

## 수학 교사의 주목하기와 반응적 교수의 관계 : 모든 학생의 수학적 사고 계발을 지향하는 수업 상황에서

김희정(홍익대학교)  
한채린(서울대학교 대학원)<sup>†</sup>  
배미선(서울대학교 대학원)  
권오남(서울대학교)

### I. 서론

수학교실에서의 수업은 교사 중심의 강의식 수업에서 학생 개개인의 수학적 사고에 주목하여 활발한 토론참여에 가치를 두는 학생 중심의 수업으로 변화해 왔다. 전미 수학 교사 협의회(National Council of Teachers of Mathematics, 이하 NCTM)의 학교수학을 위한 원리와 기준(NCTM, 2000) 및 2010년 발표된 수학 공통 핵심기준<sup>1)</sup>([CCSSM], NGA Center & CCSSO, 2010)을 중심으로 한 학교 수학 개혁 운동을 통해 미국에서도 역시 교사 중심의 전통적인 수업 방식을 지양하고, 학생 중심의 발문과 토론 위주의 수업 방식을 확산시키고자 시도해 왔음을 알 수 있다. 시간의 흐름에 따라 학생 중심의 수학 수업이 갖는 가치 및 그 필요성에 대한 공감대도 어느 정도 형성되었고, 학생 중심의 수업이 일견 보편화된 것처럼 보이기도 한다. 그러나 일상적으로 이루어진다는 학생 중심의 수학 수업이 과연 진정으로 학생의 수학적 사고에 초점을 두고 있는 것인지를 찬찬히 따져볼 필요가 있다. 학생 중심의 수업을 설명할 수 있는 증거를 마련해나가는 작업은 관련된 현상의 본질이 무엇이며 더 나은 방향으로 나아가기 위해 개선해야 할 점이 무엇

인지를 볼 수 있는 안목을 키워준다. 특히 이러한 작업은 교사가 학생 중심의 수학 수업을 이끌어 나가기 위해 학생 개개인의 수학적 사고에 주목하고 반응하는 형태의 유의미한 교수학적 반응 지도(혹은 반응적 교수, responsive teaching)에서부터 시작해야 한다. 유의미한 교수학적 반응 지도는 수학 교사의 교실 수업 개선 및 전문성 신장뿐만 아니라 학생들의 수학 학습에 영향을 미치는 결정적 요소임을 여러 연구들에서 지적해 왔기에 더욱 더 그러하다(Carpenter, Fennema & Franke, 1996; Jacobs, Lamb, & Philipp, 2010; van Es & Sherin, 2008).

반응적 교수의 정의는 연구자에 따라 다양하며, 아직까지 합의된 정의는 존재하지 않는다. 교실 수업 상황에서 효과적인 수업을 진행하는 교사의 반응적 교수에 관한 선행 연구들을 살펴보면, 반응적 교수의 외연은 제각기 다르게 제시되었지만, 공통적으로 나타나는 반응적 교수의 내연은 다음과 같음을 발견할 수 있다. 학생들이 수학적 개념을 올바르게 이해하고 수학적 사고를 발달시키기 위하여 수업 중에 드러나는 학생들의 수학적 사고들을 수업의 중심에 놓고, 교사가 이에 적절하게 반응하며 수학 수업을 이끌어가고자 한다는 것이다(Ball & Cohen, 1999; Black, Harrison, Lee, Marshall, & Wiliam, 2004; Hammer, 1997; Heaton, 2000; Schoenfeld, 2011). 이에 본 고에서는 교사가 학생들의 개별적인 수학적 사고 각각에 주목하고, 이를 교사가 해석하여 수학적 방향으로 유의미한 방향으로 이끌어가기 위해 실시하는 다양한 교수학적 반응들을 총칭하여 반응적 교수로 정의한다. 이와 같은 반응적 교수 관행<sup>2)</sup>은 교사로서 하여금 학생들의 수학적 사고의 구체적 본질에 주목하여 반응하게

\* 접수일(2017년 08월 9일), 수정일(2017년 8월 19일), 게재확정일(2017년 8월 25일)

\* ZDM분류 : D70

\* MSC2000분류 : 97C90

\* 주제어 : 반응적 교수, 주목하기, 수학적 사고, 학생 수학적 사고 중심 수업

† 교신저자

<sup>1)</sup> Common Core State Standards for Mathematics

하며(Hammer, Goldberg, & Fargason, 2012), 이를 통해 학생들의 수학적 사고를 깊이 있게 발전시키도록 하는데 있다.

다인수 학급이라는 물리적 한계에 직면한 수학 교사가 학생들의 다양한 수학적 사고를 파악할 수 있는 효과적인 방법 중 하나는 발문과 토론을 통해 학생들의 수학적 사고가 가시적으로 드러나게 만드는 것이다. 그러나 모든 교사들은 본인이 학창시절에 효과적으로 학습했던 것으로 기억하는 수업방법을 교사가 되어 학생들을 가르칠 때에도 그대로 교수하는 경향을 띄며(일명 ‘apprenticeship of observation’, Lortie, 1975), 초임 교사와 같이 교수의 경험이 부족할 경우 더욱 그러하다. 학창시절 교사 중심의 수업만을 경험한 초임 교사들은 학생 중심의 발문과 토론 중심의 수업을 진행하는 데에 더욱 어려움을 겪게 되는데, 특히 수업 도중에 산발적으로 드러나는 개별 학생들의 수학적 사고에 적절한 교수학적 반응을 하거나 학생들의 수학적 토론을 의미 있게 조율해 나가기가 쉽지 않다(Cengiz, Kline, & Grant, 2011; Heaton, 2000). 사실 교사 중심의 수업에 비하여 학생의 수학적 사고 중심의 반응적 교수는 그 양상이 복잡하여 실제 많은 교사들이 수업 진행에 어려움을 겪는다. 교사들은 동시다발적으로 사건이 일어나는 수업 장면에서 수업을 진행하는 동시에 학생들의 수학적 사고를 끊임없이 추적하고 분석하여 일련의 교수학적 의사결정을 시기적절하게 계속해서 내려야 하기 때문이다. 본 연구는 교사들이 겪는 어려움의 바탕이 되는 복잡한 교수 현상을 세밀하게 분석하여 반응적 교수를 실행하는 데에 있어 교사가 인지하는 교실 수업 상황과 그들의 교수학적 의사결정 사이의 메커니즘을 밝히고자 하는 목적을 갖는다. 이러한 시도는 반응적 교수를 실행하는 데에 있어 교사들이 어려움을 겪는 지점을 밝혀줄 뿐만 아니라, 효과적인 반응적 교수를 실행하기 위한 메커니즘이 무엇인지도 함께 알려주어 수학 교사의 수업전문성 신장에 기여할 수 있을 것이다.

교실 수업 상황에서 교사가 학생들의 개별적인 수학적 사고에 근거하여 적절한 교수학적 의사 결정을 내리기 위해서는 무엇보다 먼저 학생들의 수학적 사고를 포착할 수 있는 ‘주목하기(noticing)’ 능력이 필요하다. 교

사는 주목하기를 통해서 교실 수업 상황을 나름대로 인지한 후에라야, 이를 해석하여 교수학적으로 유의미한 반응을 할 수 있기 때문이다. ‘주목하기’의 사전적 의미는 관심을 가지고 주의 깊게 살핀다는 뜻이다. 이는 보이는 모든 것을 살피는 것이 아니라 특별히 관심을 가지는 것만을 주의 깊게 살피는 행위가 주목하기라는 것이다. 이러한 맥락에서 수학 교사의 주목하기는 수업 상황 모두를 살피는 것이 아니라 교수학적으로 중요한 것을 살피는 것으로, 특히 이 논문에서는 학생의 수학적 사고에 특별한 관심을 가지고 이를 주의 깊게 살피는 것에 중점을 둔다. 수학교사의 주목하기는 수학 학습과 관련 없는 교실 상황이나 산발적으로 드러나는 학생들의 수학적 사고 모두에 관심을 갖기 보다는 유의미한 수학 학습이 일어날 수 있는 방향으로 나아갈 수 있는 상황이나 학생의 수학적 사고에 선별적으로 관심을 갖고 살피는 것일 것이다. 여러 선행 연구자들은 실제 수학 교실의 복잡성으로 인하여 교사가 모든 현상에 주목하는 불가능하며, 한정된 교사의 주목을 학생들에게 풍부한 수학 학습 기회를 제공하는 방향으로 유도할 수 있는 전문가적 안목이 필요함을 주장하고, 교사가 수업 중에 무엇에 주목하고 이해하는 지를 교사의 ‘주목하기’ 혹은 교사의 ‘전문가적 비전<sup>3)</sup>’의 개념으로 표현하고 분석하였다(Goodwin, 1994; Jacobs, Lamb, Philipp, & Schappelle, 2011; van Es & Sherin, 2002; 2008).

교사의 주목하기 능력은 교사의 수업 전문성을 신장시키는 데에 있어 중요한 역할을 하게 되지만, 전문성을 갖춘 교사의 주목하기 능력이 시간이 지남에 따라 자연스럽게 발달하는 것은 아니다. Sherin & Star(2011)는 교사의 주목하기 능력은 교사 전문성 개발 프로그램이나 교사 연수와 같은 외부 중재 요인으로 인해 발달한다고 주장하였다. 교사의 주목하기 능력을 신장시키는 교사 전문성 개발 프로그램에 관한 선행연구들에서는 수업 장면을 포착한 편집 영상을 교사들이 함께 시청하고 논의하는 비디오 클럽이 교사의 주목하기를 개선시킬 수 있는 귀중한 맥락을 제공해준다고 밝혔다(Santagata, Zannoni, & Stigler, 2007; Sherin & Han, 2004; van Es & Sherin, 2008). 이러한 연구들은 교실 밖에서 실시한 교사의 주목하기 능력 개발이 그들의 실제 수업 실행에

2) responsive teaching practice

3) professional vision

있어 그대로 적용될 것을 가정하고 전제한다. 그러나 연습과 실천의 간극은 언제나 존재한다. 교실 수업을 위해 개발된 주목하기 능력이 실제 수업에서 교사의 의사결정에 어떠한 영향을 주고 수업을 어떻게 바꾸었는지는 선행연구와 별개의 논의인 것이다. 이에 기존의 연구들에서 논의하던 주목하기에서 한발 더 나아가 실제 수업 상황에서 학생들에게 직접적으로 학습 기회를 제공하는, 학생들의 수학적 사고에 따른 적절한 반응적 교수와 주목하기를 연결하여 논의할 필요가 발생한다. 또한 교사 전문성 개발의 측면에서, 주목하기와 반응적 교수가 서로 어떠한 영향을 주고받으며 성장해 나가는지에 대한 고려도 필요할 것이다.

이에, 이 연구에서는 교사들이 실제 수업 상황에서 학생들의 수학적 사고에 주목하면서 학습자들에게 풍부한 학습 기회를 제공하는 반응적 교수에 초점을 맞추기 위해, 구체적인 수업 사례에서 주목하기와 반응적 교수의 관계를 탐색하였다. 이러한 탐색은 실제 수학 교실 수업 개선을 위한 교사 전문성 신장에도 함의를 줄 수 있을 것이다.

## II. 이론적 배경

전술한 바와 같이 이 연구는 교사가 학생의 수학적 사고를 주목하는 행위와 그에 따라 일어나는 반응적 교수 행위와의 관계를 분석하고자 하는 목적을 갖는다. 선행연구 분석을 통하여 이 장에서는 1) 주목하기의 개념이 반응적 교수까지 확장되어야 할 당위성에 대해 논의하고, 2) 반응적 교수의 맥락에서 주목하기 연구의 위치를 검토하며, 이를 바탕으로 3) 본 연구에서 정의하는 반응적 교수 모델을 논의할 것이다.

### 1. 수학 교사의 전문 역량으로서의 주목하기

교사가 교실에서 일어나는 일과 학생들의 수학적 사고에 주목하는 방법을 배우는 것은 교사 전문성의 핵심 요소 중 하나이며(Berliner, 1994; Mason, 2002; Goldsmith & Seago, 2011), 최근 교사의 수행에 관한 연구에서 각광을 받고 있는 주제이다(Sherin, Russ, & Colestock, 2011; van Es & Sherin, 2010; Walkoe,

2015). 교사의 주목에 관한 연구들의 핵심 아이디어는 다음과 같다. 교실에서는 사건들이 동시다발적으로 일어나는데, 교사는 수시로 이러한 자극들을 걸러내고 주목이 요구되는 중요한 순간을 포착해야한다는 것이다(Mason, 2002; Walkoe, 2015). 특히 학생들의 수학적 사고를 발달시키기 위해서는 수업 중에 교사가 순간순간의 의사결정을 사려 깊게 할 수 있는 능력이 중요하며(Brown, Stein, & Forman, 1996; NCTM, 2000), 의사결정의 정보를 제공해주는 학생들의 순간적인 사고를 주목해내는 능력이 바로 수학 교사의 전문성이 된다.

실제 교수 맥락에서 교사의 주목이 어떤 식으로 나타나는지를 조사하기 위하여 van Es & Sherin(2008)은 Goodwin(1994)의 전문가적 비전의 개념을 사용하여 교수 맥락에서 전문가적 비전의 주목하기 요소를 다음과 제시하였다.

- (1) 교수 상황에서 중요한 것 식별하기
- (2) 맥락에 대해 알고 있는 것을 사용하여 상황 추론하기
- (3) 특정 사건들과 더 넓은 교수·학습 원리 연결짓기

수학 교사가 학생의 수학적 사고를 인지하고 주목하는 것의 중요성을 강조한 Ball, Lubienski, & Mewborn(2001), Bobis et al.(2005), Kazemi, Franke, & Lampert(2009)와 같은 선행 연구를 근거로 Jacobs et al.(2010)은 주목하기 중에서도 학생의 수학적 사고에 관한 주목하기에 좀 더 초점을 맞추고자 하였다. 이들은 van Es & Sherin(2008)이 제안한 전문가 비전의 주목하기 요소를 좀 더 수학적인 맥락으로 해석하여, 수학 교사가 학생들의 수학적 사고를 이해하고 그에 따라 적절한 교수학적 지도를 하기까지의 과정을 다음과 같이 세 가지 요소로 제안하였으며, 이러한 단계를 그림으로 나타내면 [그림 1]과 같다.

- (1) 학생들의 전략에 주의 기울이기(Attending)
- (2) 학생들의 사고와 이해를 해석하기(Interpreting)
- (3) 학생들의 사고에 대한 이해에 기반하여 어떻게 반응할지 결정하기(Deciding how to respond)

주의 기울이기		해석하기		어떻게 반응할지 결정하기
교사가 복잡한 교실 상황에서 학생의 수학적 사고 및 전략 등의 세부적인 사항에 주의를 기울이고 기억하기	→	학생의 수학적 사고 및 전략을 해석하고 증거에 기반하여 추론하기	→	특정 상황에서 드러난 학생의 수학적 사고 및 전략에 대한 반응을 결정하기 위하여 추론하기

[그림 1] 주목하기의 맥락에서 의사결정 과정(Jacobs et al.(2010) 재구성)

[Fig. 1] Process of decision making in noticing (reconstructing Jacobs et al.(2010))

이때, Jacobs et al.(2010)의 프레임의 3가지 구성요소에서, 어떻게 반응할지 결정하는 것과 실제 일어나는 반응 지도와의 관계는 다음 두 가지 측면에서 재고해 볼 필요가 있다. 첫째로, 교사 주목하기라는 개념의 등장은 실제 교실에서 교사가 수행하는 교수 행위에 초점을 맞추고 설명하기 위한 것이었다. 즉, 교사의 실제 교수 행위에 선행하는 주목하기라는 심리적 기제에 초점을 맞추으로써 교사가 주목을 바탕으로 수집한 정보로 인해 내린 교수학적 행위의 결정은 필연적으로 실행으로 이어짐을 전제하고 있는 것이다. 그러나 서두에서 언급한 바와 같이 교실 상황의 다양한 변인으로 인해 교수학적 행위의 결정과 실행 사이의 간극은 발생할 수밖에 없다. 그러므로 교사의 주목이 그들의 전문성을 설명해주기 위해서는 주목의 개념이 반응을 결정하는 데에서 그칠 것이 아니라 교실 수업에서 실제로 이루어지는 반응적 교수까지 확장시킬 필요가 있다.

둘째로, 교사의 교수학적 반응의 결정은 실제 교수행위로 발현될 때에야 확인가능하다는 점에서 복잡한 수업 상황에서 교사가 내린 수많은 순간순간의 결정들은 해당 교사 본인의 증언 없이는 알아내기가 힘들며, 교사 본인 역시 자신이 내린 수많은 결정을 사후 증언을 통해 모두 기억해내는 일은 물리적으로 불가능하다. 또한 교사가 교실 수업 맥락 밖에서 내린 수많은 교수학적 결정보다는 교사가 수업 중에 직접 실행한 교수학적 반응 지도를 논의하는 것이 수학교실에서의 실제적인 교사 전문성을 개발하는, 보다 생산적인 방향이 될 수 있을 것이다. 이상의 논의들은 주목하기에 대한 연구가 왜 교실에서 실제로 일어난 반응적 교수까지 확장되어야 하며, 이러한 확장이 교사 전문성 개발에 가져다 줄 유익이 무엇인가를 설명함으로써 확장의 당위성을 역설한다.

최근 몇 년간 시행된 수학 교사 전문성 발달에 대한

국제적인 대규모 비교연구들에서도 교사 전문성 및 교사 역량을 교사의 인지적인 측면보다는 실제 교실 수업에서의 상황적인 측면을 강조하는 경향을 확인할 수 있다. 국제교육성취도 평가학회<sup>4)</sup>(IEA) 주관으로 14개국 수학 교사들의 교사 지식과 신념을 측정하였던 TEDS-M<sup>5)</sup> 연구는 Ball, Thames, & Phelps(2008)의 수학 내용 지식<sup>6)</sup>(MKT)을 기반으로 하여 교사의 전문성을 주로 인지적인 측면에서 정의하였다. 그러나 TEDS-M의 후속연구로써 TEDS-FU(TEDS-Follow up study)라고도 불리는 근래의 Learning to Learn from Mathematics Teaching Project(Santagata & Guarino, 2011; Santagata & Yeh, 2016)나 Classroom Video Analysis Instrument(Kersting, Givvin, Thompson, Santagata, & Stigler, 2012; Kersting et al. 2016) 연구에서는 수학교사의 전문성을 인지적 측면보다는 상황적 측면에 좀 더 초점을 맞추고 있다. 이들 연구에서는 수업 실행이라는 상황적 관점에서 교사 전문성을 측정하기 위해 교사의 주목하기 능력을 출발점으로 삼았으며, 이러한 접근은 수학을 가르치는 데에 있어 수학 교사에게 필요한 전문 역량을 다양한 상황들을 연결하고 판단내리는 교수 활동까지 그 범주를 확장하고 있다(Kaiser et al., 2017). TEDS-FU 연구에서는 행동의 기준과 그 행동의 기초가 되는 지식, 인지 기술 및 정서적 동기 부여 등을 통합해야 한다고 주장한 Blömeke, Gustafsson, & Shavelson(2015)의 프레임을 사용하여 관찰 가능한 교사의 전문 역량을 측정하였다. 다음과 같은 Blömeke et al.(2015)의 프레임은

4) International Association for the Evaluation of Educational Achievement

5) Teacher Education and Development Study: Learning to Teach Mathematics

6) Mathematical Knowledge for Teaching

교사의 주목하기와 반응적 교수는 교사의 인지적, 정서적 요소뿐만 아니라 상황적인 측면에서 다음의 세 가지를 고려해야 함을 말해준다.

- (1) 수업 상황에서 일어나는 특정 사건에 주의를 기울임으로써 해당 사건을 인지하기(Perceiving)
- (2) 수업 상황에서 일어나는 사건들을 이해함으로써 인지된 활동들을 해석하기(Interpreting)
- (3) 이전의 두 단계만큼 가지적으로 인지되는 활동은 아니지만 학생들의 활동에 대한 반응적 교수를 예상해보거나 대안적인 교수학적 전략을 제안하는 의사결정하기(Decision-making)

Blömeke et al.(2015)의 프레임은 교사의 주목을 실행의 맥락에서 바라보고, 교사의 교수학적 반응에 기반하여 교사의 전문 역량을 측정하고자 했다는 점에서 본 연구와 유사한 관점을 지닌다고 볼 수 있다. 그러나 Blömeke et al.(2015)의 프레임은 교사 전문 역량 측정을 목적으로 편집 영상을 통해 제시된 가상의 교실 상황에서의 교수학적 의사결정을 살펴본 반면, 본 연구는 실질적인 교사의 수업 개선을 목적으로 실제 수업 상황에서의 반응적 교수를 분석하고자 하여 연구의 목적 및 제반 상황의 예측불가능성에서 차이가 있다.

## 2. 주목하기의 맥락에서의 반응적 교수

실제 교실 수업 상황을 바탕으로 주목하기의 맥락에서 반응적 교수를 탐색한 연구는 거의 이루어지지 않은 상태이므로 본 절에서는 반응적 교수와 관련하여 교사의 교수 행위를 포함한 교사의 담화<sup>7)</sup>를 분석한 선행 연구 위주로 살펴본다. 반응적 교수와 관련된 교사 담화 연구들은 반응적 교수와 교사 주목하기와의 연결을 미루어 짐작하게 해줄 것이다.

Lineback(2015)과 Pierson(2008)은 수업 중에 교사가 학생들의 아이디어를 채택하는 행위를 반응적 교수로 보았다. Pierson(2008)의 경우, 중학교 수학교사가 학생들의 아이디어를 채택하는 정도를 측정하여 반응성 수준(Low, Medium, High I, High II)을 범주화하였다. 특

히 수업 중에 드러난 학생들의 아이디어 채택 여부와 개별 학생의 사고가 교사로 인해 명시화 되었는지 여부를 분석하여, 교사가 학생들의 아이디어에 깊게 관여했을 때를 높은 수준으로 코딩하였다. 이는 교사의 반응적 교수를 체계적으로 접근하였다는 데에 의의가 있으나, 수업 중 교사의 의사결정 이면에 있을 수 있는 미묘한 뉘앙스를 포착하지 못한다는 한계점을 지닌다. 이러한 한계를 극복하기 위해 Lineback(2015)은 과학 교사의 탐구 중심 수업 실행 과정에 대한 담화 분석을 실시하여 반응적 교수의 맥락에서 교사가 학생 아이디어를 채택하는 다양한 양상을 발견하였다. 특히, 전향<sup>8)</sup>이라는 새로운 개념을 제안하면서 교사가 학생들의 관심을 다른 아이디어 혹은 다른 학습 활동으로 변화시키는 것이 반응적 교수의 핵심이며, 이를 연구 방법의 측면에서 분석하는 것도 중요하다고 주장하였다. 그러나 이 연구 역시 교사의 반응성을 학생 아이디어 채택 여부 및 양상으로만 규정할 뿐, 과연 한 명의 교사가 모든 학생들의 아이디어를 다 채택하는 것을 지향해야 하는지, 다른 아이디어 혹은 활동을 변화시키는 전향이 왜 필요한지에 대한 논의나 근거는 제시하지 못하였다.

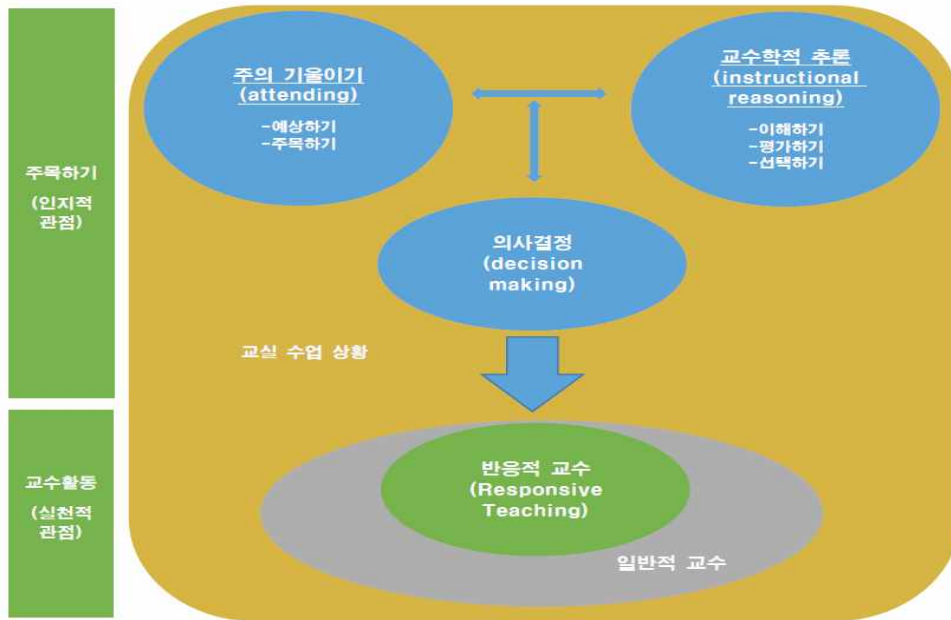
이상의 두 연구는 모두 수업 중에 드러난 학생들의 아이디어를 교사가 파악함을 전제로 하여 반응적 교수를 논의하고 있으며 이는 반응적 교수와 교사 주목하기가 강력한 상관성을 지니고 있음을 내포한다. 이에 본 연구에서는 교실 수업 상황에서 학생들의 수학적 사고를 계발시킬 수 있는 반응적 교수의 구성 요소를 개념화하는 데에 있어 주목하기의 프레임을 활용하여 반응적 교수 분석틀을 제시할 것이다. 본 연구에서 실시한 수학 교사 수업 분석은 이를 기반으로 하였다.

## 3. 반응적 교수 모델

주목하기의 맥락에서 반응적 교수를 분석하고자 하는 본 연구는 Jacobs et al.(2010)의 학생들의 수학적 사고를 전문적으로 주목하기 프레임과 Blömeke et al.(2015)의 상황적 측면의 교사 전문성 프레임을 근거로 하여, 교사의 교수 활동을 분석하는 프레임은 반드시 상황 기반 요소를 포함해야 한다고 생각한다. 이러한 관점에 따

<sup>7)</sup> discourse

<sup>8)</sup> redirection



[그림 2] 학생의 수학적 사고 계발을 위한 주목하기와 교수활동으로 구성된 반응적 교수 모델  
 [Fig. 2] Model of responsive teaching consisting of noticing students' mathematical thinking and enacting moves to support students' conceptual development

라 본 연구에서는 반응적 교수 모델을 설정하였으며, 그 세부 내용은 다음과 같다.

반응적 교수 모델에서는 전술하였던 전문적 주목하기 프레임에서 교사가 학생의 수학적 사고에 기반하여 내리는 의사결정에 좀 더 비중을 둔다. 의사결정의 결과 실시된 반응적 교수활동들이 실제 수업의 진행을 보여주며, 실제 수업 진행이 바로 수학 교사의 전문 역량이 발현되어야 하는 지점이기 때문이다. 이에 따라 설정한 반응적 교수 모델은 [그림 2]와 같다. 반응적 교수 모델이 지향하는 반응적 교수 관행에서는 교사가 수업 중<sup>9)</sup> 학생의 수학적 사고에 주의를 기울이고, 학생의 수학적 사고에 대한 이해를 바탕으로 수업 상황에서의 의사결정을

하며(즉, 주목하기의 과정), 그 의사결정들이 모여 수업의 흐름을 이루게 된다. 학생의 수학적 사고에 주목하기는 Jacobs et al.(2010)과 van Es & Sherin(2008)의 연구에서 제시되었던 바와 같이 다음의 두 가지로 범주화될 수 있다. 주의 기울이기와 주의를 기울였던 것과 관련된 이해 및 해석을 포함하는 교수학적 추론이 그것이다. 이는 반응적 교수 모델에서 주목하기의 두 축을 구성한다 ([그림 2] 상단의 두 가지 원 '주의 기울이기'와 '교수학적 추론' 참조). 실제로 일어나는 일반적 교수 행위 중에서 교수학적 추론을 바탕으로 학생이 드러내는 수학적 사고를 구체화하거나 학생 간 수학적 의사소통을 활성화시키도록 하는 등의 의사결정의 결과로 일어난 다양한 교수 행위가 바로 반응적 교수로 구분된다. 다양한 반응적 교수 행위들을 교사 개인의 인지적인 관점인 주목하기와 분리하여 살펴봄으로써 그 메커니즘을 좀 더 구체적으로 살펴볼 수 있을 것으로 판단하였기에 사회적 맥락이나 교실 수업 상황을 포함하는 실천적인 맥락의 교수활동에 위치시켰다. Blömeke et al.(2015)이 지적하였

<sup>9)</sup> 여기서의 '수업 중'은 교사의 한 수업을 구성하는 전반적인 과정을 지칭한다. 즉, 교사의 수업 전 수업 계획하기 단계에서의 학생의 수학적 사고에 주목하고 예상하여 반응적 교수 계획하기, 수업을 진행하는 중에 학생의 수학적 사고에 주목하여 반응적 교수 실행하기, 또한 수업 후 반성을 통한 수학적 사고에 주목하기를 포함한다.

듯이 반응적 교수 행위는 실제 수업 상황에서 구현되는 것이므로 학생들의 다양한 사고와 교실 학습 환경과의 상호작용의 맥락에서 해석되어야 할 것이다. 이에 반응적 교수 모델에서 반응적 교수의 외연에 교실 수업 상황을 위치시켰다. 이 모든 일련의 과정들은 반응적 교수 관행이 어떠한 과정을 거쳐 이루어지는지를 보여준다.

이 연구는 이러한 반응적 교수 모델에 기반하여 실제 수학 수업의 맥락에서 주목하기와 반응적 교수의 관계를 분석하였다. 제 1저자인 연구자의 선행연구 (Kim, 2014; 2015)에서 학생들의 수학적 사고에 대해 다양한 반응적 교수 행위를 보여주었던 Lee 교사의 사례를 선택하여 해당 교사가 실시하는 교수학적 행동<sup>10)</sup>을 분석하여 주목하기와 반응적 교수 간의 메커니즘을 찾고자 하였다. 아직까지 반응적 교수에 대한 연구가 많이 이루어지지 않는 한국 학계에서 교사의 수학 수업을 인지적 측면뿐만 아니라 상황적 측면까지 확장하여 분석하고자 하는 연구자들에게 새로운 관점을 제안할 수 있을 것이다.

### III. 연구방법

#### 1. 연구맥락

본 연구는 미국 버클리 대학교(UC Berkeley)에서 진행되는 TRU Math 프로젝트의 일환으로 진행되었으므로 본격적인 연구 방법의 기술에 앞서 Mathematics Assessment Project(MAP, 2016b) 및 Teaching for Robust Understanding of Mathematics [TRU Math] (Schoenfeld & the Teaching for Robust Understanding Project, 2016) 프로젝트를 소개하기로 한다. MAP과 TRU Math 프로젝트는 미국의 새로운 수학 공통 핵심 기준(NGA Center & CCSSO, 2010)이 지향하는 학교 수학의 비전에 발맞추어 버클리 대학교 및 인근 중고등학교 지역구가 공동 주관했던 교사 전문성 개발 프로그램이다. 미국 북부 캘리포니아에 위치한 두 곳의 중고등학교 지역구에서 자원한 약 20여명의 중고등학교 교사들을 대상으로 실시되었으며, 참여자들은 새로운 수학 공통 핵심 기준 연구 및 본인의 수업 개선을 목적으로 하는 교사들이었다. 이들에게는 수학 수업을 학생의 수학적

사고 중심으로 변화시키도록 지원할 목적으로 특별히 고안된 교육과정 보충자료인 Formative Assessment Lessons [FALs](MAP, 2016a)과 그에 따른 교사 연수가 제공되었다. 이 연수는 FALs 자료에 관한 워크숍 및 공동 수업 연수를 하고, 동료 교사들과의 수업 관찰 및 그에 관한 피드백을 거쳐 수업을 개선해나가는 식의 다년간의 장기 프로그램이었다.

FALs 자료는 영국 노팅햄 대학교의 Shell Centre와 미국 버클리 대학교가 공동으로 실시한 연구 및 R&D의 산출물<sup>11)</sup>이며, 이 연구는 수학 교사들에게 학생들의 수학적 사고를 신장시킬 수 있는 교수 학습 전략을 지원하기 위해 실시되었다. FALs 자료를 통해 교사는 수업 전에 학생들의 수학적 사고 수준을 진단하고 이를 질적으로 분석할 수 있는 기회를 갖게 되며, 이를 토대로 본 수업에서 적절한 반응적 교수를 진행할 수 있게 된다. 예를 들어, 각 수업 패키지마다 수업 전 사전 평가 활동지가 포함되어 교사들은 해당 차시 목표 내용과 관련된 학생들의 이해도를 점검하고, 이들이 드러내는 오개념에 대처할 수 있는 기회를 제공받는다. 수업 후에도 비슷한 형태의 사후 평가 활동지를 실시하게 하여 학생들이 수업을 통해 달성한 성취를 확인하고 보강해야 할 점을 인식 및 주목할 수 있는 기회를 제공받게 된다. 본 수업에서는 차시별 목표에 부합하는 다양한 수업 운영 방법 및 학생 활동들이 제시되어 교사들이 이를 활용할 수 있게 하였다. 수업 운영 방법으로는 런칭<sup>12)</sup> 활동, 소그룹 활동, 학생 발표, 학급 전체 토론 등이 있고, 소그룹 수업 활동으로는 카드 맞추기 활동, 가상의 학생 활동지를 통해 서로의 아이디어 분석하기 활동 등이 그 예이다.

교사 연수는 미국의 신학년 시작 직전인 여름 방학 기간에 일주일에 걸쳐 실시된 집중 세미나와 FALs 자료의 성공적인 적용을 위해 매월 실시된 교사 모임의 형태로 이루어졌다. 연수에 참가한 교사들은 해당 학년도

11) FALs는 웹사이트(<http://map.mathshell.org/lessons.php>)에 무료로 공개가 되어 있으며, 2017년 현재 700만건 이상의 다운로드가 이루어졌다. 현재 미국 전역의 많은 교사들이 FALs를 수업 보충 자료로 이용하여 수업을 진행하고 있다.

12) Launch. 각 레슨 패키지의 중점 활동인 소그룹 활동에 앞서, 소그룹 활동에서의 핵심적인 수학적 아이디어나 수학적 실행 (Mathematical Practices)를 소개하고 약간 동안 실험해 보는 활동

<sup>10)</sup> instructional moves

내에서 시기와 횟수에 상관없이 자유롭게 본인의 수업에서 FALs 자료를 활용하도록 권장 받았다. FALs 자료는 다수의 FALs 패키지들로 구성되어 있으며, 하나의 FALs 패키지로 보통 2~3일에 걸쳐 수업하게 된다. 대부분의 참가 교사들은 학사업무로 바쁜 학기 초와 말을 제외한 학기의 중반에는 매월 1개 정도의 FALs 패키지를 이용하여 수업을 실시하였으며, 하나의 패키지를 수업하는 데에 2일에서 4일 정도를 소요하였다.

FALs 자료를 이용한 수업이 학생들의 수학 성취에 미치는 영향에 관하여 미국의 연구 기관인 WestEd, the UCLA Center for Research on Evaluation, Standards, and Student Testing(CRESST), Measure Progress, Center for Assessment, 그리고 Stanford Center for Assessment, Learning and Equity(SCALE)등에서 연구하였으며, 긍정적인 연구 결과가 보고되었다(이 외에도 Philadelphia Education Research Consortium에서 실시한 Research for Action(2015)도 있으며, Research for Action 웹사이트<sup>13)</sup>에서 연구리포트를 확인할 수 있다). 이를 통해 FALs 자료를 이용한 수업은 수학 공통 핵심기준이 추구하는 수학 교수 학습에 관한 목표와 비전에 부합하는 학생 사고 중심의 수업 실행에 효과적임을 알 수 있다. 이는 비슷한 맥락에서 학생 중심의 수학 수업을 지향하는 한국의 수학 교육 현장 및 학계에서도 FALs 자료의 긍정적인 활용 가능성을 암시해준다.

## 2. 연구 대상

본 연구는 TRU Math 프로젝트에 참가한 20여명의 교사 중 중학교 교사인 Lee 교사를 연구 대상으로 선정하였다. Lee 교사는 연구자의 선행 연구에서 학생의 수학적 사고 중심으로 본인의 수업을 가장 많이 변화시킨 교사(Kim, 2014; 2015)로, 해당 교사의 수업에서 주목하기와 그에 따른 반응적 교수 행위가 가장 다양한 형태로 나타났기에 그 메커니즘을 분석하기에 적절한 사례로 판단하였다. 중학교 및 고등학교 교사로서 10년의 경력을

지닌 Lee 교사는 프로젝트에 참여했던 2012-2013학년도 당시 7학년<sup>14)</sup> 수학 교과를 담당하고 있었으며, 이듬해에는 수석교사<sup>15)</sup>로의 임용이 예정되어 있었다. Lee 교사는 FALs 자료의 핵심적인 특징 중 하나인 수업 전, 후의 학생 평가 과제를 충실하게 실행하였으며, 때로는 자신이 가르치는 학생들의 수준에 따라 과제를 수정하기도 하였다. 이러한 Lee 교사의 자발적인 교육과정 재구성 활동과 본인의 수업을 개선하려는 강력한 의지 및 실천은 실제로 Lee 교사의 수업을 교사 중심의 수업에서 학생 중심의 수업으로 변화시켜 주었다(Kim, 2015). 또한 매월 진행되는 교사 모임에서도 Lee 교사는 수업 전 주목하기 및 본 수업에 대한 반성, 그리고 수업 후 주목하기에 있어 다른 교사들에 비해 두드러짐을 확인할 수 있었다. 이에 본 연구에서는 Lee 교사의 수업이 반응적 교수 관행을 보여줄 수 있는 최적의 사례로 판단하고, 해당 수업 분석을 통해 교사의 주목하기와 반응적 교수와의 관계를 면밀히 조사하였다.

## 3. 자료 수집

Lee 교사가 TRU Math 프로젝트에 참가한 2012년 8월부터 2013년 5월에 걸친 1개년의 학년도 동안 다음과 같이 네 가지 종류의 자료를 수집하였다.

- (1) 2012-2013 학년도가 시작하기 전인 일주일간의 여름 집중 연수 촬영본
- (2) 2012-2013 학년도 동안 매월 실시된 교사 모임 필드 노트 및 촬영본
- (3) 교사 인터뷰 녹음 본(신학년 시작 전과 종료 후)
- (4) FALs 자료를 이용한 수업 촬영본(11월과 12월은 3일간, 5월은 2일간으로 총 8일 분량의 수업 관찰)

본 연구에서는 Lee 교사가 실시한 FALs 수업 중에서 「비율 문제를 위한 비교 전략 : 비 감각」<sup>16)</sup> 수업 패키지의 활용 사례를 중점적으로 살펴보았다. 도입부의 전

13) 참고 웹사이트:

<https://www.researchforaction.org/projects/examining-the-utility-of-math-and-literacy-tools-aligned-to-the-common-core-state-standards/>

14) 우리나라 중학교 1학년에 해당한다.

15) coach

16) 「Comparing Strategies for Proportion Problems: Sense of Scale」



체 토론, 소그룹 토론, 학생들의 발표가 포함된 마무리 토론 등과 같이 수업 구조의 변화에 따라 에피소드를 분류하였으며, 개별적인 문제 풀이 시간에는 반응적 교수 행위를 발견할 수 없었기에 분석 대상에서 제외시켰다. 본 연구에서 분석 대상으로 삼은 에피소드들을 정리하면 [표 1]과 같다.

[표 1] 본 연구에서의 반응적 교수에 관련한 연구 분석 대상의 에피소드들

[Table 1] Targeted episodes for the analysis of responsive teaching

날짜	에피소드	수업 활동(수업의 구조)	소요시간
1일	1	런칭 활동(학급 전체)	4' 9"
	2	교사 주도의 학급 전체 수업	2' 0"
	3	소그룹 활동	5' 0"
2일	4	도입부 토론(학급 전체 토론)	9' 32"
	5	포스터 만들기(소그룹 활동)	10' 27"
3일	6	도입부 토론(학급 전체 토론)	14' 58"
	7	마무리 토론 1(학급 전체 토론)	24' 19"
	8	마무리 토론 2(학생 발표)	4' 26"

#### 4. 자료 분석

수집된 모든 자료는 전사되었으며 연구자들은 비디오를 참고하여 전사록을 분석하였다. 수업 전 주목하기를 탐색하기 위하여 교사 모임에서 Lee 교사가 본인이 실시한 수업 전 학생 평가 과제 결과에 대한 발화, 행동 및 서면 코멘트를 분석의 대상으로 설정하였다. 수업 후 주목하기를 위해서는 교사 모임 안의 수업 나눔 세션에서의 Lee 교사의 발화 및 행동들을 분석하였다. 수업 중 주목하기의 경우, 수업 촬영본을 본 교의 저자인 4명의 연구자가 교차 검토하여 교사 주목하기의 증거들을 추출해내었다. 본 연구의 주요 목적인 교사의 주목하기와 반응적 교수의 관계 분석을 위하여 이론적 배경에서 밝힌 본 연구에서의 반응적 교수의 정의에 따라 수업의 흐름 속에서 교사의 발화가 가지는 의미를 에피소드 별로 해석하였다. Yin(2008)의 질적 연구 방법론과 비디오 분석 및 코딩 방법론(Glaser & Strauss, 2007; MacQueen, McLellan, Kay, & Milstein, 1998; Miles & Huberman,

1994)에 근거하여 연구자들은 반복적으로 비디오와 전사 자료를 분석하고 논의하였으며, 그 결과 수학 수업 상황에서 주목하기와 반응적 교수의 메커니즘을 다음과 같이 세 가지 형태로 도출해낼 수 있었다.

- (1) 사전 예측하기와 발문을 통해 학생들의 현재 수학적 사고에의 주목에 따른 반응적 교수 형태
- (2) 학생들의 수학적 사고 개발 가능성에의 주목에 따른 반응적 교수 형태
- (3) 교실의 모든 학생들을 위한 주목에 따른 반응적 교수 형태

도출해낸 세 가지 형태의 메커니즘의 구체적 내용은 다음 장에서 서술한다.

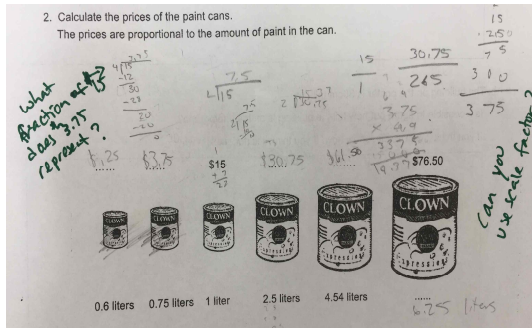
#### IV. 결과 분석 및 논의

학생의 수학적 사고 중심의 수업을 수행하는 교사의 주목하기와 반응적 교수 간의 메커니즘을 분석하기 위하여 Lee 교사가 실시한 FALs 수업 중에서 「비율 문제를 위한 비교 전략 : 비 감각」 수업 패키지를 사용했던 3일간의 수업을 대상으로 하였다. 3일간의 수업은 수업 구조의 변화에 따라 에피소드를 구분 지었으며, 분석 결과 다음과 같은 세 가지 형태의 교사 주목하기와 반응적 교수 간의 메커니즘을 발견할 수 있었다.

1. 사전 예측하기와 발문을 통해 학생들의 현재 수학적 사고에의 주목에 따른 반응적 교수 형태

FALs 수업 패키지에서는 수업 전 학생 평가 과제<sup>17)</sup>를 제공하여 교사로 하여금 사전 주목하기의 기회를 제공한다. 이를 통해 교사들은 사전에 학생들이 가진 오개념과 흔히 범하는 오류의 유형, 어려움을 겪을 것으로 보았던 교사의 예상과 달리 쉽게 받아들이는 수학적 내용에 관한 정보를 수집할 수 있으며 이는 본 수업에서

17) pre-assessment tasks. 우리나라에서는 진단평가 등의 의미로 볼 수 있으나, 이와는 달리, 조금 더 학생들의 개념적 이해에 관련한 어려움이나 오개념을 파악하고 본 수업에 실질 토론 자료 등의 학습을 위해 특별히 설계된 과제이다.



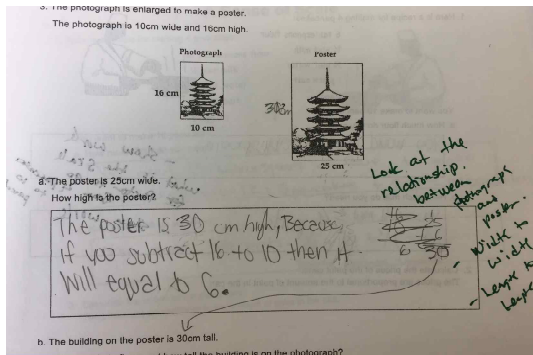
[그림 3] 수업 전 학생 평가 활동지에서 나타난 학생 1의 오개념

[Fig. 3] Misunderstandings of student 1 in the pre-assessment

학생들의 반응 및 이에 내재된 수학적 사고의 발달 기회를 어느 정도 예측할 수 있다. Lee 교사의 경우, 「비율 문제를 위한 비교 전략 : 비 감각」 수업 패키지 진행을 위하여 수업 전 학생 평가 과제를 전시 학습 말미에 학생들이 개별적으로 풀어보게 하였다. 수업 전 학생 평가 과제 결과는 Lee 교사가 참여했던 월별 교사 모임에서 공유되어, Lee 교사는 동료 교사 및 연구자들과 함께 과제에서 드러난 학생들의 비율에 대한 이해 정도 및 오개념을 분석하였다. [그림 3]과 [그림 4]는 수업 전 학생 평가 과제에 나타난 학생들의 수학적 오개념의 예이다. 비례 관계의 이해에서는 상황을 식으로 변환하고 그 식에 포함될 수학적 구조를 파악하는 비례추론이 중요한 요소인데, 많은 학생들이 두 양 또는 두 수를 다루면서 하나의 대상으로 파악하는 일에 어려움을 겪는다(권오남, 박정숙, 박지현, 2007). [그림 3]의 과제는 “페인트의 가격이 페인트의 부피에 비례한다고 할 때, 각 빈칸에 알맞은 가격이나 부피를 구하여라”라는 내용으로, 가격과 부피의 비례 관계를 묻고 있다. 6개의 서로 다른 부피를 가진 페인트 통은 각각 왼쪽부터 0.6L, 0.75L, 1L, 2.5L, 4.54L이며, 가장 큰 페인트 통의 부피는 제시되지 않았다. 페인트 통의 가격은 왼쪽에서 세 번째 것인 \$15와 제일 큰 페인트 통의 가격 \$76.50만이 제시되어 있다. 학생들은 1L짜리 페인트 통의 가격 \$15로부터 비를 찾아내고, 이를 다른 페인트 통의 부피에 적용하여 각각의 통의 가격을 구해야 한다.

[그림 3]에 제시된 해당 학생의 경우, 비례 관계에 대응되는 숫자가 무엇인지 정확하게 인식하여 나머지 통들의 가격을 구하려 시도하였지만, 그 계산 과정에서 오류를 범한 것으로 보인다. 우선, 좌측 상단에 적힌 교사 코멘트(굵은 녹색 글씨)의 오른쪽 세로셈식을 살펴보면  $15 \div 4$ 라는 식을 세워서 계산하였음을 알 수 있는데, 일견 비율의 개념에 올바르게 다가간 것처럼 보이는 이러한 접근이 오답으로 이어진 데에는 다음과 같이 두 가지의 해석을 내릴 수 있다. 첫째로는, 0.75L짜리 페인트 통의 가격을 구하기 위하여 1L짜리 통의 가격을 4로 나누고, 3배하려 하였으나 3배하는 과정을 실수로 빠뜨린 것이다. 2.5L짜리 통의 가격을 구하는 과정에서도  $15 \times 2.5$ 의 식은 올바르게 세웠으나 37.5가 아닌 30.75로 계산실수를 보이는 것으로 보이며, 따라서 이 학생은 0.75L짜리 페인트통의 가격을 구할 때에도 계산실수를 했을 가능성이 다분하다. 또 한 가지의 해석은 미국에서 자주 사용하는 25센트 동전(quarter)의 영향으로 인한 오류 가능성이 있다. 미국에서는 25센트 동전이 일상적으로 사용되기 때문에 0.75라는 숫자는 25센트 동전 3개로 만들어낼 수 있는 친숙한 숫자로 여겨진다. [그림 3]의 학생도 0.75라는 숫자를 보고 quarter의 의미인  $\frac{1}{4}$ 을 떠올리고 \$15를 4로 나누어 얻은 값을 0.75L짜리 페인트통의 가격으로 바로 적었을 가능성도 있는 것이다. 그러나 분명한 것은 이 학생은 0.75L와 1L 두 양의 비율을 통하여 가격을 추론해내는 방식의 사고를 하기는 했다는 것이다. 다만 비례 관계에 있어 기준량은 무엇이고 비교하는 양이 무엇인지에 대한 혼란을 겪고 있는 것으로 보아 비율을 나타낼 때 부분에 대한 부분의 비율과 어떤 양에 대한 다른 양의 비율을 정의하는 데에 어려움을 겪고 있는 것으로 보인다(Baroody & Coslick, 2006). Lee 교사 역시 이와 유사한 사전 주목하기 과정을 거쳤는데, “\$15의 몇분의 몇이 \$3.75가 되는 걸까?”라는 서면 코멘트를 통해 알 수 있다.

[그림 4]의 과제는 도형의 닮음비와 연관된 비율문제로, 하위문항 a는 가로 10cm, 세로 16cm인 사진을 확대하여 가로가 25cm인 포스터를 만들었을 때, 같은 비율로 확장된 세로의 길이는 구하라는 내용이다. 이 과제 앞서 [그림 3]의 과제보다는 좀 더 높은 정답률을 보였으나 여전히 몇몇 학생들에게서는 오류 및 오개념이 관



[그림 4] 수업 전 학생 평가 활동지에서 나타난 학생 2의 오개념  
 [Fig. 4] Misunderstandings of student 2 in the pre-assessment

참되었다. [그림 4]에 제시된 해당 학생은 활동지에 제시된 숫자들을 단순히 더하거나 빼는 등의 의미 없는 연산을 시행하였다. 사진의 세로 길이인 16cm에서 가로 길이인 10cm를 뺀 숫자 6cm를 포스터의 가로길이 25cm에 더하여 30cm의 값을 얻었는데, 이는 실제 덧셈값인 31cm와도 다른 숫자이다. 30cm가 계산실수로 인한 것일 수도 있으나, 한편으로는 이어지는 하위문항 b에서 30cm라는 숫자가 등장하고 이를 해당 학생이 연결했음을 고려해볼 때, 의도적으로 30cm를 적었을 가능성도 존재한다. 이러한 두 가지 가능성 모두 해당 학생이 양과 양 사이의 곱셈적 관계에 대한 이해를 갖지 못함을 의미한다. 학생들의 비례 개념은 곱셈적 사고 이후에 발달하는데, 특히 곱셈적 사고에서 배 개념에 근거한 비례적 추론으로 발달해 나가는 데에 어려움을 겪는다 (Piaget, 1977). 이러한 어려움은 비례 추론의 기반이 되는 양 사이의 곱셈적 관계에 대한 이해가 확고하게 형성되지 않았기 때문이다 (Lamon, 2007). 이에 Lee 교사는 사전 주목하기의 과정에서 해당 학생이 비율에 대한 개념 자체를 정립하지 못한 것으로 해석하여 “사진과 포스터의 관계를 보세요. 특히, 가로는 가로끼리, 세로는 세로끼리”라는 서면 코멘트를 달아주었다.

Lee 교사는 수업 전 학생 평가 과제에 대한 분석을 통하여 학생들이 비교하는 값과 기준 값이 무엇인지, 비와 비율이 무엇인지 등을 이해하는 데에 어려움을 겪는 점을 주목하여 본 수업에서 드러날 학생들의 수학적 사

고에 반응할 준비를 한 것으로 보인다. Lee 교사가 수업 전에 학생들이 비율의 개념 중에 어느 부분을 어려워하고 개념 형성이 덜 되었는지에 주목하고 분석하여, 실제 교실 수업 상황에서 과제를 어떠한 방향으로 제시하고 수업을 어떤 방식으로 진행할지를 체계적으로 계획하는 일련의 과정은 수학적 사고에 집중하는 교사의 주목하기 과정을 보여준다고 할 수 있다. 이 과정에서는 실제 반응적 교수가 이루어지지는 않지만 예측 불허하다고 여겨지는 수학 교실에서 나름의 예측을 통해 수업의 계획을 세우고, 돌발적으로 드러나는 학생의 오개념 및 오류에 적절히 대응할 수 있는 준비를 할 수 있다. 즉, 본 수업에 앞서 충분한 주목하기를 통하여 학생의 수학적 사고 중심의 반응적 교수 실행을 위한 만반의 준비를 하게 되는 것이다.

이제 수업 전이 아닌 실제 본 수업 중에 교사가 학생들의 수학적 사고에 주목하여 실시하는 반응적 교수를 살펴본다. 수업 중 주목하기의 과정에서는 수업 초기 발문을 통해 학생들의 수학적 오개념이나 아이디어들을 모두 수집한 후, 그 중에서 좀 더 개발할 여지가 있거나, 수학적 토론을 위한 적절한 아이디어들을 순간적으로 선택하게 된다. 특히 Lee 교사는 수업 전 학생 평가 과제를 이용한 수업 전 주목하기를 통해 교수학적 추론을 한 결과, 학생들이 [그림 4]의 과제를 다른 과제보다 접근은 쉽게 할 수 있었지만 비율이라는 개념을 사용하지 않거나, 비율의 의미는 모른 채 절차적인 계산만 하였다라는 사실에 주목한 바 있다. 이에 그녀는 수업의 도입부에서 수업 전 학생 평가 과제에 서면 코멘트를 적어 학생들에게 돌려준 후, 자신의 답을 스스로 수정해보도록 유도하였다. 문제들을 순서대로 풀기보다는 사전 주목하기를 통해 가장 쉬운 과제로 판단했던 [그림 4]의 과제부터 먼저 풀도록 지시하였다. 또한 사전 주목하기를 통해 그녀가 발견했던 학생들이 어려워하는 지점을 본 수업 첫차시의 도입 활동인 런칭 활동(학급 전체 토론의 형태)에서 질문함으로써 학생들이 해당 지점에 집중적으로 관여하도록 유도하였다. 다음의 에피소드를 통해 확인할 수 있다. 아래는 에피소드 1-런칭 활동의 일부이다.

40 한 학생이 문제의 지시문을 크게 읽는다.

41 교사 : 좋아, [사진 평가 과제의 제목인] 비 감각 수업입니다. 여러분에게 활동지를 돌려주면, 제출했던 답을 검

토하고 고쳐보세요.

- 42 교사 : 자, 그림 몇 번 문제부터 시작할 건가요, Rina<sup>18)</sup>?  
 43 Rina : 3번이요.  
 44~49 [2명의 학생에게 반복적인 질문 후]  
 50 교사 : 3번[그림 4의 문제]부터 시작할 거예요. 3번 문제를 풀 때 생각해야 할 것들은 뭐가 있을까요? [잠시 대답을 기다린 후.]  
 51 교사 : 우리는 비율 (scale factor)에 대해서 생각해야 해요.  
 52 교사 : 크기가 커지고 있는 도형들은 무엇인가요? 한 도형에서 다른 도형으로 어떻게 바꾸나요? 그리고 도형들은 모두 닮음꼴이에요.  
 53 교사 : 닮음꼴 도형에 대해서 이야기할 때, 이 문제를 풀 때 여러분이 이걸 생각해보기 바랍니다. 빈 칸을 구하기 위해서 비율을 어떻게 사용하는지 생각해보기 바라요.

에피소드 1에서 교사는 수업 전 학생 평가 과제를 다시 풀어보라는 개별 과제를 제시하고 있다. 수업 전 주목하기 과정에서 수집한 학생들이 비율 개념에 대해 겪는 어려움에 대처하기 위하여 비교하는 두 양 사이의 관계를 인식하도록 하는 도입 발문(예를 들어, 52줄, 커지는 도형은 무엇인가요? 이 도형에서 옆의 도형으로 어떻게 갈 수 있을까요? 혹은 53줄, 비율을 어떻게 사용하는지 생각해 보기 바라요.)을 하고 있다. 즉, 수업 전 주목하기를 근거로 비율을 이용하여 접근하도록 하는 반응적 교수를 하고 있는 것이다.

교사의 주목하기 행위는 수업 중에도 빈번히 일어나는데, 학생들이 수학적 사고를 교사에게 드러낼 수 있게 의도적으로 하는 발문들로부터 이를 발견할 수 있다. 교사는 학생들의 수학적 사고를 드러낼 수 있는 의도적인 발문을 통해 개별 학생들의 수학적 사고를 이해하고, 이를 바탕으로 교수학적인 추론을 한다. 이 역시 수업 전 주목하기와도 어느 정도는 관련이 있으나, 수업 전 주목하였던 바를 다시 한 번 확인하거나 혹은 수업 전에는 주목하지 못했던 학생의 수학적 사고를 찾아내기 위한 목적을 갖는다는 점에서 차이가 있다. 아래의 에피소드 3-소그룹 활동에서는 교사의 발문을 통해 수업 중 주목하기가 잘 나타나 있다. Nancy와 Dan은 같은 소그룹원이며, 또한 다음 절에서 인용한 에피소드에 등장하는 Mina 역시 같은 소그룹원으로 총 3명이 같은 소그룹에

서 토론 활동을 하였다.

- 117 교사 : Dan, 너부터 시작해보자구나. 거기서 어떻게 한거니?  
 118 Dan : 그러니까, 6을 풀고... 그리고 사진을 봤어요. 그리고 25인 포스터를 봤어요. 그리고 나서 그 사진의 너비가 10센티미터인 것을 봤어요... 25와 10을 어떻게 얻었는지 알아보려고 나눠봤어요. 그래서 2.5를 구했어요. 그 다음에 16 센티미터 곱하기 2.5가 확대된 것이라고 생각했어요. 그런데 제가 맞는지 모르겠어요.  
 119 교사 : 그래서 네 답은 뭐니?  
 120 Dan : 40?  
 121 교사 : 40. 그러니까 40 센티미터라는 거지? 일단 이걸 여기 적어보자.  
 122 교사 : 그럼 네가 조금 확실하지 않은 부분이 어디니?  
 123 Dan : 그러니까, 곱셈을 하는 부분이요.  
 124 교사 : 그렇구나, 적용하는 부분이 확실하지 않았구나. 그래 좋아.  
 125 교사 : Nancy는 어떻게 하고 있니?  
 126 Nancy : 그러니까, 일단, 10을 2.5로 곱하고, 25센티미터를 구해야 해요. 그런데 10에서 25로 어떻게 갔는지 잘 이해가 안돼요. 25.0이고, 2.5를 그냥 16으로 곱하고, 40을 구했어요.  
 127 교사 : 40 센티미터. 그래.  
 128 교사 : 그럼 여기서 선생님이 질문을 할게. 이 40을 구했을 때, 어떤 부분이 확실하지 않았니? 뭐가 확실하게 않다는 생각이 들게 했니?  
 129 Dan : 이 2.5를 할 때요. 16을 식의 위[분자]에 놓아야 하는지 헷갈렸어요.  
 130 교사 : 그러니까, 6과 10이 2.5의 위에 놓아야 하는지 말이지? 그게 중요할까?  
 131 교사 : 선생님은 Dan이 2.5의 의미를 생각해 보았으면 좋겠어.  
 132 교사 : 여기[2.5가 써있는 곳]에 그냥 2를 놓아볼까? 그렇게 [2.5 대신에] 2를 놓으면, 이 2는 여기 이 10에 어떤 역할을 하는 거지? 그러니까, 10을 2로 곱한다는 것은 무엇을 의미하는 걸까?

에피소드-3에서는 교사는 학생들의 정오답 여부가 아니라 해당 답에 이르기까지 어떠한 수학적 사고 과정을 거쳤는지에 좀 더 주목하기 위하여 다양한 시도를 하고 있다. 교사는 Nancy와 Dan 중에 Dan에게 먼저 어떻게 풀었는지를 물어보고, Dan이 자신의 방법을 설명하게

18) 이 논문에 등장하는 교사, 학생의 이름은 모두 가명이다.

한다. 처음에 Dan은 118줄과 같이 가로로 먼저 살펴보고, 사진은 가로가 10cm, 포스터는 가로가 25cm여서, 두 수를 나누어 보았다고 응답하였다. 그 결과 2.5 라는 수가 나왔고, 이를 문제에 나온 다른 숫자 16에 곱해보니, 40이 나왔다고 설명하였다. Dan의 방법은 절차상으로는 맞는 방법이지만, Ms. Lee 교사는 Dan의 추론이 어떠한지를 알기 위해 집요하게 계속 발문을 던진다(117줄, 119줄, 121줄, 122줄, 128줄). 그 결과 Dan은 교사에게 대답하는 과정에서 본인이 이 방법이 정말로 맞는지 확실하지 못하다는 것을 드러내었다(123줄). 이때, Lee 교사는 바로 Dan에게 옳고 그르다는 평가를 내리지 않고, 어떤 부분이 불확실하게 느껴지는지를 다시 한 번 확인한다(128줄). 이를 통해, 교사는 Dan이 어디서 수학적 이해가 부족한지에 대한 교수학적인 추론을 할 수 있게 되었다. 실제로 Dan은 다시 한 번 본인이 16과 2.5를 왜 곱해야하는지 확실하지 않다고 표현하였다(129줄). 이러한 과정에서 교사는 바로 옳고 그름의 평가를 내리기 보다는, Dan의 짝꿍인 Nancy로 옮겨가서 Nancy의 수학적 사고를 이끌어내는 과정을 반복하고, Nancy 역시 Dan과 같이 절차상으로는 올바른 계산을 하지만 두 수 10과 2.5의 비율 개념을 제대로 이해하지 못하여 본인의 방법에 확신을 갖지 못함을 발견한다. Lee 교사는 발문을 통해 두 학생이 공통적으로 드러낸 부족한 이해를 빠르게 해석하여 교수학적인 추론을 하였는데, 이러한 과정은 두 학생의 응답에 기계적으로 정오답 여부를 알려주는 것이 아니라 그들의 부족한 이해를 채워주는 방향으로 2.5의 의미를 생각해보라던가, 2.5에서 소수점 아래 숫자가 이해하기 어렵다면 2.5 대신 2로 바꿈으로써 10을 2로 곱하는 것의 의미가 무엇인지 생각해보도록 하는 등의 발문을 이어서 했다는 점을 통해 알 수 있다(131줄, 132줄). 이러한 발문이 반응적 교수의 시작점의 대표적인 사례가 된다. 제시한 담화에 이어졌던 발문은 학생의 현재의 수학적 사고의 본질에 주목하여 개념적 이해를 형성시키기 위한 것으로, 다음 절에서 좀 더 구체적으로 서술한다.

## 2. 학생들의 수학적 사고 계발 가능성에의 주목에 따른 반응적 교수 형태

이전 담화에서는 수업 전 학생 평가 과제나 수업 중 발문을 통해 교사가 학생의 수학적 사고에 주목하였다. 이러한 주목하기는 깊이 있는 교수학적인 추론을 통해 학생의 응답의 정오에 대해 선부른 판단을 내리고 시정을 명령하는 형태의 기계적인 반응적 교수를 지양하고자 하는 목적을 갖는다. 자료 분석을 통하여 연구자들은 Lee 교사의 수업 전반에서 수업 전 주목하기 또는 수업 중 주목하기를 통해 학생의 수학적 사고에 주목하기를 실행한 이후에는 항상 교사의 반응적 교수가 이어질 수 있었다. 이때의 반응적 교수는 이전의 주목하기를 통해 수집했던 학생의 수학적 사고의 본질에 대한 정보를 바탕으로 이를 더욱 확장하고, 개발시킬 수 있는 다양한 형태로 나타났다. 예를 들어, 한 개념의 수학적 의미를 구체화시키는 발문을 하거나, 확장된 사고를 유도하는 구체적인 질문, 다른 아이디어에 응용할 수 있는 방안이 있는지에 대한 질문, 서로의 아이디어를 공유하도록 초대하는 발문 등이 그것이다. 이러한 발문들은 반응적 교수의 핵심 요소라고 할 수 있는데, 반응적 교수의 목표이자 방향인 학생의 수학적 사고 계발은 교사의 발문을 통해 실현가능하기 때문이다. 대부분의 교사들이 여러 난점으로 인하여 수업 시간에 하는 발문이 학생들의 깊이 있는 수학적 사고 계발을 유도하지 못하고, 1회성의 단답형 질문만으로 끝나게 되거나, 암기된 공식을 사용하게 하는 것으로 끝난다. 이에 반해, Lee 교사는 학생들의 개념적 이해를 돕고 수학적 사고의 계발을 촉진하기 위해 적절한 발문 혹은 질문과 같은 여러 가지 교수학적인 전략을 이용하였다는 점에서 학생 수학적 사고 중심의 반응적 교수를 실행했다고 판단할 수 있다.

다음의 에피소드는 이전 절에 제시된 에피소드 3의 담화 일부에 이어서 전개된 내용이다. Lee 교사가 에피소드 3에서 주목한 학생의 수학적 사고를 반응적 교수 발문을 통해 어떠한 식으로 계발시켜 나가는지 보여준다.

130 교사: 그러니까, 6과 10이 2.5의 위에 놓여야 하는지 말이지? 그게 중요할까?

131 교사: 그리고 2.5의 의미를 생각해보기 바라.

132 교사: 너희 여기에 그냥 2를 놓고, 그냥 2를 놓으면, 여기 10에 2로 뭘 하고 있는 거지? 뭘 의미하지? 10을 2로 곱하는 건?

- 133 Dan: (……)
- 134 교사: 그럼 10은, 2배가 되고 있어, 그렇지? 2배를 하고 있는 거야. 10 곱하기 2는 10을 2배하는 거야, 맞지? 10을 2배하면 뭘을 얻지?
- 135 Dan: 20.
- 136 교사: 그래, 20, 맞지?
- 137 교사: 그런데 지금 말하고 있는 건, “잠깐만 난 25를 얻지 못하고 있잖아”라고 하고 있는 거지?
- 138 Dan: 네, 제가 보조 선생님께도 그렇게 말했어요. 제가, 정말 그렇게 쓸 수 있다고 생각하지 못 했어요 왜냐하면 그럼 다음 숫자인 5를 어떻게 하죠? 선생님이, 이걸 어떻게 곱하고, 나누는지 기억하는지 물으셨고, 저는 “아 맞아!”라고 떠올렸죠.
- 139 교사: 좋아, 선생님이 너희가 생각해봤으면 했던 게 이거야. 10 곱하기, 10을 2배하면 20을 얻는댜, 맞지? 그런데 나는 25를 구해야해. 그럼 10에 무얼 곱해야할 지 생각해볼까 바란다.
- 140 Mina: 2.5?
- 141 교사: 여기 이 숫자를 얻기 위해서 말이야. 25를 갖기 위해서 여기 있는 이 숫자가 무엇이어야 하지?
- 142 Mina: 5?
- 143 교사: 그래, 여기가 5 이어야 해, 맞지? 왜냐하면 20 더하기 5가 25를 만드니까, 맞지? 내가 10을 2배하면 20을 얻는데, 그럼 10에 무얼 해야 5를 얻지?
- 144 Nancy: 2로 나눠요?
- 145 교사: 그래 2로 나눠. 그것도 하나의 방법이지. 내가 2로 어떤 수를 나눌 때, 무엇, 아니다, 6을 2로 나눈다고 하면 무슨 값을 얻지?
- 146 Mina: 3.
- 147 교사: 그럼 3은 뭐야?
- 148 Mina: 절반?
- 149 교사: 그래 절반이야, 맞지? 절반을 하는 거야. 그러니까 우리가 2로 나눌 때 우리는 어떤 수의 절반을 얻는거야. 그래서 여기서 절반을 얻게 되면, 절반을 소수로 표현하면 뭐지?
- 150 Mina: 0.5?
- 151 교사: .5.
- 152 교사: 그러니까 이제 Nancy가 이 이해를 바탕으로 10에서 25로 어떻게 바꾸었는지 설명해볼래?
- 153 교사: Nancy야, Mina에게 설명해봐.
- 154 교사: 그리고 Mina는 마지막 조원에게 이 모든 걸 설명해봐, 알았지?

직전의 주목하기 단계를 통해 Lee 교사는 Dan과

Nancy가 16에 2.5를 곱해서 답을 구한다는 것은 알지만 비율로서 2.5의 의미를 명확히 이해하지는 못함을 확인한 바 있다. 비례추론에 있어 기준량과 비교하는 양 사이의 관계를 나타내는 비율인 2.5를 명확하게 이해시키기 위하여 교사는 132줄과 같이 우선 2.5 대신 2를 먼저 생각해보도록 유도하였다. 교사가 2.5 대신 2를 도입한 것은 두 가지 의도가 있었는데, 첫 번째 의도로는 2.5보다는 2라는 숫자가 학생들이 다루기에 용이하였기에 2를 곱하는 상황을 미루어 2.5를 곱하는 상황을 생각해보도록 하는 아이디어의 적용을 위한 발문을 한 것이다. 139줄에서 10을 2배해서 일단 20을 구했음을 통하여 10에서 얼마를 곱해 25를 만들 수 있는지를 물어본 교사의 후속 발문에서, 곱하기 어려운 2.5 대신 계산하기 쉬운 2를 우선 곱하도록 하였음을 확인할 수 있다. 두 번째 의도로는 25를 20과 5로 분리하여 기준량 10과의 관계를 탐색하게 함으로써 비율을 접근하는 또 다른 전략, 접근하기 쉬운 두 수로 분리하기를 소개하는 아이디어 및 전략을 제공하기 위한 발문을 한 것이다. 이것은 이후에 이루어진 발문 141줄과 143줄을 통해 확인된다. 141줄에서 교사는 바로 직전에 10의 2배를 하여 구해놓은 20을 가리키며 25를 만들기 위해 얼마가 더 필요한지를 물어봄으로써 20과 5를 분리하는 전략을 소개하였고, 143줄에서는 5가 기준량 10과 어떠한 관계를 갖는지를 탐색하게 함으로써 이러한 분리 전략을 통해 비율을 구해내는 과정을 유도하였던 것이다. Ms Lee의 이러한 발문들은 학생들이 비율이라는 수학적 개념을 단순히 공식을 통해 구해내는 숫자 이상으로 다양한 접근을 통해 그 의미를 스스로 추론해 나가도록 도와주는 사례가 된다.

하지만 때때로 Lee 교사의 반응적 교수가 외려 혼란을 일으킬 소지가 있는 경우도 있었다. 145줄에서 교사는 나누기 2의 개념을 구체적 사례를 통해 설명하기 위해 6 나누기 2를 물어보는 발문을 하였다. 얼핏 보기에 이는 전술한 아이디어 적용하기 발문의 일종으로 직관적으로 쉽게 나눌 수 있는 숫자를 통해 개념을 이해시키는 좋은 전략인 듯하다. 그러나 해당 과제에서 원본 사진의 세로가 16cm로 주어졌고, 과제의 핵심이 16의 2.5배를 구하는 것이며, 사전 주목하기를 통해 많은 학생들이 16을 10과 6으로 분리하여 구하는 전략을 선택하였음을 고려해볼 때, 학생들은 자신들의 풀이과정에 등장하는 6이

라는 숫자는 2로 나누어야한다는 잘못된 메시지로 받아들일 수 있게 된다. 반응적 교수를 위해 구체적 사례로 다른 숫자를 도입할 때에는 과제에서 사용되는 숫자들을 면밀히 살펴 중복되지 않는 숫자를 선택해야 함을 확인할 수 있다.

Lee 교사는 에피소드 3 전반에 걸쳐 Dan, Nancy, Mina 세 명으로 이루어진 특정 소그룹 활동에 대한 반응적 교수활동을 진행하였는데, 그녀가 여기에서의 반응적 교수를 어떠한 식으로 마무리하였는지에 주목해볼 필요가 있다. 152줄에서 154줄을 보면, 교사는 해당 그룹에서 이동하기 전에 학생들로 하여금 서로가 이해한 바를 자신의 언어로 다시 서로에게 설명해주도록 하는 토론으로 초대하기 목적의 발문을 하면서 떠난다. 이는 다인수 학습에서 여러 개의 소그룹을 지도해야 하는 교사라면 누구나 당면하는 시간이라는 제한을 극복하는 하나의 사례로 볼 수 있다. 교사의 충분한 반응적 교수 이후, 학생들이 자신의 말로 이해한 바를 표현하고 다른 사람의 설명을 통해 자신의 생각을 반성하는 데에 드는 시간은 그들의 이해를 굳건히 하기 위해 반드시 필요하다. 그러나 이 시간까지 교사가 함께 하기에는 물리적 시간이 턱없이 부족한 현실에서 많은 교사들이 이 과정을 생략하는 데에 비하여, Lee 교사는 학생들 간의 토론으로 초대하기를 지시해줌으로써 이 한계를 극복하고자 한 것이다. 또한 154줄과 같이 Mina가 가장 나중에 말하도록 함으로써 학생 활동의 순서를 정해 주었는데, 이는 교사가 없는 상황에서도 서로에게 설명하는 활동의 질을 담보하기 위한 것으로 보인다. 이전의 주목하기를 통해 Lee 교사는 세 명의 학생 중에서 Mina의 이해도가 가장 낮음을 파악하고 있었고, 이를 바탕으로 다른 이해도가 비교적 높은 다른 두 명이 먼저 설명하여 Mina가 듣게 한 뒤에 자신의 말로 설명하게 하는 것이 생산적일 것이라는 교수학적 추론을 통하여 해당 발문을 한 것이다. 이 여기서 Lee 교사는 자신의 주목하기를 반응적 교수와 상당히 밀접하게 관련 짓고, 수학적 사고의 계발이라는 목적을 위해 다양한 형태의 반응적 교수활동을 하고 있음을 알 수 있다.

3. 교실의 모든 학생들을 위한 주목에 따른 반응적 교수 형태


다인수 학습이라는 현실적인 제약 하에서 수학 교사의 반응적 교수는 다수의 학생들의 다양한 수학적 사고가 서로 시너지를 내도록 하는 하나의 극복 방안이 된다. 이 과정에서 일어나는 수학적 의사소통은 학생들이 자신의 수학적 사고를 확장해나가는 과정에서 사회적 합의의 형태로 드러나기도 한다. 이은정, 이경화(2016)는 교사가 학생들이 지닌 사전지식에 주목하여 학생들 간의 상호작용을 촉진시키고, 이를 통해 학습 기회를 만들어 나가는 것을 확인한 바 있다. 이렇게 교실에서 일어나는 모든 상호작용은 교실의 구성원들 사이의 교실의 문화를 반영하며(조형미, 권오남, 배영곤, 이아란, 2014), 교실 전체를 하나의 담론 공동체<sup>19)</sup>로 구성해 나가는 것이 사회문화적 맥락에서 수학 학습에 효과적이라는 연구들이 있다(Ball, 1993; Cobb & Bauersfeld, 1995; Cobb, Yackel, & Wood, 1993; Lampert, 1990; Murata et al., in press). 본 연구는 이러한 선행연구들에서 한발 더 나아가, 의사소통이 활발하게 일어나는 교실 문화를 형성하고, 담론 공동체를 구성하는 것이 개별 학습자의 수학 학습을 도와줄 뿐만 아니라, 모든 학생들이 수학 학습의 기회를 가질 수 있는 중요한 교수 학습 방안의 한 요소임을 피력하고자 한다. 이를 위하여 이전 절과는 다른 형태의 주목하기로써, 모든 학생을 위한 주목하기 및 이에 따른 반응적 교수를 Lee 교사의 수업에서 알아보고, 교사의 이러한 행위들이 교실 전체를 어떻게 하나의 담론 공동체로 구성하게 되었는지를 밝힐 것이다.

에피소드 7-마무리 토론은 Lee교사가 「비율 문제를 위한 비교 전략 : 비 감각」 수업 패키지를 실시했던 세 번째 날이자 마지막 날로, 앞서 이틀 간 했던 개별 및 모둠 활동 내용에 대한 토론이다. 본 에피소드에서 토론하고 있는 과제는 팬케이크를 만들기 위한 밀가루의 양을 묻는 비례문제로 [그림 5]와 같으며, Felcia라는 학생의 풀이는 [그림 6]과 같다. Lee 교사는 [그림 5] 과제에 대한 Felcia라는 학생의 풀이([그림 6] 참조)에서 드러난 Felcia의 수학적 사고에 대한 토론을 진행하였다. 여기서는 Lee 교사의 주목하기에 기반한 반응적 교수가 주목-반응이 반복되는 순환적인 형태가 아니라, 학생들로 하여금 토론을 도모하고 이를 통해 교실에서의 합의된 수학적 의미 형성을 유도하기 위하여 특정 형태의 반응적

<sup>19)</sup> discourse community

1. Here is a recipe for making 4 pancakes:

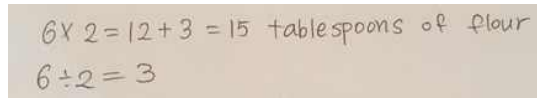
- 6 tablespoons flour
- ¼ pint milk
- ¼ pint water
- 1 pinch salt
- 1 egg



You want to make 10 pancakes.  
a. How much flour do you need?

[그림 5] 토론 과제

[Fig. 5] The task of discussion In the episode 7



[그림 6] Felcia 학생의 토론 과제 해결 과정

[Fig. 6] Felcia's solving process of the task

교수가 지속적으로 반복됨을 확인할 수 있었다.

100 교사 : 자 그럼 Udo, Ben, 그 다음에 Tina 순으로 갈게. 시작- 아니다, Udo 말고 Rina부터. 자 Rina 시작해보자. Felcia가 무슨 생각을 하고 있었을까?

101 Rina : 음, Felcia는 밀가루 4숟가락으로 4개의 팬케이크를 만들 수 있다고 생각했어요. 그런데 10 있으니까, Felcia는 4 더하기 4, 그러니까 8을 할 수 있고, 6숟가락을 두 번 더했으니까 12가 되고, 그 후 6숟가락을 2 숟가락으로 나누어서- 어, 2 팬케이크, 는 10이 돼요.

102 교사 : 그러니까 Rina, 네가 선생님보다 Felica를 더 잘 이해하고 있는 것 같은데 조금만 천천히 설명해보자. 자 그럼 설명해볼까? 팬케이크 4개가 있고, 밀가루 6숟가락이 있어, 그 다음에 뭘 했지?

103 Rina : 그러니까, 10에 다시 4를 더할 수 있고, 그러면 6숟가락을 더 더하니까 8이 돼요.

104 교사 : 자 그럼 두 배를 하고 있는 거네- 그러니까 우리는 8개의 팬케이크를 만들고 있어. 왜냐하면 4 더하기 4는 팬케이크 8개를 만드니까. 그러니까 밀가루 6숟가락을 두 배 하고- 여기 6숟가락에 6숟가락 더. 그러니까 개네를 더해서, 그러니까 우리는 팬케이크 4개에 팬케이크 4개를 더해서 8개가 됐어. 6 더하기 6은 그러니까, 계속해봐, 그 다음엔?

105 Rina : 그 다음엔, 그러니까, 2개를 만들기에만 충분하니까, 팬케이크를 2개만 더 만들면 되니까, 4를 2로 나누어서 2를 구했고, 그 다음에 6숟가락을 2로 나누어서 3

을 구했어요. 그 다음에 거기에 더해서 15를 구했어요.

106 교사 : 좋아. 그러니까, 지금 Felica가 팬케이크 4개를 생각하고 있다는 거지? 그걸 두 배 하면, 8개의 팬케이크를 만들 수 있고, 팬케이크 수를 두 배 했으니까 필요한 밀가루 숟가락 수도 두 배해야해서 6을 곱해, 그걸 두 배해, 그래서 6 더하기 6이 있는 거지. 그런데 나는 10개의 팬케이크를 만들어야해. 내가 8개 밖에 없으니까 2개가 더 필요한데, 그러면 6숟가락의 절반인 3이 필요해. 그러니까 6 더하기 6은 12, 더하기 3은 15. 좋아. Rina 발표를 듣고 다른 사람한테도 물었는데 누구였지? Lily이었나? 자 이야기해보자. Rina, Lily, 그 다음에 Pam 순이었던 것 같아.

107 Lily : 저도 동의해요. Rina가 말한 모든 걸 말하려 했어요. 그런데 음, 그러니까, Felica는 비율(proportion)을 만들고 있었어요. 만약 그녀가 위의 수에 조작을 하면, 아래에도 해야 해요.

108 교사: 비율(proportion)이라고 사용한 단어가 굉장히 마음에 드는구나. 네가 사용한 그 표현이 아주 마음에 들어- 위의 수에 무언가 조작을 하면, 아래에도 해야 한다. 그럼 이제 연산(operations)에 대해서 이야기 해보자. Lily가 말하고 있는 것은 이 팬케이크 수를 2로 곱하면 밀가루 수도 2로 곱해야한다는 것이지. 그러니까 팬케이크 4개를 2로 곱해서 8개 팬케이크를 얻고, 밀가루에도 마찬가지로 연산을 해야 하지- 6을 2로 곱해서 밀가루 12숟가락을 구할 수 있어. Tina 더 하고 싶은 말이 있나?

109 Tina : 제가 하려던 거예요.

110 교사 : 네가 하려던 거니? 그래 좋아. Mary야, 왜?

111 Mary : 저 다른 방법이 있어요.

112 교사 : 일단 우리는 Felica의 방법만 설명해볼 거야 알겠지? 좋아, 고마워. 자 그럼 이제부터, Nicole에게 풀이 방법을 설명해보이도록 물어볼 거야. Nicole, 시작해보렴. 활동지에 흥미로운 방법을 사용한 걸 발견했단다. Nicole, 저기 나와서 네 방법을 좀 설명해주겠니?

에피소드 7에서도 이전 에피소드들과 마찬가지로 학생 사고를 이끌어내고, 학생의 사고를 확인하기의 발문이 반복되고 있었다(100줄, 102줄, 104줄, 106줄, 108줄, 110줄, 112줄). 그러나 이러한 발문의 목적은 주목하기의 목적을 갖기 보다는 다인수 학급 전체를 대상으로 하는 마무리 토론인 만큼, 될수록 많은 학생들을 참여시키기 위한 것으로 보인다. 104행부터 106행까지 교사는 한 학



생이 발표한 내용을 바탕으로 요약하고, 106행의 마지막 부분처럼 Lily를 비롯하여 다른 학생들에게 발표 학생의 이야기를 다시 설명하거나 의견을 제시하도록 유도함으로써 학생들의 이해 간에 합의를 이끌어내는 분위기를 형성한다. 이 때, 소그룹에서 일치하기 힘들었던 수학적 이해가 공유되면서 학생들은 다른 소그룹에서 합의된 수학적 이해로 넓혀갈 수 있는 기회가 제공된다. 또한 새로 소개된 수학적 이해를 본인의 어휘를 사용하여 설명해 봄으로써, 본인의 이해와 상대의 이해가 일치하는지 재확인 할 수 있다. 108행에서 교사는 Lily가 사용한 단어를 다시 언급하면서 학생들이 새로운 수학적 표현을 그냥 지나치지 않도록 하고 있다. 그리고 교사는 다시금 학생이 발표한 내용을 요약하면서 Tina가 덧붙일 말이 없는지 물어보고 토론으로 초대하기 형태의 반응적 교수를 실천한다. Tina가 본인도 같은 방법을 설명하려고 했다는 답을 통해 학생들이 합의된 수학적 의미를 만들어가고 있음을 관찰할 수 있다. 112행에서는 교사가 제 3의 학생을 지목함으로써 새로운 에피소드가 시작되는 지점임을 확인할 수 있다.

에피소드 8-마무리 토론의 경우, 전체 학급을 대상으로 한 학생 발표가 이어졌기 때문에 학생 개개인의 사고에 대한 반응적 교수보다는 특정 학생의 발표 내용을 전체 학생이 이해할 수 있도록 이에 대한 요약을 제공하는 형태의 반응적 교수가 주로 일어났다. 이러한 형태의 수업에서 발표 학생에게 교사가 던지는 발문(예를 들어, 수학적 의미 증명하기, 사고 확장하기, 아이디어 제공하기)들은 이를 듣고 있는 전체 학생들에게도 각자 나름대로 생각해 볼 수 있는 기회를 제공하는 역할을 하기도 한다. 다음은 에피소드 8의 일부이다. 여기서도 마찬가지로 교사는 다양한 질문을 던지는데, 이때의 질문은 질문 직전에 대답했던 학생이나 이후에 대답할 학생에게만 해당되지 않는다. 좀 더 포괄적인 특징을 드러낸다.

- 143 교사 : Jamie, 미안하지만 처음부터 다시 시작해주겠니 - 어떤 생각을 하고 있었지?  
 144 Jamie : 그러니까, 그녀는 6 더하기 6 더하기 3이 15라는 것을 알고 있었고, 그 다음에...  
 145 교사 : 좋아, 그럼 왜 6 더하기 6을 한 거지?  
 146 Jamie : 왜냐하면 그 2가 하나... 아니 그러니까 그 하나가 얼마나...

147 교사: 왜냐하면 얼마나 뭐? 이건 6순가락이야, 그렇지? 그럼 왜 6순가락에 6순가락을 더하고 있는 거지?

148 Jamie : 음..

149 교사 : 그거에 대해서 조금 더 생각해보면 좋겠어. 생각해봐- 이제 발표하지 않은 사람한테 물어볼 거예요. 자, 이제 Kathryn한테 물어볼게. 왜 이 사람은 [여기 6을] 더하고- 그 다음에 다시 물어볼 거야. 자 들어보자. 왜 이 사람은 여기 6 더하기 6을 한 걸까, Kathryn?

150 Kathryn : 왜냐하면 6순가락, 8개의 팬케이크를 만들려면 6순가락이 필요하고, 그 다음에 15를 얻기 위해서는 3개를 더 더했어요.

151 교사 : 잠깐, 선생님이 흐름을 놓쳤어. 왜 6에 6을 더하고 있지, 다시 설명해볼래?

152 Kathryn : 왜냐하면 12 더하기 3은 15예요.

153 교사: 그렇지, 15라는 거는 이해했어, 그런데 Racheal이 왜 6에다가 6을 더했지?

154 Kathryn : 6순가락...

Lee 교사는 에피소드 8 전반에 걸쳐서 왜라는 질문을 지속적으로 던진다. 이러한 질문은 표면적으로는 특정 학생을 겨냥한 듯이 보이지만, 그 행간을 읽어보면 특정 학생보다는 학급 전체를 겨냥하여 발문하였던 것임을 쉽게 추측할 수 있다. 왜냐하면 여느 교사처럼 Lee 교사 역시 수업의 마지막 단계인 학급 전체 토론을 통해 전체 학생들의 수학적 이해를 마지막으로 점검하고자 하였기 때문이다. 예를 들어, 교사는 왜라는 질문을 던진 후 여러 번 생각해보고 답할 기회를 주지만 Jamie가 답을 하지 못하자, 다른 친구에게 발언권을 주면서 Jamie에게 돌아오겠다고 하며 생각할 시간을 준다. Jamie의 입장에서는 친구의 답변을 참조하거나 자신의 새로운 아이디어를 생각해내는데 충분한 시간과 아이디어를 제공받는 셈이고, Jamie의 시간을 벌기 위해 질문을 받아야 했던 Kathryn의 입장에서도 앞서 Jamie가 경험했듯이 수학적 사고를 확장할 수 있는 기회를 얻게 되는 것이다. 따라서 마무리 토론에서 이루어진 “왜?”라는 질문은 교사가 지목한 학생 당사자에게는 사고 확장하기 형태의 반응적 교수인 동시에 반 전체 학생들에게는 수학적 사고를 촉진하는 형태의 반응적 교수가 되는 셈이다.

에피소드 7과 8을 통하여 살펴본 Lee 교사의 반응적 교수는 이전 절에서 살펴본 소그룹 토론 활동에서의 반응적 교수와는 구분되는 또 다른 특징을 발견할 수 있었

다. 이는 학급 전체가 참여하는 상황에서 던지는 발문 및 반응적 교수의 목적이 특정 학생의 수학적 사고를 발달시키는 데에서 나아가 서로의 수학적 사고에 관심을 갖도록 수학적 의사소통이 활발하게 일어나게 하며, 다른 학생의 수학적 사고가 촉진되는 기회가 동시에 자신의 수학적 사고가 촉진되는 기회가 되도록 하는 데에 있기 때문이다. 즉, 교사는 이전의 주목하기와 반응적 교수를 통하여 학생들 간의 수준 차를 인지하고 있었고, 이러한 정보를 바탕으로 다양한 수학적 수준을 가진 학생들의 상호작용을 돕는 전체 토론을 유도하고 조율함으로써 학급 전체를 모든 학생이 참여하고 수학적으로 상호작용하는 하나의 담론 공동체로 구성하고자 하였다. 이는 동시에 해당 학급의 모든 학생들의 수학적 개념 발달을 목적으로 하는 보다 확장된 형태의 반응적 교수라고 할 수 있다.

## V. 결론 및 제언

수학 교사는 수업 중 학생의 수학적 사고를 계발시키기 위하여 다양한 시도를 하게 된다. Lee 교사 역시 그러했는데, 그녀는 학생 수학적 사고의 본질에 주목하여 얻어낸 정보를 바탕으로 그들의 수학적 사고를 더욱 계발시키기 위한 다양한 반응적 교수를 보여주었다. 주어진 상황을 학생 수준에 맞추어 직관적으로 조작하기 쉬운 숫자로 바꾸어 사용해보자는 아이디어를 통해 학생들이 유사하지만 조금 다른 상황에서 아이디어를 가다듬을 기회를 제공하였기도 하였고, 주어진 숫자를 조작하기 쉬운 두 개의 숫자로 쪼개어서 계산하는 전략을 알려줌으로써 학생의 수학적 사고를 촉진하기도 하였다. 또, 토론으로 초대하기를 통해 학생 서로 간의 토론을 하게 하여 수학적 의사소통 및 상호작용이 일어날 수 있도록 하였다. 이러한 반응적 교수는 즉흥적인 것처럼 보이지만, 면밀한 수업 전 주목하기의 결과이자 수업 중에도 끊임없이 학생들의 현재 수학적 사고 수준에 지속적으로 주목한 결과이기도 하다. 이를 통해 Lee 교사는 학생들에게 일방적으로 공식을 주입하는 것이 아니라 그들의 현재 상태에 대한 진단을 통해 수학적 이해를 능동적으로 형성해 나가도록 끊임없는 지원을 하며, 소그룹의 모든 학생과 전체 토론에서의 교실의 모든 학생이 함께 수학

적 사고를 계발할 수 있도록 지향하였음을 알 수 있었다.

특히, 마지막으로 제시된 에피소드에서는 교사가 학생들이 발표한 내용을 요약하고, 학생들에게 이를 다시 설명하게 하거나 의견을 제시하게 유도함으로써 다양한 수준에 있는 학생들의 참여도를 높이고, 학생들이 합의된 수학적 이해를 만들어가도록 하는 확장된 형태의 반응적 교수활동을 보여주었다. 이때 소그룹에서 일치되지 않았던 수학적 이해가 모든 학생들과 공유되면서 학생들은 다른 소그룹에서 합의된 수학적 이해를 넓혀갈 수 있는 기회를 제공받았다. 또한 새로 소개된 수학적 아이디어를 본인의 어휘를 사용하여 설명함으로써, 본인과 상대의 이해가 일치하는지 여부를 확인할 수 있었다. 이는 반응적 교수가 수학 내용 뿐 아니라 상호작용하는 교실 수업 맥락 ([그림 2] 참조) 속에서 어떻게 학생들의 수학 학습과 긴밀한 관계를 맺고 있는지를 보여준다. 이러한 연구 결과는 수학 교실 수업을 개선하기 위한 반응적 교수가 소그룹 혹은 학급 전체 토론을 통해 어떤 식으로 모든 학생들을 수학적 논의에 참여시키고 그들의 수학적 사고를 계발시킬 수 있는 지를 구체적 형태로 제시했다. 이는 점에서 의의가 있다.

일선 현장에서는 학생의 수학적 사고를 유의미하게 계발하기 위한 교사의 적절한 반응적 교수에 대한 관심이 커지는 데에 반하여 반응적 교수를 효과적으로 실행하는 실제 수업의 형태는 어떠한지, 그 메커니즘이 무엇인지에 대해 연구된 바는 극히 적다. 본 연구는 실제 수업 사례를 통하여 학생의 수학적 사고 본질에 대한 교사의 주목하기와 그에 따른 반응적 교수와의 관계는 반응적 교수에 선행하는 교사의 주목하기의 목적에 따라 반응적 교수의 종류가 결정됨을 제안하였다. 같은 형태의 반응적 교수라 할지라도 선행된 주목하기에 따른 교수학적 추론에 따라 전혀 다른 목적으로 실시되었으며, 실제 수업의 맥락은 반응적 교수의 형태가 아니라 주목하기의 목적에 따라 진행되었기 때문이다. 이에 따라 주목하기와 반응적 교수의 메커니즘은 발문을 통해 학생들의 현재 수학적 사고에의 주목에 따른 반응적 교수, 학생들의 수학적 사고 계발 가능성에의 주목에 따른 반응적 교수, 교실의 모든 학생들을 위한 주목에 따른 반응적 교수의 세 가지 형태로 분류할 수 있었다. 동시에 세 가지의 형

태들은 다인수 학급에서 학생 개개인의 수학적 사고 계발을 위해 교사가 선택하는 혹은 선택 가능한 교수 행동들을 의미하기도 한다. 결국 이러한 반응적 교수의 형태들은 반응적 교수가 수학적으로 유의미하게 이루어지는 실제 교실의 모습을 분석적으로 드러내어 줌으로써 연구자뿐만 아니라 현장의 교사들에게도 교실 수업 개선에 함의를 줄 수 있다.

사실 많은 수학 교사들이 발문의 중요성을 인지하고 실제 수업에서 많은 발문을 던지고자 노력하지만, 발문을 던지고 난 다음에는 어떻게 반응하고 수업을 끝어나가야 할지에 대한 막연함을 호소하며, 구체적인 수업 사례를 통해 교육 현상을 경험하고 논의할 수 있는 교사 전문성 신장 프로그램을 요구한다(방정숙, 2006; 방정숙, 김상화, 최지영, 2009). Lee 교사가 포함된 TRU Math 프로젝트에 참가하였던 대부분의 교사들 역시 비슷한 어려움을 호소하였으며, Lee 교사의 수업에서 밝힌 학생의 수학적 사고 중심의 반응적 교수 메커니즘을 활용한 실제적인 전문성 신장 방안에 대한 후속 연구를 통해 교사들이 겪는 어려움을 해소하는 데에 기여할 수 있을 것이다. 본 고에서 도출해낸 연구 결과는 발문에 선행하는 주목하기에 따라 반응적 교수가 유의미하게 이루어짐을 보여줌으로써, 교사의 실질적인 교실 수업 개선을 위해서는 교사가 교실에서 하는 주목하기의 목적을 재고하는 것으로부터 시작해야 교수 행동의 변화를 가져올 수 있음을 함의한다.

이 연구는 학생 중심의 수학 수업을 실현하기 위하여 주목하기와 그에 따른 반응적 교수 행위를 다양하게 드러냈던 Lee 교사의 사례를 통하여 교사가 학생들의 다양한 수학적 사고를 포착, 해석 및 반응하는 형태를 반응적 교수 모델을 기반으로 논의하였다. 이는 향후 다양한 경력의 교사 및 교수학습 상황에서의 연구로 확장 가능하며, 특히 초임교사와 경력교사의 주목하기와 반응적 교수 간의 메커니즘을 비교함으로써 수학 수업 전문성을 수업 상황 맥락에서 밝히는 데에 일조할 수 있을 것이다. 또한 모바일 시선 추적기와 같은 첨단기기를 도입하여 주목하기와 반응적 교수 간의 메커니즘을 인지신경과학에 기반하여 밝히는 후속 연구로의 확장 또한 가능할 것이다.

## 참 고 문 헌

- 권오남, 박정숙, 박지현 (2007). 중학교 교육과정에서 비례적 사고가 필요한 수학 개념 분석, 수학교육 46(3), 315-329.
- Kwon, O. N., Park, J. S., & Park, J. H. (2007). An analysis on mathematical concepts for proportional reasoning in the middle school mathematics curriculum, *The Mathematical Education* 46(3), 315-329.
- 방정숙 (2006). 학생중심 초등수학 교실문화의 구현과 난제, 수학교육 45(4), 459-479.
- Pang, J. (2006). Successes and difficulties in transforming elementary mathematics classrooms to student-centered instruction, *The Mathematical Education* 45(4), 459-479.
- 방정숙, 김상화, 최지영 (2009). 초등 교사의 수학과 전문성 신장을 위한 사례기반 교수법의 개발 및 적용, 수학교육 48(1), 61-80.
- Pang, J., Kim, S., & Choi, J. (2009). Development and application of case-based pedagogy for professional growth in mathematics of elementary school teachers, *The Mathematical Education* 48(1), 61-80.
- 이은정, 이경화 (2016). 교사의 사전 주목하기와 수학수업에서 실제 주목하기에 대한 연구, 학교수학 18(4), 773-791.
- Lee, E. J. & Lee, K-H. (2016). A Study on Teacher's Pre-Noticing and Actual Noticing in Mathematics Classroom, *Journal of Korea Society Educational Studies in Mathematics School Mathematics*, 18(4), 773 ~ 791.
- 조형미, 권오남, 배영근, 이아란 (2014). 한국 수학교실의 상호작용에 대한 연구 동향 분석, 학습자중심교과교육연구 14(6), 363-387.
- Cho, H., Kwon, O. N., Bae, Y., & Lee, A. (2014). Analyzing research trend of interaction in mathematics classroom in Korea, *Journal of Learner-Centered Curriculum and Instruction*, 14(6), 363-387.
- Ball, D. L. (1993). With an eye on the mathematical horizon: Dilemmas of teaching elementary school mathematics, *Elementary School Journal*, 93(4), 373-397.
- Ball, D. L. & Cohen, D. K. (1999). Developing practice, developing practitioners: Toward a practice-based

- theory of professional education. In G. Sykes & L. Darling-Hammond (Eds.), *Teaching as the learning profession: Handbook of policy and practice* (3-32). San Francisco: Jossey Bass.
- Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education* 59(5), 389-407.
- Ball, D. L., Lubienski, S. T., & Mewborn, D. S. (2001). Research on teaching mathematics: The unsolved problem of teachers' mathematical knowledge, In V. Richardson (Ed.), *Handbook of research on teaching* 4, (433-456). New York: Macmillan.
- Baroody, A. J. & Coslik, R. T. (2006). 수학의 힘을 길러주자. (권성룡, 김남균, 김수환, 김용대, 남승인, 류성림, 방정숙, 신준식, 이대현, 이봉주, 조완영, 조경수 공역). 경문사. (원저는 1998년 출판).
- Berliner, C. D. (1994). Expertise: The wonder of exemplary performances. In J. N. Mangieri & C. C. Block (Eds.), *Creating powerful thinking in teachers and students* (161 - 186). Fort Worth, TX: Holt, Rinehart & Winston.
- Black, B. Y. P., Harrison, C., Lee, C., Marshall, B., & William, D. (2004). Working inside the black box: Assessment for learning in the classroom, *Phi Delta Kappan* 86, 8 - 21.
- Blömeke, S., Gustafsson, J.-E., & Shavelson, R. (2015). Beyond dichotomies: Competence viewed as a continuum, *Zeitschrift für Psychologie* 223(1), 3 - 13.
- Bobis, J., Clarke, B., Clarke, D., Thomas, G., Wright, R., Young-Loveridge, J., & Gould, P. (2005). Supporting teachers in the development of young children's mathematical thinking: three large scale cases, *Mathematics Education Research Journal* 16(3), 27 - 57.
- Brown, C. A., Stein, M. K., & Forman, E. A. (1996). Assisting teachers and students to reform the mathematics classroom, *Educational Studies in Mathematics* 31(1/2), 63 - 93.
- Carpenter, T. P., Fennema, E., & Franke, M. L. (1996). Cognitively guided instruction: A knowledge base for reform in primary mathematics instruction, *The Elementary School Journal*, 97(1), 3-20.
- Cengiz, N., Kline, K., & Grant, T. J. (2011). Extending students' mathematical thinking during whole-group discussions, *Journal of Mathematics Teacher Education* 14(5), 355 - 374.
- Cobb, P. & Bauersfeld, H. (1995). *The emergence of mathematical meaning: Interaction in classroom cultures*. Hove U.K.: Psychology Press.
- Cobb, P., Yackel, E., & Wood, T. (1993). Learning mathematics: Multiple perspectives, theoretical orientation. In T Wood, P. Cobb, E. Yackel, & D.Dillon (Eds.), *Rethinking elementary school mathematics: Insights and issues. Journal for Research in Mathematics Education Monograph Series. Number 6*, (21-32). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Glaser, B. G. & Strauss, A. L. (2007). *The discovery of grounded theory: Strategies for qualitative research*. Chicago: Aldine Transaction.
- Goldsmith, L. T. & Seago, N. (2011). Using classroom artifacts to focus teachers' noticing: Affordances and opportunities. In M. G. Sherin, V. R. Jacobs, & R. A. Philipp (Eds.), *Mathematics teacher noticing: Seeing through teachers' eyes* (169 - 187). New York: Taylor and Francis.
- Goodwin, C. (1994). Professional vision, *American Anthropologist* 96(3), 606 - 633.
- Hammer, D. (1997). Discovery learning and discovery teaching, *Cognition and instruction* 15(4), 485-529.
- Hammer, D., Goldberg, F., & Fargason, S. (2012). Responsive teaching and the beginnings of energy in a third grade classroom, *Review of Science, Mathematics and ICT Education* 6(1), 51 - 72.
- Heaton, R. M. (2000). *Teaching mathematics to the new standards: Relearning the dance*. New York:

- Teachers College Press.
- Jacobs, V. R., Lamb, L. L. C., & Philipp, R. a. (2010). Professional noticing of children's mathematical thinking, *Journal for Research in Mathematics Education* 41(2), 169 - 202.
- Jacobs, V. R., Lamb, L. L., Philipp, R. A., & Schappelle, B. P. (2011). Deciding how to respond on the basis of children's understandings. In Sherin, M.G., Jacobs, V. R., & Philipp (Eds.), *Mathematics teacher noticing* (97-116). New York: Routledge.
- Kaiser, G., Blömeke, S., König, J., Busse, A., Döhrmann, M., & Hoth, J. (2017). Professional competencies of (prospective) mathematics teachers –cognitive versus situated approaches, *Educational Studies in Mathematics* 94(2), 161-182.
- Kazemi, E., Franke, M., & Lampert, M. (2009). Developing pedagogies in teacher education to support novice teachers' ability to enact ambitious instruction. In R. Hunter, B. Bicknell, & T. Burgess (Eds.), *Crossing divides: Proceedings of the 32nd annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia 1*, 12-30. Adelaide, SA: MERGA
- Kersting, N. B., Givvin, K. B., Thompson, B., Santagata, R. & Stigler, J. (2012). Developing measures of usable knowledge: Teachers' analyses of mathematics classroom videos predict teaching quality and student learning, *American Educational Research Journal* 49(3), 568-590.
- Kersting, N. B., Sutton, T., Kalinec-Craig, C., Stoehr, K. J., Heshmati, S., Lozano, G., & Stigler, J. W. (2016). Further exploration of the classroom video analysis (CVA) instrument as a measure of usable knowledge for teaching mathematics: taking a knowledge system perspective, *ZDM* 48(1-2), 97-109.
- Kim, H.-J. (2014). Teacher change in teaching practices towards developing students' reasoning in mathematics, *Journal of Korean Society of Mathematics Education* 18(3), 223 - 233.
- Kim, H.-J. (2015). *Teacher learning through practices: How mathematics teachers change in practices with innovative curriculum materials*. Unpublished doctoral dissertation, University of California, Berkeley.
- Lamon, S. J. (2007). Rational numbers and proportional reasoning: Toward a theoretical framework for research. In Frank K. Lester, Jr. (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning 1* (629-668). United States of America: Information Age Publishing.
- Lampert, M. (1990). When the problem is not the question and the solution is not the answer: Mathematical knowing and teaching, *American educational research journal* 27(1), 29-63.
- Lineback, J. E. (2015). The redirection: An indicator of how teachers respond to student thinking, *Journal of the Learning Sciences* 24(3), 419 - 460.
- Lortie, D. C. (1975). *Schoolteacher: A sociological study*. Chicago: University of Chicago Press.
- MacQueen, K. M., McLellan, E., Kay, K., & Milstein, B. (1998). Codebook development for team-based qualitative analysis, *Cultural Anthropology Methods* 10(2), 31 - 36.
- Mathematics Assessment Project (2016a). *Lessons*. Retrieved from <http://map.mathshell.org/lessons.php>
- Mathematics Assessment Project (2016b). *TRU math suite*. Retrieved from <http://map.mathshell.org/trumath.php>
- Mason, J. (2002). *Researching your own practice: The discipline of noticing*. Routledge.
- Miles, M. B. & Huberman, A. M. (1994). *Qualitative data analysis: An expanded sourcebook*. Thousand Oaks, CA: Sage Publications.
- Murata, A., Siker, J., Kang, B., Baldinger, E. M., Kim, H.-J., Scott, M., & Lanouette, K. (in press). Math Talk and Student Strategy Trajectories: The Case of Two First Grade Classrooms. *Cognition and*

- Instruction*.  
National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA.
- National Governors Association Center for Best Practices and Council of Chief State School Officers. (2010). *Common Core State Standards for Mathematics*. Washington, DC: Author.
- Piaget, J. (1977). *Epistemology and psychology of functions* (Vol. 23). Springer Science & Business Media.
- Pierson, J. L. (2008). *The relationship between patterns of classroom discourse and mathematics learning*. Unpublished doctoral dissertation, University of Texas - Austin.
- Research for Action. (2015). *MDC's influence on Teaching and Learning*. Philadelphia, PA: Author. Retrieved June 1, 2017, from <https://www.researchforaction.org/publications/mdcs-influence-on-teaching-and-learning/>
- Santagata, R., Zannoni, C., & Stigler, J. (2007). The role of lesson analysis in pre-service teacher education: An empirical investigation of teacher learning from a virtual video-based field experience, *Journal of Mathematics Teacher Education* 10(2), 123 - 140.
- Santagata, R. & Guarino, J. (2011). Using Video to Teach Future Teachers to Learn from Teaching, *ZDM* 43(1), 133-145.
- Santagata, R. & Yeh, C. (2016). The role of perception, interpretation, and decision making in the development of beginnings teachers' competence, *ZDM* 48(1-2), 153-165.
- Schoenfeld, A. H. (2011). *How we think: A theory of goal-oriented decision making and its educational applications*. New York: Routledge.
- Schoenfeld, A. H. & the Teaching for Robust Understanding Project. (2016). *An introduction to the teaching for robust understanding (TRU) framework*. Berkeley, CA: Graduate School of Education. Retrieved from <http://ats.berkeley.edu> or <http://map.mathshell.org/trumath.php>
- Sherin, M. G. & Han, S. Y. (2004). Teacher learning in the context of a video club, *Teaching and Teacher Education* 20, 163 - 183.
- Sherin, M. G. & Star, J. R. (2011). Reflections on the study of teacher noticing. In M. G. Sherin, V. R. Jacobs, & R. Philipp (Eds.), *Mathematics teacher noticing: Seeing through teachers' eyes* (66 - 78). New York, NY: Routledge.
- Sherin, M. G., Russ, R. S., & Colestock, A. A. (2011). Accessing mathematics teachers' in-the-moment noticing. In Sherin, M.G., Jacobs, V. R., & Philipp (Eds.), *Mathematics teacher noticing* (70-94). New York: Routledge.
- van Es, E. A. & Sherin, M. G. (2002). Learning to notice: Scaffolding new teachers' interpretations of classroom interactions. *Journal of Technology and Teacher Education*, 10(4), 571 - 596.
- van Es, E. A. & Sherin, M. G. (2008). Mathematics teachers' "learning to notice" in the context of a video club, *Teaching and Teacher Education* 24, 244 - 276.
- van Es, E. A. & Sherin, M. G. (2010). The influence of video clubs on teachers' thinking and practice, *Journal of Mathematics Teacher Education* 13(2), 155-176.
- Walkoe, J. (2015). Exploring teacher noticing of student algebraic thinking in a video club, *Journal of Mathematics Teacher Education* 18(6), 523 - 550.
- Yin, R. K. (2008). *Case study research: Design and methods* (Vol. 5). Sage Publications.

## The Relationship between Mathematics Teachers' Noticing and Responsive Teaching: In the Context of Teaching for All Students' Mathematical Thinking

**Hee-jeong Kim**

Department of Mathematics Education, Hongik University

E-mail : heejeongkim@hongik.ac.kr

**Chaereen Han<sup>†</sup>**

Graduate school of Department of Mathematics Education, Seoul National University

E-mail : feelgood81@snu.ac.kr

**Mi Seon Bae**

Graduate school of Department of Mathematics Education, Seoul National University

E-mail : baestephanie@snu.ac.kr

**Oh Nam Kwon**

Department of Mathematics Education, Seoul National University

E-mail: onkwon@snu.ac.kr

This case study contributes to the efforts on identifying the essential features of responsive teaching practice where students' mathematical thinking is central in instructional interactions. We firstly conceptualize responsive teaching as a type of teachers' instructional decisions based on noticing literature, and agree on the claim which teachers' responsive decisions should be accounted in classroom interactional contexts where teacher, students and content are actively interacting with each other. Building on this responsive teaching model, we analyze classroom observation data of a 7th grade teacher who implemented a lesson package specifically designed to respond to students' mathematical thinking, called Formative Assessment Lessons. Our findings suggest the characteristics of responsive teaching practice and identify the relationship between noticing and responsive teaching as: (a) noticing on students' *current* status of mathematical thinking by eliciting and anticipating, (b) noticing on students' *potential* conceptual development with follow-up questions, and (c) noticing for *all* students' conceptual development by orchestrating productive discussions. This study sheds light on the actual teachable moments in the practice of mathematics teachers and explains what, when and how to support teachers to improve their classroom practice focusing on supporting all students' mathematical conceptual development.

---

\* ZDM classification : D70

\* 2000 Mathematics Subject Classification : 97C90

\* Key words : responsive teaching, teacher noticing, student mathematical thinking, formative assessment lessons

† Corresponding author