

엇갈린 격자를 이용한 3차원 유한차분 시간영역 전자탐사 모델링

장한길로^{1,2} · 남명진^{1*} · 조성오¹ · 김희준³

¹세종대학교 에너지자원공학과

²세종대학교 그린에너지연구소

³부경대학교 에너지자원공학과

Three-dimensional Finite Difference Modeling of Time-domain Electromagnetic Method Using Staggered Grid

Hangilro Jang^{1,2}, Myung Jin Nam^{1*}, Sung Oh Cho¹, and Hee Joon Kim³

¹Department of Energy and Mineral Resources Engineering, Sejong University

²Green Energy Research Institute, Sejong University

³Department of Energy Resources Engineering, Pukyong National University

요약: 국내에서 시간영역 전자탐사(time-domain/transient electromagnetic, TEM) 자료의 해석은 1차원 알고리즘에 주로 의존하고 있는 실정이기 때문에 정밀한 해석을 위하여 3차원 모델링 및 역산 해석 프로그램의 개발이 필요한 상황이다. 이 연구에서는 엇갈린 격자를 이용한 시간영역 유한차분(staggered-grid finite-difference time-domain, FDTD)법에 기초하여 3차원 TEM 반응 모델링 알고리즘을 개발하였다. 시간영역 전자탐사의 모델링을 위해 맥스웰 방정식을 명시적 중앙점 FDTD 법을 이용하여 이산화하였으며 수치 안정성을 높이기 위해 가상 변위전류항을 도입하였다. 일반적으로 많이 활용되는 소형 코일 송신원을 수치적으로 구현하여 균질 반무한 공간에서의 해석해와 비교 검증하고 3차원 이상체에 대한 반응을 분석하였다. 이 연구에서 개발된 모델링 프로그램은 향후 TEM 전자탐사 자료의 정밀 해석에 기초가 될 것으로 기대한다.

주요어: 시간영역 전자탐사, 엇갈린 격자, 유한차분법, 소형 코일, 가상 변위전류

Abstract: Interpretation of time-domain electromagnetic (TEM) data has been made mostly based on one-dimensional (1-D) inversion scheme in Korea. A proper interpretation of TEM data should employ 3-D TEM forward and inverse modeling algorithms. This study developed a 3-D TEM modeling algorithm using a finite difference time-domain (FDTD) method with staggered grid. In numerically solving Maxwell equations, fictitious displacement current is included based on an explicit FDTD method using a central difference approximation scheme. The developed modeling algorithm simulated a small-coil source configuration to be verified against analytic solutions for homogeneous half-space models. Further, TEM responses for a 3-D anomaly are modeled and analyzed. We expect that it will contribute greatly to the precise interpretation of TEM data.

Keywords: Time-domain electromagnetic survey, Staggered grid, Finite-difference method, Small coil, Fictitious displacement current

서 론

광물탐사를 위해 처음 적용된 시간영역 전자탐사(time-

domain/transient electromagnetic survey; TEM survey)는 현재 지하수, 석유, 오염대 파악과 공학적인 접근에 이르기까지 광범위한 영역에서 다양한 탐사배열로 수행되고 있다(Cho, 2006). 탐사가 간편하다는 장점 이외에도, TEM법은 전기전도도가 큰 매질에서의 전기전도도 변화에도 민감하여 전기비저항법으로 탐사하기 어려운 전도성 층들 사이의 구분도 쉽게 할 수 있는 장점이 있다(Albouy *et al.*, 2001).

국내에서는 1982년 호주의 SIROTEM장비를 도입하면서 본격적으로 TEM 연구가 시작되었다. 육상 TEM법에서는 판상 광체에 대한 스케일 모델링(Lim and Hyun, 1984), 기초과일 내 철근 결합탐지 실험(Lee and Kim, 1993), 해수 유동 파악

Received: 23 March 2017; Revised: 13 June 2017;

Accepted: 13 June 2017

*Corresponding author

E-mail: nmj1203@gmail.com/nmj1203@sejong.ac.kr

Address: 209 Neungdong-ro, Gwangjin-gu, Seoul 143-747, Korea

©2017, Korean Society of Earth and Exploration Geophysicists

This is an Open Access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution Non-Commercial License (<http://creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/>) which permits unrestricted non-commercial use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.

(Hwang *et al.*, 2001) 등 다양한 연구가 있었다. 한편 2000년 이후 폭발적인 관심을 받은 해양 전자탐사에서는 수직 전기쌍극자 TEM 시스템을 이용한 해저 저류층의 탐지연구, 중앙루프 시스템을 이용한 해저 열수광상 탐지 가능성(Jang *et al.*, 2013; Jang and Kim, 2015) 연구 등이 국내에서 발표되었다. 최근 항공전자탐사에서는 육상 전기송신원을 이용한 항공 시간영역 전자탐사(grounded electrical-source airborne transient electromagnetic, GREATEM) 시스템에 기초한 연구들(Cho *et al.*, 2015; 2016)도 활발하게 진행되고 있다.

국내에서 TEM법의 수치해석 프로그램 개발은 연산자분리에 의한 유한차분 수치모델링과 등가전류를 이용한 단순역산 연구(Seo and Hyun, 1982; Lim and Hyun, 1988)가 이루어졌으며, 대형루프배열 송신에 의한 1차원 구조에서의 반응 모델링과 역산 연구도 있었다(Jang *et al.*, 2013; Cho, 2014; Cho *et al.*, 2015, Jang *et al.*, 2016). 한편 푸리에변환 기법을 이용한 유한요소법 2차원과 3차원 모델링 및 역산 알고리즘이 개발되었는데(Cho, 2014), 이는 주파수영역 해로부터 시간영역의 해를 얻기 위해 광대역의 주파수영역 반응을 직접 계산해야 하기 때문에 계산 비용이 많이 든다는 한계가 있었다.

이 논문에서는 엇갈린 격자를 이용한 시간영역 유한차분(staggered-grid finite-difference time-domain, FDTD)법을 이용한 3차원 TEM 반응 모델링 알고리즘을 개발한다. 먼저 명시적(explicit) 중앙점(mid-point) FDTD법에 기초하여 맥스웰 방정식의 차분식을 구성함에 있어 가상 변위전류항을 도입하여 수치안정성을 확보하였다. 송신원으로서 일반적으로 점 송신원으로 가정할 수 있는 소형 코일을 고려하였다. 개발한 알고리즘을 이용하여 균질 반무한 매질에서의 수치 모델링을 수행하고 해석해와 비교함으로써 알고리즘을 검증하고 3차원 전도성 이상체 모델에 적용하여 소형코일 송신원에 대한 반응을 분석하였다.

모델링 이론

TEM 탐사가 기초하고 있는 준정적 근사영역에서 선형 등방성 매질의 시간영역 맥스웰 방정식은 다음과 같다(Ward and Hohmann, 1988).

$$\nabla \times \mathbf{e} = -\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} - \mu \frac{\partial \mathbf{m}_s}{\partial t}, \quad (1)$$

$$\nabla \times \mathbf{h} = \sigma \mathbf{e} + \mathbf{j}_s, \quad (2)$$

$$\mathbf{b} = \mu \mathbf{h}, \quad (3)$$

여기서 \mathbf{e} (V/m)는 전기장, \mathbf{h} (A/m)는 자기장, μ (H/m)는 투자율(magnetic permeability), σ (S/m)는 전기전도도, \mathbf{j}_s 와 \mathbf{m}_s 는 각각 송신원의 전류밀도와 자류밀도이다. 일반적으로 전자탐

사나 지표투과레이더 탐사에서 투자율은 진공의 값($\mu_0 = 4 \times 10^{-7}$ H/m)과 동일하다고 가정하므로, TEM 수치모델링을 다루고 있는 이 연구에서도 $\mu = \mu_0$ 로 가정한다.

차분식 유도

식 (1) ~ (3)을 엇갈린 격자에 기초하여 명시적 FDTD법으로 이산화할 경우, 식 (2)에서 전기장의 시간 미분이 존재하지 않기 때문에 수치적으로 불안정하다는 단점이 있다(Birtwistle, 1968; Chew, 1990). 이를 극복하기 위하여, 식 (2)에 가상의 유전율(γ) 값을 이용한 전기장의 시간미분항을 도입한 아래 식을 이용함으로써 수치 안정성을 확보할 수 있다(Oristaglio and Hohmann, 1984; Wang and Hohmann, 1993).

$$\nabla \times \mathbf{h} = \gamma \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial t} + \sigma \mathbf{e} + \mathbf{j}_s. \quad (4)$$

3차원 FDTD TEM 모델링 알고리즘 중 잘 알려진 Wang and Hohmann (1993), Commer and Newman (2004), Li *et al.* (2014)는 모두 위에서 언급한 가상의 유전율을 도입한 중앙점 차분법에 기초하여서 모델링을 수행하였다. 이 연구에서도 식 (1)과 (4)를 수치적으로 계산하기 위한 엇갈린 격자를 이용한 공간 이산화에서 전기장은 셀의 모서리 중앙에 정의하며 자기장은 셀의 면 중심에 각각 정의한 뒤(Fig. 1; Yee, 1966), 중앙점 차분법을 이용하여 이산화 방정식을 구성하였다(Du Fort and Frankel, 1953; Wang and Hohmann, 1993; Haber, 2015). 전체 차분식에 대해서는 부록에 자세히 설명하였다.

송신원 구현

이 연구에서는 소형코일 송신원(Fig. 2(a))을 이용한 루프-루프 탐사를 위한 수치 모델링을 개발하고 해석해와 비교검증을 위한 수치 실험을 수행하였다. 소형코일 송신원을 이용하는 경우 탐사 영역 대비 송신코일의 크기가 매우 작으므로 송신코일의 전류 흐름을 고려하지 않고 송신 코일 중심에 자기쌍극자 송신원이 있는 경우로 수치 모델링을 수행할 수 있다. 즉, 매우 작은 면적의 쉘드 처리된 코일시스템 내부의 송신 유도

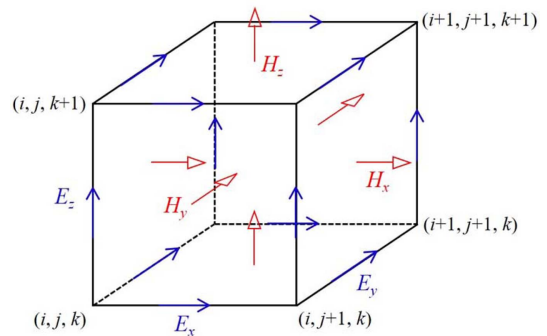


Fig. 1. Yee (1966) cell geometry of electric and magnetic field vectors staggered in a 3-D Cartesian system of coordinates.

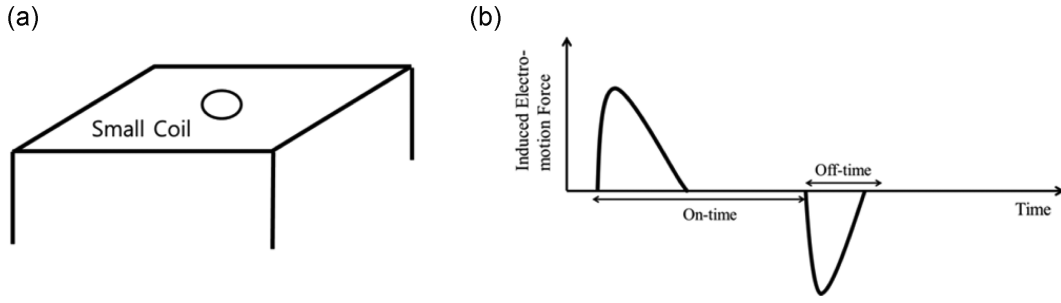


Fig. 2. The TEM transmitter for (a) the small loop-loop survey and the schematic diagram for (b) the induced electromagnetic force, respectively.

기전력은 이론적으로 식 (1)의 자류밀도로 발생된 점 자기쌍극자로 근사할 수 있다(Fig. 2(b)).

송신파형의 수치적 구현을 위하여 증가와 감소램프의 파형이 서로 대칭이라고 가정하여, 코일시스템 내부의 송신 유도기전력의 파형함수 $u(t)$ 는 시간에 따라 다음과 같은 식으로 근사된다고 가정하였다. 즉,

$$m_{coil} = u(t) = \begin{cases} [\pi/2\sin(\pi t/t_{on-ramp})/t_{on-ramp}], & 0 \leq t \leq t_{on-ramp} \\ 0, & t_{on-ramp} \leq t \leq t_{on} \\ -[\pi/2\sin(\pi(t-t_{on})/t_{off-ramp})/t_{off-ramp}], & t_{on} \leq t \leq t_{off-ramp} \end{cases}, (5)$$

이때 $t_{on-ramp}$ 는 증가램프까지의 시간, t_{on} 는 송신 유도기전력의 마지막 발생시간 그리고 $t_{off-ramp}$ 는 감소램프까지의 시간이다.

식 (5)을 이용하여 코일시스템 내부의 유도기전력을 구현하면 증가램프와 감소램프에서의 파형 값은 서로 반대이지만 근적으로 동일한 파형이다(Fig. 3). 그러므로, 증가램프에서의 유도기전력 반응과(step-on 반응), 감소램프에서의 유도기전력에 의한 반응(step-off 반응)은 방향만 반대일 뿐 동일한 반응 양상을 보이게 된다.

안정화와 경계 조건

FDTD 문제에서는 Courant-Friedrichs-Lewy (CFL)이 가장 기본적인 안정 조건이다(Taflove and Hagness, 2005). 이 연구에서 이용한 중앙점 FDTD 모델링에서의 해는 CFL 조건 하에서 항상 안정적으로 거동한다(Oristaglio and Hohmann, 1984; Adhidjaja and Hohmann, 1989). 3차원 문제에서 CFL 조건은 아래와 같다(Taflove and Hagness, 2005; Wang and Hohmann, 1993; Endo and Noguchi, 2002).

$$\Delta t = \alpha \left(\frac{\mu \sigma_{min} t}{6} \right)^{1/2} \Delta d_{min}, (6)$$

여기서 α 는 정확도 변수, σ_{min} 와 Δd_{min} 는 각각 가장 작은 전기전도도와 셀 크기이다. γ 가 아래와 같은 조건을 만족할 때 현시적 중앙점법을 이용하면 항상 안정적이다(Wang and Hohmann, 1993; Endo and Noguchi, 2002).

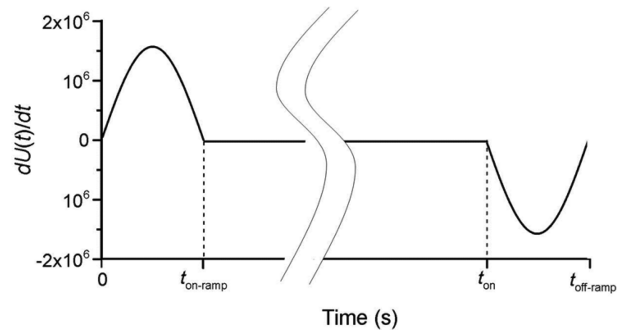


Fig. 3. The $U(t)$ which is implemented as a source waveform for loop-loop system.

$$\gamma \geq \frac{3}{\mu} \left(\frac{\Delta t}{\Delta d_{min}} \right)^2, (7)$$

γ 와 Δt 를 조정하여 계산 효율 및 정확도를 조절할 수 있다(단 확산 현상을 유지할 수 있는 범위를 벗어나지 않도록 주의해야 한다) (Chew, 1990).

실제 지층의 유전율을 결정하여 초기시간대에서 정확한 TEM 반응을 계산할 수도 있지만 이와 같이 할 경우 계산시간이 커진다는 단점이 있다. 예를 들면, 지층의 유전율을 석회암의 값인 7로 설정하면 최소 격자 간격이 0.5 m 일 때 최대 Δt 는 CFL 조건 하에서 2.55×10^{-9} s이다. 1 ms의 TEM 반응을 계산하기 위해서는 약 392,157번의 반복계산을 필요로 한다(Li et al., 2014). 적절한 γ 의 결정은 시간비용을 줄이는 데 매우 중요하다.

전체 모델영역의 경계조건으로는 Dirichlet 경계 조건을 이용하였다. 즉, 관심계산 영역의 외부에서는 공간 격자 크기를 크게 할 수 있으므로, 모델링 전체 계산 영역을 충분히 크게 하고 계산 영역 경계에서의 전기장 값이 0으로 가정하였다.

알고리즘의 검증

소형 코일 송신원에 대한 알고리즘을 검증하기 위해서 해석

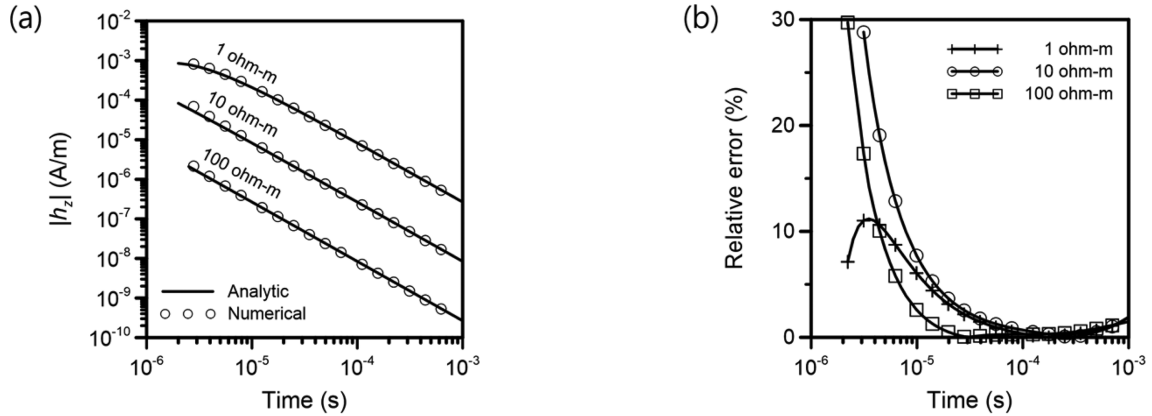


Fig. 4. A comparison between 3D numerical (circles) and analytic (solid line) solutions for the homogeneous half-space models. The decay curves of the magnetic fields (a) and the relative errors of the numerical and analytic solutions (b).

해가 존재하는 균질 반무한 매질에 대하여 모델링을 수행한 뒤 해석해와 비교하고자 한다. 먼저 해석해의 경우, 반무한 매질에 대한 소형코일 송신원의 시간영역 자기장 반응은 다음과 같이 유도된다(Spies and Frischknecht, 1988).

$$h_z = \frac{m}{4\pi r^3} \left[\frac{9}{2\theta^2 r^2} \text{erf}(\theta r) - \text{erf}(\theta r) - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{9}{\theta r} + 4\theta r \right) e^{-\theta^2 r^2} \right], \quad (8)$$

여기서 m 은 자기쌍극자 모멘트, r 은 송수신거리, erf 는 오차 함수, $\theta = \left(\frac{\sigma \mu_0}{4t} \right)^{1/2}$ 이다.

이 식을 이용하여 1, 10, 100 ohm-m 반무한 모델에 대해 해석해를 계산한다. 이때 모델의 공기층 전기전도도는 10^{-4} S/m로 설정하였다.

위의 해석해와 비교하기 위해 이 연구에서 개발 모델링 알고리즘을 동일한 반무한 모델에 대해 적용하여 수치해를 계산하였다. 수치해 계산에 있어 α 는 0.079, 초기 t 는 10^{-8} s, 관심 영역에서의 $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 1$ m로 하고 관심 영역을 벗어나면서 격자 크기가 지속적으로 커지도록 구성하였다.

수치해를 송신으로부터 3 m 떨어진 위치에서 해석해와 비교해보면(Fig. 4(a)), 고려한 3개의 전기비저항 매질에 대해서 수치 모델링 결과는 모두 약 10^{-5} s 보다 이른 시간대에서 곡선이 잘 일치하지 않는다. 이는 이 연구에서 개발한 모델링 결과에서는 램프시간을 10^{-6} s로 설정한 반면, 해석해는 램프를 고려하지 않고 있기 때문이다. 한편 램프효과와 거의 무관한 약 10^{-4} s 이상의 시간대의 상대오차를 살펴보면 모든 전기비저항 매질에서 오차값이 1% 이하이므로 수치해가 정확함을 알 수 있다(Fig. 4(b)).

3차원 전도성 이상체 반응

3차원 모델에 대한 적용성을 검토하기 위해 직육면체 형태

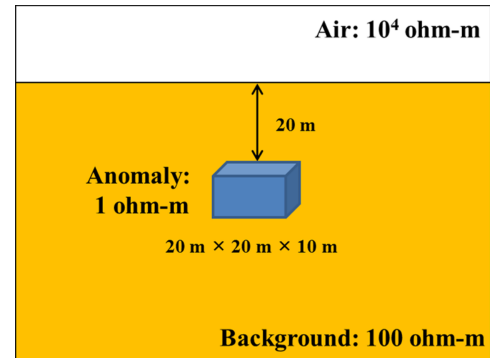


Fig. 5. A 3-D conductive cuboid anomaly model. The conductive cuboid of 20 m × 20 m × 10 m is buried 20 m below the surface. The resistivities of the background and anomalous body are 100 and 1 ohm-m, respectively.

의 3차원 전도성 이상체 모델에 대한 송수신 간격 3 m인 루프 루프 TEM 탐사 반응을 분석하고자 한다. 전도성 이상체 1 ohm-m로 100 ohm-m의 반무한 매질 내에 크기가 20 m × 20 m × 10 m이며 심도 20 m 위치하며(Fig. 5), 공기 층의 전기전도도는 10^{-4} S/m, α 는 0.079, 초기 t 는 10^{-8} s로 하였다. 모델 영역의 이산화에 있어서도 관심 영역에서는 $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 1$ m 하고 관심 영역 외에서는 격자를 점차적으로 커지도록 격자를 구성하였다. 이때 전체 각 방향 이산화 격자 개수는 $100 \times 100 \times 100$ 이다.

송수신 거리가 3 m인 루프-루프 배열을 이용하여 모델에 대한 시간영역 수직자기장 반응과 그 반응을 배경매질로 정규화시켜 반응(Fig. 6)을 분석하면, 전도성 이상체의 반응은 10^{-6} s ~ 10^{-4} s에서만 나타나며(즉, 이 시간대 이후 시간부터는 TEM 반응은 이상체가 없는 배경매질 반응과 일치한다), 이상체 반응에 대한 최대 진폭 값은 1.4×10^{-5} s에서 배경매질과 1.9배 정도로 나타난다(최대진폭의 시간을 기준으로 log-log 그래프를 구성해 보면(Fig. 6 그래프 내 왼쪽 아래) 반응양상을 더욱 뚜렷하게 볼 수 있다).

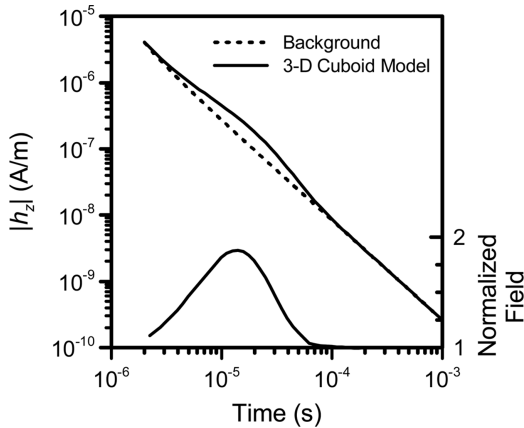


Fig. 6. Transient magnetic responses (upper curves) and normalized fields (lower curves) of the loop-loop system for the conductive cuboid anomaly model shown in Fig. 5. The solid and dashed lines indicate TEM responses for the models with and without the conductive cuboid body, respectively.

$10^{-6} \text{ s} \sim 10^{-4} \text{ s}$ 의 시간대에서 여섯 개의 시간 채널($2 \times 10^{-6} \text{ s}$, $5 \times 10^{-6} \text{ s}$, $1 \times 10^{-5} \text{ s}$, $2 \times 10^{-5} \text{ s}$, $5 \times 10^{-5} \text{ s}$, $1 \times 10^{-4} \text{ s}$)을 선정하여 전도체 중심으로부터 송신원의 위치에 따른 자기장 반응(Fig. 7(a))을 분석해 보면, 6개의 시간 채널 중, $5 \times 10^{-5} \text{ s}$ 부터 전도체의 반응을 미약하게 인지할 수 있기 시작하여 $2 \times 10^{-5} \text{ s}$ 에서 송신거리에 따른 진폭변화폭이 가장 컸다. 이에 반해 송신거리에 따른 정규화 반응을 살펴보면(Fig. 7(b)), 모든 채널에서 전도체 중심으로부터 1 m 떨어진 위치에서 정규화 값이 최대(시간 채널 별 각각 1.02, 1.23, 1.66, 1.88, 1.44, 1.02 m)이며, 송신원이 전도체의 가장자리로부터 전도체 수평길이의 절반(10 m)부터는 전도체의 반응을 거의 인지할 수 없다 것을 알 수 있다.

3 m 송신거리를 이용할 시 20 m 심도에 위치한 1 ohm-m 전도성 이상체의 경우 약 10^{-6} s 부터 반응이 시작되기 때문

에 일반적인 TEM 탐사기기의 민감도 한계가 약 10^{-6} s 인 것을 감안할 때 약 10 m 이하 심도의 이상체는 탐지가 어려울 것이다. 이상체와의 거리에 따른 TEM 반응을 살펴보면 이상체의 반응시작은 송신원이 이상체 가장자리로부터 대략 이상체의 수평길이 절반(이상체의 수평길이가 20 m인 경우 10 m)이 떨어진 지점부터 시작된다. 반면에 이상체의 중심은 배경매질 대비 최대의 반응차이를 보이기 때문에 이상체 중심의 위치는 쉽게 인지할 수 있다.

결론

이 연구에서는 엇갈린 격자에 기초한 FDTD법을 이용하여 3차원 TEM 반응 모델링 프로그램을 개발하였다. TEM 모델링을 위해 준정적 근사 맥스웰 방정식을 현시적 중앙차분법을 이용하여 이산화하였으며 수치 안정성을 높이기 위해 가상 변위전류항을 도입하였다. 알고리즘의 검증은 균질 반무한 매질에 대한 해석해와 비교 시 약 1% 오차 이내로 나타나는 것으로 확인하였다. 개발된 알고리즘을 이용하여 균질 반무한 매질 내의 3차원 전도성 이상체에 대한 TEM 반응을 분석하였다. 이 연구에서 개발한 알고리즘에서는 송신원으로 소형코일 시스템만을 구현하였으나, 향후 연구에서는 대형루프와 전기쌍극자 송신원 등도 구현할 수 있도록 모델링 알고리즘을 발전시키고 이에 기초하여 3차원 TEM 역산 알고리즘도 개발하고자 한다.

감사의 글

이 연구는 국토교통부/국토교통과학기술진흥원 건설기술연구사업의 연구비지원(17SCIP-B108153-03)과 산업통상자원부의 재원으로 한국에너지기술평가원(KETEP)의 지원을 받아 수행한 연구과제입니다(No. 20152510101880).

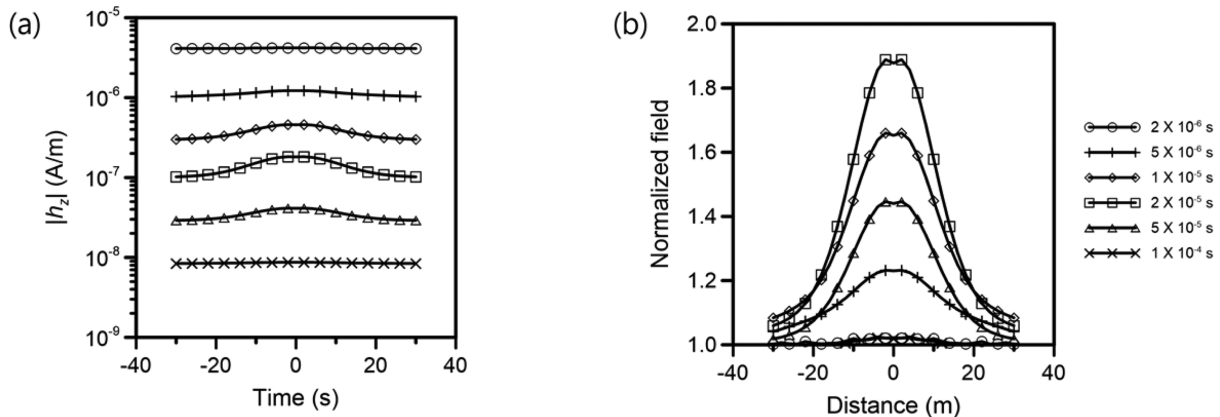


Fig. 7. Transient magnetic responses (a) and normalized fields (b) as a function of source distance from the conductive body center of the loop-loop system for the conductive cuboid anomaly model shown in Fig. 5. The transmitter is located at the center of the conductive anomaly in y direction and six time channels are considered.

References

- Adhidjaja, J. I., and Hohmann, G. H., 1989, A finite-difference algorithm for the transient electromagnetic response of a three-dimensional body, *Geophys. J. Int.*, **98**, 233-242.
- Albouy, Y., Andrieux, P., Rakotondrasoa, G., Ritz, M., Descloitres, M., Join, J., and Rasolomanana, E., 2001, Mapping coastal aquifers by joint inversion of DC and TEM soundings-Three case histories, *Groundwater*, **39**, 87-97.
- Birtwistle, G. M., 1968, The explicit solution of the equation of heat conduction, *Comput. J.*, **11**, 317-323.
- Chew, W. C., 1990, *Waves and fields in inhomogeneous media*, Wiley-IEEE Press.
- Cho, D. H., 2006, Electromagnetic survey in Korea, *Econ. Environ. Geol.*, **39**, 427-440 (in Korean with English abstract).
- Cho, I. K., 2014, *Development of three-dimensional integrated analysis module for time-domain electromagnetic survey*, Research Report, Korea Resources Corporation (in Korean).
- Cho, I. K., Kim, R. Y., and Yi, M. Y., 2015, One-dimensional modeling of airborne transient electromagnetic using a long Grounded-wire Source, *Geophys. and Geophys. Explor.*, **18**, 216-222 (in Korean with English abstract).
- Cho, I. K., Jang, J. H., Yi, M. Y., and Rim, H. R., 2016, Laterally Constrained Inversion of GREATEM data, *Geophys. and Geophys. Explor.*, **20**, 33-42 (in Korean with English abstract).
- Cho, I. K., Lee, K. S., Kim, Y. J., and Kim, R. Y., 2016, Resistivity survey using long electrodes, *Geophys. and Geophys. Explor.*, **19**, 45-50 (in Korean with English abstract).
- Commer, M., and Newman, G., 2004, A parallel finite-difference approach for 3D transient electromagnetic modeling with galvanic sources, *Geophysics*, **69**, 1192-1202.
- Du Fort, E. C., and Frankel, S. P., 1953, Stability conditions in the numerical treatment of parabolic differential equations, *Math. Comput.*, **7**, 135-152.
- Endo, M., and Noguchi, K., 2002, Three-dimensional modeling considering the topography for the case of the time-domain electromagnetic method, in Zhdanov, M.S., and Wannamaker, P.E., ed., *Three-Dimensional Electromagnetics: Proceedings of the Second International Symposium*, Elsevier, 85-107.
- Everett, M. E., 2009, Transient electromagnetic response of a loop source over a rough geological medium, *Geophys. J. Int.*, **177**, 421-429.
- Haber, E., 2015, *Computational methods in geophysical electromagnetics*, Society for Industrial Applied Mathematics.
- Hwang, H. S., Moon, C. K., Lee, S. K., and Lee, T. S., 2001, Determination of an underground seawater flow using a TEM decay curve, *Econ. Environ. Geol.*, **34**, 499-506 (in Korean with English abstract).
- Jang, H., Jang, H., Lee, K. H., and Kim, H. J., 2013, Step-off, vertical electromagnetic responses of a deep resistivity layer buried in marine sediments, *J. Geophys. Eng.*, **10**, 025011.
- Jang, H., and Kim, H. J., 2015, Mapping deep-sea hydrothermal deposits with in-loop transient electromagnetic surveys: Insights from 1D forward and inverse modeling, *J. Appl. Geophys.*, **123**, 170-176.
- Jang, H., Kim, H. J., and Nam, M. J., 2016, In-loop transient electromagnetic responses with induced polarization effects of deep-sea hydrothermal deposits, *IEEE Trans. Geosci. Remote Sens.*, **54**, 7272-7278.
- Lee, S. K., and Kim, K. E., 1993, Test for detection of steel cage defects in concrete pile substructure with transient electromagnetic logging, *Butsuri-Tansa*, **46**, 183-189 (in Japanese with English abstract).
- Li, S., Sun, H., Lu, X., and Li, X., 2014, Three-dimensional modeling of transient electromagnetic responses of water-bearing structures in front of a tunnel face, *J. Environ. Eng. Geoph.*, **19**, 13-32.
- Lim, H. R., and Hyun, B. G., 1988, Simple inversion of TEM data using equivalent current, *J. Korean Inst. Mineral Mining Eng.*, **25**, 281-293 (in Korean).
- Lim, M. T., and Hyun, B. G., 1984, An experimental study on TEM method for a thin plate ore body, *J. Korean Inst. Mineral Mining J. Korean Inst. Mineral Mining Eng.*, **21**, 185-196 (in Korean).
- Nam, M. J., and Kim, H. J., 2010, 3D MT inversion using an edge finite element modeling algorithm, *Geosy. Eng.*, **13**, 43-52.
- Oristaglio, M. L., and Hohmann, G. W., 1984, Diffusion of electromagnetic fields into a two-dimensional earth: A finite-difference approach, *Geophysics*, **49**, 870-894.
- Sasaki, Y., 1999, Three-dimensional frequency-domain electromagnetic modeling using the finite-difference method, *Butsuri-Tansa*, **52**, 421-431 (in Japanese with English abstract).
- Seo, S. Y., and Hyun, B. G., 1982, Finite difference modeling of low-frequency transient electromagnetic field, *J. Korean Inst. Mineral Mining Eng.*, **19**, 227-232 (in Korean).
- Taflove, A., and Hagness, S. C., 2005, *Computational electrodynamics: the finite-difference time-domain method*, Artech House.
- Ward, S. H., and Hohmann, G. W., 1988, Electromagnetic theory for geophysical applications, in Nabighian, M. N., ed., *Electromagnetic Methods in Applied Geophysics*, Vol. I, Soc. Expl. Geophys., 131-311.
- Wang, T., and Hohmann, G. W., 1993, A finite-difference, time-domain solution for three-dimensional electromagnetic modeling, *Geophysics*, **58**, 797-809.
- Yee, K. S., 1966, Numerical solution of initial boundary problems involving Maxwell's equations in isotropic media, *IEEE Trans. Antennas Propag.*, **AP-14**, 302-309.

부록. 중앙점 FDTD법을 이용한 시간영역 맥스웰 방정식 이산화

미분방정식을 FD법으로 구하는 가장 대표적인 방법은 forward-Euler, backward-Euler 그리고 중앙점법이 있는데 (Haber, 2015), 식 (4)를 이 세 가지 방법으로 각각 순서대로 유도하면 다음과 같다.

$$\gamma \frac{\mathbf{e}^{n+1} - \mathbf{e}^n}{\Delta t} = -\sigma \mathbf{e}^n + \alpha, \quad (\text{A1})$$

$$\gamma \frac{\mathbf{e}^{n+1} - \mathbf{e}^n}{\Delta t} = -\sigma \mathbf{e}^{n+1} + \alpha, \quad (\text{A2})$$

$$\gamma \frac{\mathbf{e}^{n+1} - \mathbf{e}^n}{\Delta t} = -\sigma \frac{\mathbf{e}^n + \mathbf{e}^{n+1}}{2} + \alpha, \quad (\text{A3})$$

여기서 $\alpha = \nabla \times \mathbf{h} - \mathbf{j}_s$. 식 (A1) ~ (A3)를 $n+1$ 시간의 갱신하고자 하는 전기장에 대해서 정리하면 아래와 같다.

$$\mathbf{e}^{n+1} = \left(1 - \frac{\sigma \Delta t}{\gamma}\right) \mathbf{e}^n + \frac{\Delta t}{\gamma} \alpha. \quad (\text{A4})$$

$$\mathbf{e}^{n+1} = \left(1 - \frac{\sigma \Delta t}{\gamma}\right) \mathbf{e}^n + \frac{\Delta t}{\gamma} \alpha. \quad (\text{A5})$$

$$\mathbf{e}^{n+1} = \frac{2\gamma - \sigma \Delta t}{2\gamma + \sigma \Delta t} \mathbf{e}^n + \frac{2\Delta t}{2\gamma + \sigma \Delta t} \alpha. \quad (\text{A6})$$

Forward-Euler법은 일반적으로 매우 작은 Δt (step size)에 대해서만 안정적이므로 현실적이지 않으며 backward-Euler법은 무조건적으로 안정적이며 Δt 에 대하여 일반적인 경우 제한이 없지만 암시적 해법(implicit method)이기 때문에 행렬을 구성하고 푸는 추가적인 과정을 필요로 한다. 중앙점법은 무조건적으로 안정적이면서도 나머지 두 방법이 1차 정확도(first-order accuracy)를 지니는 반면에 2차 정확도(second-order accuracy)를 지니는 장점을 가진다. 하지만 식 (4)를 풀 때 일정 크기 이상의 Δt 를 이용하는 경우 모든 시간 간격에서 결과 값이 진동하는 단점이 확인되었다(Haber, 2015).

중앙점에 기초하여 x, y, z 의 3성분의 각 전기장과 자기장을 각각 유도하면 아래와 같다.

$$\left(\frac{\partial e_z}{\partial y} - \frac{\partial e_y}{\partial z}\right) = -\frac{\partial b_x}{\partial t} - \mu \frac{\partial m_{s,x}}{\partial t}, \quad (\text{A7})$$

$$\left(\frac{\partial e_x}{\partial z} - \frac{\partial e_z}{\partial x}\right) = -\frac{\partial b_y}{\partial t} - \mu \frac{\partial m_{s,y}}{\partial t}, \quad (\text{A8})$$

$$\left(\frac{\partial e_y}{\partial x} - \frac{\partial e_x}{\partial y}\right) = -\frac{\partial b_z}{\partial t} - \mu \frac{\partial m_{s,z}}{\partial t}, \quad (\text{A9})$$

$$\left(\frac{\partial h_x}{\partial y} - \frac{\partial h_y}{\partial x}\right) = \gamma \frac{\partial e_x}{\partial t} + \sigma e_x + j_{s,x}, \quad (\text{A10})$$

$$\left(\frac{\partial h_x}{\partial z} - \frac{\partial h_z}{\partial x}\right) = \gamma \frac{\partial e_y}{\partial t} + \sigma e_y + j_{s,y}, \quad (\text{A11})$$

$$\left(\frac{\partial h_y}{\partial x} - \frac{\partial h_x}{\partial y}\right) = \gamma \frac{\partial e_z}{\partial t} + \sigma e_z + j_{s,z}. \quad (\text{A12})$$

$$b_x^{n+\frac{1}{2}}\left(i, j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}\right) = b_x^{n-\frac{1}{2}}\left(i, j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}\right) - \frac{\Delta t_{n-1} + \Delta t_n}{2} \times \left[\frac{e_z^n\left(i, j + 1, k + \frac{1}{2}\right) - e_z^n\left(i, j, k + \frac{1}{2}\right)}{\Delta y_j} - \frac{e_y^n\left(i, j + \frac{1}{2}, k + 1\right) - e_y^n\left(i, j + \frac{1}{2}, k\right)}{\Delta z_k} \right] + \mu m_{s,x}^n, \quad (\text{A13})$$

$$b_y^{n+\frac{1}{2}}\left(i + \frac{1}{2}, j, k + \frac{1}{2}\right) = b_y^{n-\frac{1}{2}}\left(i + \frac{1}{2}, j, k + \frac{1}{2}\right) - \frac{\Delta t_{n-1} + \Delta t_n}{2} \times \left[\frac{e_x^n\left(i + \frac{1}{2}, j, k + 1\right) - e_x^n\left(i + \frac{1}{2}, j, k\right)}{\Delta z_k} - \frac{e_z^n\left(i + 1, j, k + \frac{1}{2}\right) - e_z^n\left(i, j, k + \frac{1}{2}\right)}{\Delta x_i} \right] + \mu m_{s,y}^n, \quad (\text{A14})$$

$$b_z^{n+\frac{1}{2}}\left(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}, k\right) = b_z^{n-\frac{1}{2}}\left(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}, k\right) - \frac{\Delta t_{n-1} + \Delta t_n}{2} \times \left[\frac{e_y^n\left(i + 1, j + \frac{1}{2}, k\right) - e_y^n\left(i, j + \frac{1}{2}, k\right)}{\Delta x_i} - \frac{e_x^n\left(i + \frac{1}{2}, j + 1, k\right) - e_x^n\left(i + \frac{1}{2}, j, k\right)}{\Delta y_j} \right] + \mu m_{s,z}^n. \quad (\text{A15})$$

$$e_x^{n+1}\left(i + \frac{1}{2}, j, k\right) = \frac{2\gamma - \Delta t_n \bar{\sigma}\left(i + \frac{1}{2}, j, k\right)}{2\gamma + \Delta t_n \bar{\sigma}\left(i + \frac{1}{2}, j, k\right)}$$

$$e_x^n\left(i + \frac{1}{2}, j, k\right) + \frac{2\Delta t_n}{2\gamma + \Delta t_n \bar{\sigma}\left(i + \frac{1}{2}, j, k\right)}$$

$$\left[\frac{h_z^{n+\frac{1}{2}}\left(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}, k\right) - h_z^{n+\frac{1}{2}}\left(i + \frac{1}{2}, j - \frac{1}{2}, k\right)}{\Delta \bar{y}_j} - \frac{h_y^{n+\frac{1}{2}}\left(i + \frac{1}{2}, j, k + \frac{1}{2}\right) - h_y^{n+\frac{1}{2}}\left(i + \frac{1}{2}, j, k - \frac{1}{2}\right)}{\Delta \bar{z}_j} \right] - j_{s,x}^{n+\frac{1}{2}}, \quad (\text{A16})$$

$$e_y^{n+1}\left(i, j + \frac{1}{2}, k\right) = \frac{2\gamma - \Delta t_n \bar{\sigma}\left(i, j + \frac{1}{2}, k\right)}{2\gamma + \Delta t_n \bar{\sigma}\left(i, j + \frac{1}{2}, k\right)}$$

$$e_y^n\left(i, j + \frac{1}{2}, k\right) + \frac{2\Delta t_n}{2\gamma + \Delta t_n \bar{\sigma}\left(i, j + \frac{1}{2}, k\right)}$$

$$\left[\begin{array}{c} \frac{h_x^{n+1/2}\left(i, j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}\right) - h_x^{n+1/2}\left(i, j + \frac{1}{2}, k - \frac{1}{2}\right)}{\Delta \bar{z}_k} \\ \frac{h_z^{n+1/2}\left(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}, k\right) - h_z^{n+1/2}\left(i - \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}, k\right)}{\Delta \bar{x}_i} \end{array} \right]^{-j_{s,y}^{n+1/2}}, \quad (\text{A17})$$

$$e_z^{n+1}\left(i, j, k + \frac{1}{2}\right) = \frac{2\gamma - \Delta t_n \bar{\sigma}\left(i, j, k + \frac{1}{2}\right)}{2\gamma + \Delta t_n \bar{\sigma}\left(i, j, k + \frac{1}{2}\right)}$$

$$e_z^n\left(i, j, k + \frac{1}{2}\right) + \frac{2\Delta t_n}{2\gamma + \Delta t_n \bar{\sigma}\left(i, j, k + \frac{1}{2}\right)}$$

$$\left[\begin{array}{c} \frac{h_y^{n+1/2}\left(i + \frac{1}{2}, j, k + \frac{1}{2}\right) - h_y^{n+1/2}\left(k - \frac{1}{2}, j, k + \frac{1}{2}\right)}{\Delta \bar{x}_i} \\ \frac{h_x^{n+1/2}\left(i, j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}\right) - h_x^{n+1/2}\left(i, j - \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}\right)}{\Delta \bar{y}_j} \end{array} \right]^{-j_{s,z}^{n+1/2}}. \quad (\text{A18})$$

여기서

$$\Delta \bar{x}_i = \frac{\Delta x_{i-1} + \Delta x_i}{2},$$

$$\Delta \bar{y}_j = \frac{\Delta x_{j-1} + \Delta x_j}{2},$$

$$\Delta \bar{z}_k = \frac{\Delta z_{k-1} + \Delta z_k}{2}.$$

식 (A13) ~ (A18) 에서 평균 전기전도도 $\bar{\sigma}$ 는 전기장이 정의된 모서리에 접하는 4개 셀의 전기전도도를 가중평균을 이용하여 다음과 같이 구해진다(Sasaki, 1999; Nam and Kim, 2010).

$$\bar{\sigma}\left(1 + \frac{1}{2}, j, k\right) = \frac{\sigma(i, j, k)\Delta y_j \Delta z_k + \sigma(i, j-1, k)\Delta y_{j-1} \Delta z_k + \sigma(i, j, k-1)\Delta y_j \Delta z_{k-1} + \sigma(i, j-1, k-1)\Delta y_{j-1} \Delta z_{k-1}}{(\Delta y_j + \Delta y_{j-1})(\Delta z_k + \Delta z_{k-1})}, \quad (\text{A19})$$

$$\bar{\sigma}\left(i, j + \frac{1}{2}, k\right) = \frac{\sigma(i, j, k)\Delta x_i \Delta z_k + \sigma(i-1, j, k)\Delta x_{i-1} \Delta z_k + \sigma(i, j, k-1)\Delta x_i \Delta z_{k-1} + \sigma(i-1, j-1, k)\Delta x_{i-1} \Delta z_{k-1}}{(\Delta x_i + \Delta x_{i-1})(\Delta z_k + \Delta z_{k-1})}, \quad (\text{A20})$$

$$\bar{\sigma}\left(i, j, k + \frac{1}{2}\right) = \frac{\sigma(i, j, k)\Delta x_i \Delta y_j + \sigma(i-1, j, k)\Delta x_{i-1} \Delta y_j + \sigma(i, j-1, k)\Delta x_i \Delta y_{j-1} + \sigma(i-1, j-1, k)\Delta x_{i-1} \Delta y_{j-1}}{(\Delta x_i + \Delta x_{i-1})(\Delta y_j + \Delta y_{j-1})}. \quad (\text{A21})$$