한 이해가 이루어지기 위해서는 1차적 개념에 대한 학습이 필요하다. 1차적 개념에 대한 학습이 이루어졌을 때, 변형된 1차적 개념과 변형된 스키마를 학습자 스스로가 다양하게 구성할 수 있으므로 수학적 문제해결에 도움을 줄 수 있기 때문이다. 학생들에게 그들이 이해하지 못하는 알고리즘을 가르치는 것은 기껏해야 제한된 잠재력을 가지게 할 뿐이며, 더욱 중요한 것은 그것이 학생들의 일반적인 수학적 지식에 기여하지 못하는 고립된 기술로 귀착된다는 점이다[16]. 수학을 효과적으로 가르치려면 학생들이 무엇을 알고 있으며 무엇을 학습할 필요가 있는지에 대해 이해하여야 하며 그들이 수학을 잘 배우도록 격려하고 지원해야 한다[17]. 학생들이 수학을 관계적으로 이해하기 위해서는 교사들이 수학을 관계적으로 가르쳐야한다. 수학을 관계적으로 가르치기 위해서는 교사들이 수학의 1차적 개념에 대한 많은 연구가 이루어져야 한다. 1차적 개념에 대한 많은 연구가 이루어 졌을 때, 교사들은 학생들이 알고 있는 수학적 지식에 학생들 스스로가 연결하여 수학을 관계적으로 이해할 수 있도록 하게 하는 다양한 형태의 변형된 1차적 개념과 변형된 스키마를 가르칠 수 있기 때문이다.

III. 연구 방법 및 절차

1. 연구 대상

대전에 있는 M초등학교와 D초등학교 3학년 학생 2(남학생 2명)명을 대상으로 실시하였다. 실시한 2명은 모두, 전교 석차 10% 안에 포함되고[18] KAGE 영재학술원에서 지능검사(한국 웩슬러 지능검사)와 문제 해결력 검사, 창의력 검사를 통해 선발되어 교육을 받는 학생으로 수학적 문제 해결력이 비슷한 성향의 학생들이었다.

2. 연구 방법과 절차

2.1 연구 방법

최근에는 학습자의 학습결과뿐만 아니라 학습과정에서 무엇이, 왜, 어떻게 일어났는가에 대한 보다 근본적인 문제에 대한 관심이 고조되고 있다. 본 연구는 오늘날 교과교육 분야에서 자주 사용되고 있는 질적 연구방법을 사용하여 학습자의 관점에서 학습과정을 정의하고 이론을 찾아 보다 현장감 있는 연구가 되고자 하였다. 본 연구의 목적은 학생들이 개념을 습득하고 스키마와 변형된 스키마를 형성해 가면서 나타나는 수학적 사고 발달과정을 조사하는 것이므로 일반 연구 등에서 구할 수 있는 자료 이상으로 충분한 증거 자료, 예를 들면, 관찰, 인터뷰, 학습자 노트, 관찰자 노트 등을 사용할 수 있는 디자인의 장점 때문에 사례연구를 택하였다.

본 연구의 사례는 소수의 덧셈에 대한 내용을 수학의 1차적 개념을 학습한 두 명의 연구 대상자들에게 제공했을 때, 나타나는 현상(변형된 스키마)을 중심으로 기록 원고를 작성하여 분석하였다.

2.2 연구 절차

본 연구는 1차적 개념에서 2차적 개념으로 발전을 할 때, 어떠한 수학적 개념 구성과정을 거치고 어떠한 변형된 스키마를 형성하는지에 대해 알아보기 위해 연구를 하였다. 연구 문제를 통해 연구 대상자들에게 1차적 개념에 대한 숙지와 1차적 개념을 바탕으로 형성된 변형된 1차적 개념, 그리고 1차적 개념들을 연결하여 만들어 낼 수 있는 간단한 2차적 개념의 구성에 대한 내

용과 학습 활동지를 경험하게 하여 학생들에 의해서 발견되고 형성된 변형된 스키마의 분석과 기존 개념들과의 연결성 그리고 확장 범위에 대하여 심도 깊은 연구를 하였다.

본 연구자는 연구 대상자들에게 새로운 스키마를 형성 할 수 있도록 다음과 같은 지도 절차에 따라 스키마 학습을 전개하였다.

이와 같은 절차에 의해 스키마학습을 수행한 후, 연구자는 연구 대상자들과 토의한 내용과 연구 대상자들이 발견한 변형된 스키마를 정리하고, 이를 통하여 연구문제를 해결한 분석 결과를 제시 하였다.

연구 대상자들에게 새로운 스키마를 형성할 수 있도록 다음과 같은 절차에 따라 학습을 전개하였다.

① 1차적 개념에 대한 설명을 해주었다.
② 기존에 형성된 1차적 개념의 모델을 보여 주었다.
③ 연구대상자들이 구성한 변형된 스키마에 대해서 토의를 하였다.
④ 토의에 대한 내용을 분석하였다.
⑤ 토의를 통해 발견된 변형된 스키마를 정리하였다.
⑥ 학습활동지에 제시된 문제를 해결하게 하였다.
⑦ 해결된 문제를 바탕으로 어떠한 형태의 변형된 스키마가 이루어졌는지에 대한 분석을 하였다.

예) 소수를 예로 들면,
1) 소수의 1차적 개념에 대한 설명.
2) 소수에 대한 기존의 1차적 개념 모델 제시
3) 연구대상자들이 구성한, 소수의 변형된 스키마에 대해서 토의.
4) 토의된 내용 분석.
5) 토의를 통해 발견된 소수의 변형된 스키마의 정리.
6) 학습활동지에 제시한 문제 해결.
7) 연구대상자들이 해결한 학습활동지의 내용 분석

2.3 연구 도구

연구 도구의 전체 구성은 나눗셈과 분수와 소수의 연결성에 관한 관계적 이해와 그들의 연결성과 관련된 1차적 개념과 스키마에 관한 내용으로 이루어졌다.

연구 도구에 나타난 개념단계의 구조는 본 연구자의 주관적인 생각을 바탕으로 하고 있으므로 바라보는 시각이나 상황의 차이에 의해서 다시 바뀔 수 있으며, 1차적 개념의 범위 또한 넓히거나 좁힐 수 있다.

2.4 자료 수집 방법

본 연구의 목적인 1차적 개념의 이해와 이들의 구성으로 형성되는 스키마(개념의 구성체)와 변형된 스키마를 여러 가지 모양으로 개발하기 위하여, 연구에 참여한 두 명의 M, D초등학교 연구대상자들의 토의 내용(비디오 촬영)과 학습활동지에 서술된 내용들을 중심으로 자료를 수집하였다.

2.5 분석 방법

1차적 개념에 대한 이해와 변형된 스키마의 구성능력은 사례 연구를 통하여 연구 대상자들에게서 나타난 현상 그 자체를 기술한 형식, 그 자체를 취한 상태에서 1) 1차적 개념의 숙지, 2) 위와 같은 내용을 가진, 연구대상자들의 변형된 스키마 형성, 3) 2개 또는 3개 이상의 1차적 개념들의 연결로 구성된 2차적 개념에 대해서 분석을 하였다.

IV. 연구 결과 및 분석

본 연구자는 위의 연구도구를 학습한 연구 대상자들이 스스로 형성한 변형된 스키마를 중심으로 다음의 연구 문제에 대한 접근을 하였다.

1. 연구문제 1

1.1 나눗셈, 분수, 소수의 1차적 개념에 대한 설명과 1차적 개념 모델 제시

① 나눗셈에 대한 1차적 개념 설명

(포함제) - 나눔을 당하는 수(피제수)에 나누는 수(제수)가 얼마만큼 포함되어 있는가를 나타내는 것[8].

(등분제) - 나눔을 당하는 수(피제수)는 나누는 수(제수)에 의해서 몇 등분이 되는가를 나타내는 수[8].

② 나눗셈의 1차적 개념 모델 제시[1]

나눗셈의 1차적 개념 1.

15÷3 ⇒ 15 나누기 3

⇒ 15를 3으로 나눈다(15는 3에 의해서 나눔을 당한다).

⇒ 15는 나눔을 당하는 수(피제수), 3은 나누는 수(제수)를 뜻한다.

⇒ 피제수 15에 제수 3이 5번 포함된다.

⇒ 몫은 5가 된다.

나눗셈의 1차적 개념 2.

21÷3 ⇒ 21 나누기 3

⇒ 21을 3으로 나눈다(21은 3에 의해서 나눔을 당한다).

⇒ 21은 나눔을 당하는 수(피제수), 3은 나누는 수(제수)를 뜻한다.

⇒ 몫은 7이 된다.

③ 분수에 대한 1차적 개념 설명

분수란 '모양은 달라도 크기나 양을 똑같이 나눈다.' 라는 정의에서 '똑같이 나눈다.'는 의미를 이해하기 위해서는 먼저 '똑같다'라는 말과 '나눈다'란 말속에 함축되어 있는 생각을 알아야 한다. '나눈다'라는 말에는 나눌 수 있는 것과 나눌 수 없는 것이 있는데 나눌 수 있는 것만 분수로 나타낼 수 있다는 의미이다. 즉, 어떤 대상이 있을 때, 그 대상을 몇 조각으로 나누어도 물체의 속성은 변하지 않아야 그 대상을 분수로 표현할 수 있다. 또한 분수에서 무엇보다도 중요한 것은 똑같이 나누어야 한다는 것이다[19].

④ 분수의 1차적 개념 모델 제시

똑같이 나눈다는 것은 서로 불만이 없이 나누어 가지는 것을 뜻하며, 나눌 때는 모양과 상관없이 크기나 양만 같으면 된다. 이 원리를 바탕으로 생각해 보면, 분수에서 분모는 전체의 나누어진 조각의 개수를 말하며, 나누어진 조각의 개수에 따라 조각의 크기가 달라지므로 두 분수를 더하거나 빼거나 나눌 때, 분모가 다르면, 각각의 조각의 개수가 다르고, 크기나 양 또한 달라서 직접 더하거나 빼거나 나눌 수가 없다. 즉, '분모=조각의 개수=조각의 크기나 양'의 관계가 성립한다[2].

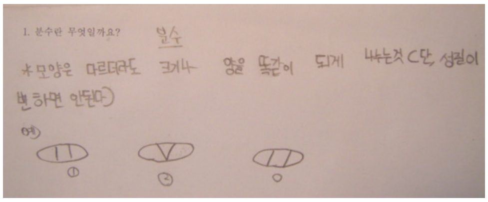

그림 Ⅳ-1. 분수의 1차적 개념

⑤ 소수에 대한 1차적 개념 설명

소수란 0과 1사이에 존재하는 모든 실수를 말한다[1].

⑥ 소수의 1차적 개념 모델 제시

예를 들어 0.7은 0보다 크고 1보다 작은 실수, 즉 0과 1사이에 존재하는 수(0 〈0.7 〈1) 이므로 소수이다. 0.7을 수직선 위에 표시하기 위해서는 아래 그림처럼, 0과 1사이를 10등분해야 표시가 가능하다[20].

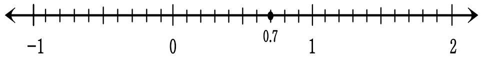

그림 Ⅳ-2. 소수의 1차적 개념

1.2 학생과 연구자(교사)의 토의

다음의 【프로토콜】은 연구 대상자들이 나눗셈, 분수, 소수의 1차적 개념에 대해서 학습한 후, 소수의 덧셈에 대해서 교사와 연구 대상자(영재아)들이 서로 대화를 나누는 장면에서 발췌한 것이다.

【프로토콜】

T: 오늘은 소수의 덧셈에 대해서 배울 건 데, 인제랑 도현이가 생각하기에 아직 배우지 않았지만 소수의 덧셈을 할 때, 어떻게 하면 될까?

S1: 선생님, 저요!!!

T: 그래, 인제!

ⓐ S1: 선생님, 분수로 소수의 덧셈을 하면 될 것 같아요!

T: 그럼, 인제가 생각한 것을 얘기해 볼래?

ⓑ S1: 소수는 0과 1사이에 있는 수라고 했잖아요, 그래서 0.2+0.5를 계산한다면, 0.2는 0과 1사이를 10개로 나눈 것 중의 2개구요, 0.5는 0과 1사이를 10개로 나눈 것 중의 5개잖아요. 이것을 분수로 바꾸면 $\frac{2}{10}+\frac{5}{10}$가 되구요, 계산을 하면 $\frac{7}{10}$이 돼서 분모에 0이 1개니까 소수점 이하의 수의 개수도 1개가 돼서 0.7이 돼요.

T: 왜, 분모에 0이 1개면, 소수점 이하의 수의 개수가 1개가 되지?

ⓒ S1: 소수점 이하의 수의 개수가 1개인 소수들은요, 0과 1사이를 10개로 나누면 되 구요, 소수점 이하의 수의 개수가 2개인 소수들은요, 0과 1사이를 100개로 나누고 되 구요, 소수점 이하의 수의 개수가 3개인 소수들은요, 0과 1사이를 1000개로 나누면, 모두 다 0과 1사이에 정확하게 표시할 수 있잖아요. 그리고 소수점 이하의 수의 개수랑 분모의 0의 개수가 서로 같아요. 그래서 분모에 0이 1개면 소수점 이하의 수의 개수도 1개예요.

T: 오~~~, 인제가 중요한 것을 발견했네.

ⓓ S2: 선생님 저도 발견한 것이 있어요! 0.2+0.5는요, 0.2와 0.5 모두 소수점 이하의 수의 개수가 1개잖아요. 그래서 0과 1사이를 10개로 나누면 되구요, 1칸이 0.1이니까요, 0.2에서 5번을 더 세면 되요. 그럼 0.7이 되요.

T: 그렇지! 그렇게 하면 분수의 덧셈을 한 다음에 또 다시 분수를 소수로 바꾸지 않아도 되겠네.

S1, S2: 어, 그러네요.

T: 그럼, 지금은 0.3+0.5를 가로셈으로 계산을 했는데, 세로셈으로 해보면 어떨까?

S1, S2: 네, 선생님. 먼저 해볼께요.

S1: 선생님, 세로셈이 더 편해요!

T: 어떤 것이 더 편한데?

S1: 가로셈으로 할 때에는 소수를 분수로 바꾸어서 계산을 했는데, 세로셈으로 하니까 도현이가 얘기한 것이 그대로 나와요~

T: 그게 무슨 말이니?

ⓔ S1: 도현이가 아까요, 0과 1 사이를 10개로 나누었을 때, 한 칸이 0.1이라고 했잖아요. 그래서 한 칸씩 세서 이동하면 소수의 덧셈을 할 수 있다고 했잖아요~ 그런데, 세로셈으로 하니까, 하나씩 세지 않아도 소수점을 그대로 내려오게 하고 소수점 이하의 수들만 더하면 쉽게 풀려요~

T: 왜, 소수점을 그대로 내려오게 하고, 소수점 이하의 수들만 더했지?

ⓕ S1: 왜냐하면요, 소수점 이하의 수의 개수들이 같다는 것은요, 0과 1사이를 나누는 개수가 같다는 것이잖아요, 그리고 0과 1사이를 나누는 개수가 같기 때문에 소수점의 위치는 변함이 없어요. 그래서 세로셈에서는 소수점이 그대로 내려오고 소수점 이하의 수들은 그냥 더했어요.

T: 우와~, 어떻게 그렇게 멋진 생각을 했지?

S2: 선생님, 그런데요, 인제가 한 것은 소수점 이하의 수의 개수가 같은 경우잖아요. 만약에요, 0.7+0.07처럼, 소수점 이하의 수의 개수가 서로 다른 경우에는 어떻게 해요? 그때도 인제가 말한 것처럼 소수점이 그대로 내려오고 소수점 이하의 수들만 더하면 되나요? 소수점 이하의 수의 개수가 서로 다르니까, 어떤 소수점을 그대로 내려오게 하는지 알 수 없잖아요.

T: 어떤 소수점이라니? 그게 무슨 말이지?

S2: 0.7의 소수점하고, 0.07의 소수점이요.

S1: 어, 그러네? 0.7은 10개로 나누어지고 0.07은 100개로 나누어지고… 소수점이하의 수의 개수가 서로 다르니까, 어떤 점이 기준이 되어야 하는지 모르겠어요. 선생님, 지금 생각해 보니까, 가로셈이 더 쉬워요~

T: 그럼 선생님이 너희들한테 몇 가지 물어볼게.

S1, S2: 네.

T: 0.7은 0과 1사이를 몇 개로 나누면 될까?

S1, S2: 10개요!

T: 그럼, 0과 1사이를 10개로 나누었을 때, 0.07도 표시할 수 있을까?

S1, S2: 아니요! 100개로 나누었을 때, 표시할 수 있어요!

T: 그럼, 0과 1사이를 100개로 나누면, 0.7도 표시할 수 있을까?

S1, S2: 아니요! 아니다. 맞아요. 100개로 나누면, 0.7도 표시할 수 있어요.

T: 어디에 표시할 수 있을까?

S2: 70번째요!

S1: 70번째요!

S2: 아! 선생님, 이제 알 것 같아요!

T: 도현이가 발견했구나!

ⓖ S2: 선생님, 아까요, 0.7하고 0.07이 소수점이하의 수의 개수가 달라서 어떤 소수점이 기준이 되어야 하는지 잘 몰랐었는데요, 이제는 알았어요. 소수점이하의 수의 개수가 많은 쪽이 기준이 돼요!

T: 왜 그러지?

ⓗ S2: 아까 얘기한대로 0과 1사이를 100개로 나누면, 0.7이랑 0.07 모두 0과 1사이에 표시할 수 있잖아요. 그리고 0.7은 70번째, 0.07은 7번째가 돼서, 더하면 77번째니까 0.77이 돼요.

S1: 선생님, 세로셈 보다는 가로셈이 더 생각을 많이 하게 하는 것 같아요.

T: 왜, 그런 생각을 했지?

S1: 세로셈은요, 계산하기는 편한데 왜 그렇게 하는지 모를 때가 많구요, 가로셈은 계산하기는 불편하지만 왜 그렇게 하는지 생각을 많이 해요.

S2: 저도 그래요. 가로셈이 좋아요. 세로셈은 재미없어요.

S1: 선생님, 저 하나 발견했어요!

T: 뭔데?

ⓘ S1: 0.7+0.07을요, 아까 소수점 이하의 수의 개수가 많은 쪽이 기준이 된다고 했잖아요. 그래서 저는 소수점 이하의 수의 개수가 많은 쪽을 기준으로 해서 먼저 0.7과 0.07에 각각 100을 곱해서 70과 7을 만들어서 더했어요. 그리고 77을 다시 곱한 만큼 100으로 나누었어요. 그래서 0.77을 만들었어요.

T: 왜 100을 곱했지?

ⓙ S1: 0.7은 10만 곱해도 자연수가 되지만, 0.07은 100을 곱해야지 자연수가 되잖아요. 그리고 0.7은 100을 곱해도 자연수가 돼서 100을 곱했어요. 자연수를 만들 때도 소수점 이하의 수의 개수가 많은 쪽이 기준이 돼요. 신기해요! 선생님!

T: 우와~, 인제가 많은 생각을 했네. 그런데 인제야~ 0.7에 10을 곱하면 7이 되는 것을 어떻게 알았니?

ⓚ S1: 0과 1사이를 10개로 나누면 한 칸이 0.1이잖아요. 거꾸로 0.1이 10개 모이면 1이구요. 0.7은 0.1의 7배라서 0.7이 10개모이면 7이라고 생각했어요.

1.3 토의된 내용 분석

【프로토콜】에서는 연구대상자들이 나눗셈과 분수와 소수의 1차적 개념을 바탕으로, 변형된 스키마 1(ⓐ, ⓑ, ⓒ), 변형된 스키마 2(ⓓ), 변형된 스키마 3(ⓔ, ⓕ), 변형된 스키마 4(ⓖ, ⓗ), 변형된 스키마 5(ⓘ, ⓙ, ⓚ)를 형성하여 소수의 덧셈에 대한 관계적 이해를 했을 뿐만 아니라, 소수점 이하의 수의 개수가 다른 경우의 소수의 덧셈에 대해서 창의적인 방법을 제시 하였다. 위에서 발견된 변형된 스키마를 정리해 보면, 다음과 같다.

1.4 발견된, 변형된 Schema 정리

① ⓐ, ⓑ, ⓒ의 내용을 바탕으로 한, 변형된 스키마 1

소수란 0과 1사이에 존재하는 모든 실수를 의미하므로 0과 1사이를 똑같은 크기로 나누었을 때, 소수를 정확한 위치에 표시할 수 있다. 그리고 0과 1사이를 나눈 전체 개수는 분모가 되고 소수가 있는 위치는 나눈 전체 개수의 부분이 되므로 소수를 분수로 만들 수 있다. 그러므로 0.2+0.5는 $\frac{2}{10}+\frac{5}{10}$로 나타낼 수 있고, $\frac{2}{10}+\frac{5}{10}$는 $\frac{7}{10}$이 된다. 이 때, 0과 1사이를 나눈 10의 거듭제곱수(분모)의 0의 개수와 소수점 이하의 수의 개수는 서로 일치하고, $\frac{7}{10}$은 분모의 10의 거듭제곱수인 10이 0이 1개 이므로 소수점 이하의 수의 개수도 1개가 돼서 0.7이 된다.

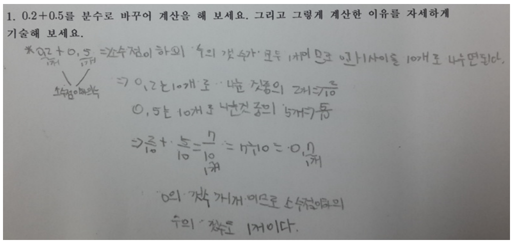

그림 Ⅳ-3. 소수의 덧셈에 대한 변형된 스키마 1

② ⓓ의 내용을 바탕으로 한, 변형된 스키마 2

0.2+0.5는 0.2와 0.5 모두 소수점 이하의 수의 개수가 1개 이므로 0과 1사이를 10개로 등분 하면 된다. 그리고 0과 1사이를 10개로 등분 했을 때, 1칸이 0.1이므로 0.2+0.5는 두 번째인 0.2에서 5번을 더 세면된다. 그러므로 0.2+0.5는 0.7이 된다.

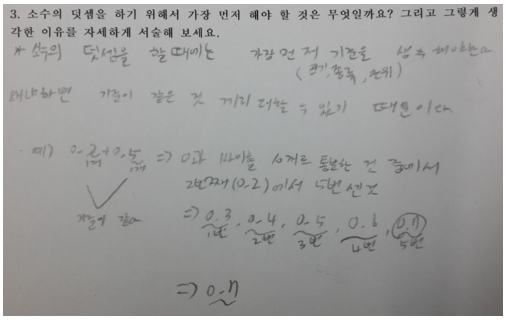

그림 Ⅳ-4. 소수의 덧셈에 대한 변형된 스키마 2

③ ⓔ, ⓕ의 내용을 바탕으로 한, 변형된 스키마 3

0.2+0.5를 세로셈으로 계산하면, 0.2와 0.5는 모두 소수점 이하의 수의 개수가 1개이므로 0과 1사이를 10개로 등분 하면 된다. 그리고 0과 1사이를 등분 하는 개수가 같으므로 소수점의 위치에는 변화가 없다. 그러므로 0.2+0.5의 세로셈에서 소수점이 그대로 내려와서 0.7이 된다.

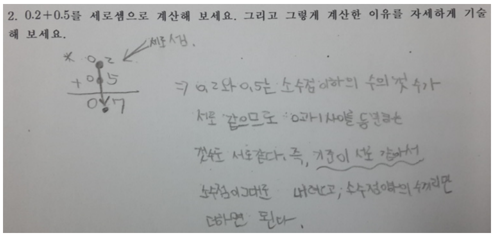

그림 Ⅳ-5. 소수의 덧셈에 대한 변형된 스키마 3

④ ⓖ, ⓗ의 내용을 바탕으로 한, 변형된 스키마 4

0.7+0.07과 같이 소수점 이하의 수의 개수가 서로 다른 경우에는 분수처럼 통분을 해서 문제를 해결 할 수 있다. 이 때, 소수에서 통분을 한다는 것은 0과 1사이를 등분하는 개수를 같게 하는 것을 말한다. 예를 들면, 0.7의 경우에는 소수점 이하의 수의 개수가 1개 이므로 0과 1사이를 10등분하면 0과 1사이에 정확하게 표시가 가능하지만 0.07의 경우에는 소수점 이하의 수의 개수가 2개 이므로 100등분을 해야 0과 1사이에 정확하게 표시가 가능하다. 이 때, 0과 1사이를 100등분 하면 1칸이 0.01이므로 0.7의 경우에는 70번째, 0.07의 경우에는 7번째에 해당되어, 0.7+0.07은 100등분 한 것 중의 70번째(0.7)에서 7번(0.07)을 더 세어서 0.77에 표시할 수 있다. 그러므로 소수점 이하의 수의 개수가 서로 다른 소수의 덧셈에서는 소수점 이하의 수의 개수가 많은 쪽의 소수가 기준이 되어 등분(통분)을 하면, 두 소수를 모두 0과 1사이에 정확하게 표시할 수 있어서 덧셈을 하기 편리하다.

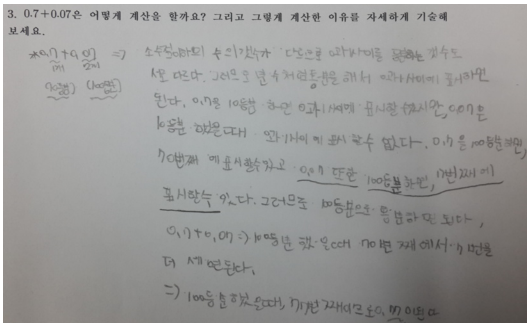

그림 Ⅳ-6. 소수의 덧셈에 대한 변형된 스키마 4

⑤ ⓘ, ⓙ, ⓚ의 내용을 바탕으로 한, 변형된 스키마 5

0.7+0.07을 자연수의 덧셈으로 만들어 계산을 할 경우, 먼저 소수의 통분과 같이 소수점 이하의 수의 개수가 많은 쪽을 기준으로 하여, 각각의 소수 0.7과 0.07에 100(0.07은 소수점 이하의 수의 개수가 2개 이므로)을 곱하여 자연수의 덧셈(70+7)으로 만든다. 그리고 70+7=77은 0.7과 0.07에 100을 곱하여 나온 결과이므로 곱한 100만큼 다시 100으로 나누어(77÷100) 값(0.77)을 구할 수 있다. 이 때, 0.7에 10을 곱하면 자연수 7이 되는 이유는 0과 1사이를 10등분 하면 1칸이 0.1이고 0.1이 10개모이면 1이 된다. 즉, 0.1에 10을 곱하면 1이 되므로 0.1의 7배인 0.7에 10을 곱한다는 것(0.1×7×10)은 0.1에 10을 곱한 것의 7배(0.1×10×7)가 되는 것과 같으므로 0.7×10=7이 된다.

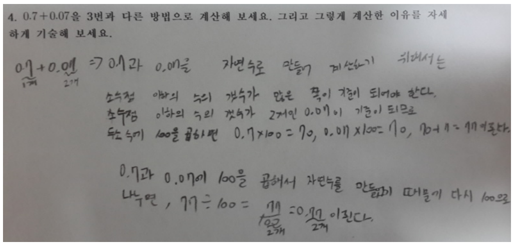

그림 Ⅳ-7. 소수의 덧셈에 대한 변형된 스키마 5

V. 결 론

본 연구는 2002년부터 시작된 1차적 개념과 스키마 그리고 변형된 스키마에 대한 연구 중에서 2014년부터 현재 까지 시행하고 있는 ‘초등학교 수학영재아들에게 1차적 개념이 미치는 영향’에 대한 연구로 소수의 덧셈에 대한 내용은 그동안 연구해온 자연수, 사칙연산, 약수, 배수, 공약수, 최대공약수, 공배수, 최소공배수, 혼합계산, 넓이, 분수, 분수의 덧셈, 분수의 곱셈, 분수의 나눗셈, 소수 다음으로 연결되는 연구이다.

본 연구자는 나눗셈, 분수, 소수의 1차적 개념과 각각의 변형된 1차적 개념을 중심으로 연구대상자(영재아)들을 가르쳐 왔다. 연구 초반에 연구대상자(영재아)들은 소수의 덧셈에 대한 문제를 풀지 않고 "왜", 나눗셈, 분수, 소수의 1차적 개념과 각각의 변형된 1차적 개념에 대해서 학습을 하는지에 대해 많은 질문을 하였다. 그 뿐만 아니라 소수의 덧셈을 빨리 풀 수 있는 방법에 대해서 배우기를 원했고 개념 또한 문제를 풀면서 설명해 주기를 원했다. 연구대상자(영재아)들은 이미 그러한 수업 방식에 많이 익숙해져 있어서 1차적 개념이나 변형된 1차적 개념을 바탕으로 하는 수업 방식에 대해서 생소해 할 뿐만 아니라 필요함 또한 느끼지 못하고 있었다. 논리적으로 사고하고 의사소통을 하기 위해서는 1차적 개념이 필요하다. 1차적 개념이 학습되었을 때, 이 1차적 개념을 바탕으로 논리적 사고를 하여 스스로 변형된 1차적 개념을 형성하고 새로운 변형된 스키마를 형성하여 다양하고 창의적인 문제해결 방법을 찾을 수 있기 때문이다. 즉, 그 과정을 학습자가 직접 경험하고 구성했을 때, 오랫동안 장기기억이 되고 필요할 때 언제든지 문제해결에 사용할 수 있는 것이다. 본 연구에서 연구대상자(영재아)들은 1차적 개념을 바탕으로 한 연구가 진행되면서 수학에 대한 태도가 달라지기 시작하였고, 한 가지 방법만을 외치고 멈추어 버리는 수학이 아닌, 계속해서 자신의 생각을 여러 가지 변형된 1차적 개념과 변형된 스키마의 구성으로 이야기하는 능동적인 수학이 되어 가는 것을 볼 수 있었다. 즉, 나눗셈, 분수, 소수의 1차적 개념과 각각의 변형된 1차적 개념을 바탕으로 소수의 덧셈에 대해서 연구 결과에서 보인 내용처럼 여러 가지 변형된 스키마를 형성 하여 다양한 방법으로 문제를 해결하는 것을 볼 수 있었다. 동시에 자신의 생각을 직접 자세하게 서술하면서 문제를 해결하기 때문에 연구대상자(영재아)들이 직접 작성한 연구 활동지는 본 연구자의 후속 연구인 서술형 문제 해결부분에 영향을 주고 있다. 연산 감각(Operation Sense)은 연산의 다양한 의미와 모델을 이해하는 능력, 특정 연산에 대한 다양한 실세계 상황을 인식하고 기술하는 능력, 기호와 형식적인 수학 언어의 의미를 이해하는 능력, 다양한 표현을 사용하는 능력, 연산들 사이의 관계를 이해하는 능력, 수를 구성 또는 분해하고 연산의 성질을 사용하는 능력, 수에 대한 연산의결과를 인식하는 능력 등을 말한다[21].

본 연구의 연구 대상자(영재아)들은 나눗셈, 분수, 소수의 1차적 개념과 각각의 변형된 1차적 개념을 연결하여 형성된 변형된 스키마를 바탕으로 소수의 덧셈을 분수의 덧셈, 또는 자연수의 덧셈으로 바꾸어 계산하거나, 소수점 이하의 수의 개수가 같은 경우와 다른 경우의 문제 해결 방법 등에 대해서 스스로 발견하고 설명하는 것을 볼 수 있었다. 학생들의 학습을 위해서 스키마의 재구성을 목표로 교사는 학생들 스스로 수학적 아이디어를 탐구하여 스키마의 재구성을 시도하도록 하는 방향으로 지도해야 한다[22]. 한편, NCTM[17][23]은 수학교육에 있어서 무엇보다도 우선순위에 두어야 할 것은 수학적 힘을 길러야하고, 수학은 추론하는 것이며 추론 없이 수학을 할 수 없다고 하면서 추론의 중요성을 강조하였다. 그러므로 1차적 개념에 대한 계속적이고 심도 깊은 연구는 무엇보다도 중요하다고 하겠다.

참 고 문 헌

[1] 김화수, “나눗셈의 1차적 개념이 초등학교 3학년 영재아의 분수의 나눗셈에 대한 개념구성과정에 미치는 영향에 대한 사례연구,” 영재교육연구, 제24권, 제3호, pp.339-358, 2014.

[2] 김화수, “수학의 1차적 개념이 초등학교 3학년 영재아의 수학적 개념구성과정에 미치는 영향에 대한 사례연구: 분수의 덧셈과 곱셈을 중심으로,” 영재교육연구, 제24권, 제1호, pp.17-43, 2014.

[3] A. J. Baroody and R. T. Coslick, Fostering children's mathematical power: an investigative approach, Lawrence erlbaum associates, 1998.

[4] V. A. Krutetskii, *The psychology of mathematical abilities in school children,* The University of Chicago Press, 1976.

[5] D. T. Johnson and B. T. Sher, Resource Guide to Mathematics Curriculum Materials for High-ability Learners in Grades K-8, William and Mary, 1997.

[6] D. T. Johnson, “Mathematical Curriculum for the Gifted,” In J. VanTassel-Baeka (Ed.), “Comprehensive Curriculum for Gifted Learners,” Needham Heights, MA: Allyn and Bacon, pp.231-261, 1993.

[7] L. J. Sheffield, *Developing Mathematically Promising Students, Reston,* VA: National Council of Teachers of Mathematics, 1999.

[8] 고정일외 백과사전 편찬부, *파스칼 세계대백과사전,* 서울: 동서문화사, 2004.

[9] R. R. Skemp, The Psychology of Learning Mathematics, Lawrence Erlbaum Associates, Inc. New Jersey, 1987. 황우형 역, *수학학습심리학,* 서울: 민음사, 1998.

[10] E. Fennema and T. Romberg, *Mathematics Classrooms that Understanding,* 2007, 이광호, 이현숙, 이경미, 윤혜영, 정미혜, 하수현 역, *이해를 촉진하는 수학교실,* 서울: 경문사, 2011.

[11] R. Hersh, *What is mathematics, really?,* New York: Oxford University Press, 1997.

[12] W. P. Thurston, *Letters from the editors,* Quantum, pp.6-7, 1990.

[13] J. Hiebert, “Mathematical, cognitive, and instructional analyses of decimal fractions,” pp.283-322, In G. Leinhardt et. al. (ed), Analysis of arithmetic for mathematics teaching, Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers, 1992.

[14] L. B. Resnick, P. Nesher, F. Leonard, M. Magone, S. Omanson, and I. Peled, “Conceptual bases of arithmetic errors: The case of decimal fractions,” Educational Studies in Mathematics, Vol.20, pp.8-27, 1989.

[15] R. E. Drexel, *Connecting common and decimal fraction concepts: a common fraction perspective. Doctoral Dissertation,* University of Wisconsin-Madision, 1997.

[16] K. Gravemeijer and F. van. Galen, “Fact and algorithms as products of students' own mathematical activity,” In J. Kilpatrick, W. G. Martin, & D. Schifter(Eds.), “A research companion to principlesand standards for school mathematics,” pp.114-122, Reston, VA: NCTM, 2003.

[17] NCTM, *Principles and standards for school mathematics,* Reston, VA: The Author, 2000.

[18] 송상헌, *수학 영재성 측정과 판별에 관한 연구,* 서울대학교, 박사학위논문, 1998.

[19] 라병소, *수학 학습에서의 관계적 이해를 위한 스키마 구성에 관한 연구,* 단국대학교, 박사학위논문, 1999.

[20] 김화수, “나눗셈과 분수의 1차적 개념이 소수의 관계적 이해에 미치는 영향에 대한 사례연구,” 한국학교수학회 논문집, 제18권, 제4호, pp.353-370, 2015.

[21] D. Huinker, “Examining dimensions of fraction operation sense,” In B. Litwiller & G. Bright

(Eds.), Making sense of fractions, ratios, and proportions(pp.72-78), Reston, VA: NCTM, 2002.

[22] 박만구, 박경선, “Skemp 이론에 따른 곱셈 놀이 활동이 수학학업성취도 및 수학적 태도에 미치는 효과,” 한국학교수학회논문집, 제12권, 제3호, pp.211-230, 2009.

[23] NCTM, *Curriculum standards for school mathematics,* Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 1989.

저 자 소 개

김 화 수(Hwa-Soo Kim) 정회원

- 2004년 8월 : 단국대학교 수학교육학과(교육학박사)
- 2011년 3월 ~ 현재 : 세한대학교 수학교육학과 교수

<관심분야> : 1차적 개념, 수학교수법, 스키마