

큰 수의 법칙 시뮬레이션에서 중학생의 안구 운동 분석

최인용(한성과학고등학교)

조한혁(서울대학교)[†]

I. 서론

확률은 기본적으로 많은 수의 사례와 관련되어 있기 때문에 우리가 일상생활에서 경험하는 단편적인 적은 횟수의 경험들은 확률 직관을 형성하는데 도움이 되지 않는다. 많은 연구자들이 이러한 단편적인 경험과 확률적 사고 사이의 간극을 극복하게 해주는 강력한 도구로 컴퓨터 기반 확률 시뮬레이션을 제안하였다(신보미, 이경화, 2006; Biehler, 1991; Stohl & Tarr, 2002; Wilensky, 1995). 그러나 확률 실험의 결과는 무작위성과 변이성을 띠며, 학생들은 확률에 관한 잘못된 직관이나 신념을 가지는 경우가 많기 때문에(Biehler, 1991; Tversky & Kahneman, 1971; Shaughnessy, Canada, & Ciancetta, 2003), 학생들에게 확률 시뮬레이션 활동은 쉬운 일이 아니다. 확률 학습에서 컴퓨터 시뮬레이션의 긍정적인 효과를 입증하는 많은 선행연구들에는 시뮬레이션 후에도 오개념이 교정되지 않거나 연구자가 의도한 확률 개념을 이해하지 못하는 학생의 사례들이 자주 등장함을 확인할 수 있다(Aspinwall & Tarr, 2001; English & Watson, 2016; Ireland & Watson, 2009; Prodomou, 2012; 이윤경, 조정수, 2015).

ProbSim, TinkerPlot의 개발자인 Konold는 확률 공학 도구를 이용하여 효과적인 학습 내용을 설계하는 작업이 매우 까다롭고 어려운 작업이라는 점을 언급한 바 있다(Konold, 1995). 공학 도구 기반 학습에서 확률 추론의 발달은 수학적 과제, 공학 도구와 학생 사이의 상호작용, 학생 간의 상호작용 및 교사와 학생 사이의 상호작용을

통해 이루어진다(김부윤, 이지성, 2008; Stohl & Tarr, 2002). 따라서 공학 도구 기반 확률 학습이 성공적이기 위해서는 공학 도구 자체뿐만 아니라, 학생에게 제시되는 과제, 공학 도구와 학생의 상호작용, 교사의 역할 등 학습의 사회적 측면까지 고려하여 정교하게 설계되어야 한다. 공학 도구 기반 학습의 설계는 단번에 이루어지는 것이 아니라 학습의 상호작용들에 대한 분석을 기초로 수정, 적용, 평가를 반복하는 순환적인 과정을 통해 이루어진다. 선행연구들은 주로 녹화, 녹취를 통한 과제 수행 과정과 담론 분석(고상숙, 주홍연, 한혜숙, 2014; 이윤경, 조정수, 2015; Inzunsa & México, 2008; Stohl & Tarr, 2002), 포트폴리오 형식의 상세한 활동기록물 분석(Prodomou, 2012; English & Watson, 2016), 사후면담(Inzunsa & México, 2008)을 통해 학습자들의 수학 학습 및 학습 내 상호작용을 평가하고 추론하였다. Abrahamson(2009)은 기호학적 접근을 바탕으로 몸짓(gesture)과 같은 비언어적 정보를 공학 도구 기반 학습에서 학습자의 학습 과정과 상호작용을 밝힐 수 있는 중요한 원천으로 보는 '체화된 디자인(Embodied Design)'을 제시하기도 하였다. 그러나 이러한 분석들은 사후 결과물을 토대로 인지 과정을 추측하거나, 외부에 명시적으로 표현되어 관찰 가능한 정보만을 바탕으로 분석하기 때문에 학습자 내부의 인지과정을 파악하기 어렵고 자료의 시간 해상도가 낮아 수시로 변화하는 학습자의 주의를 분석하기 어렵다는 한계가 있다.

최근 인지 신경과학의 측정도구를 이용하여 보다 객관적인 데이터를 기반으로 학습자의 인지활동을 추론하는 방법들이 제시되고 있는데, 특히 안구 운동 추적은 상대적으로 비용이 저렴하고 안전하면서도 피험자의 사고나 주위의 동적인 변화를 실시간으로 측정가능하다는 점에서 수학교육 연구에 적합하다(Campbell, 2010). 최근 국내외에서 수행된 일부 연구들은 자기보고식 자료와 안

* 접수일(2017년 5월 7일), 수정일(2017년 6월 16일), 게재확정일(2017년 6월 22일)

* ZDM분류 : U73

* MSC2000분류 : 97U70

* 주제어 : 안구 운동, 큰 수의 법칙, 시뮬레이션, 확률교육

† 교신저자

구 운동 추적 데이터의 상호보완적 분석이 학습자의 수학적 인지 과정을 효과적으로 추론할 수 있는 도구임을 보였다(이미진, 이광호, 2015; 이지윤, 2015; 최인용, 조한혁, 2016; Andra et al., 2015; Lin & Lin, 2014; Susac, Bubic, Kaponja, Planinic, & Palmovic, 2014). 그러나 안구 운동을 활용한 수학교육 연구는 아직까지 분수 대소 비교나 심적 수직선과 같은 기초적인 수 인지와 관련된 연구가 대부분이며, 수학 학습이나 문제 해결과 같은 상위 단계의 인지 과정과 관련한 연구는 부족하다.

이러한 배경으로부터, 본 연구는 안구 운동 추적이 공학 도구 기반 학습에서의 상호작용을 분석하는데 객관적이고 유의미한 정보를 제공할 것이라는 가정 하에, 큰 수의 법칙 시뮬레이션 학습에서 중학생의 안구 운동을 분석하였다. 본 연구의 목적은 시뮬레이션 수행 과정 녹화 영상, 응답 내용, 안구 운동 데이터를 통합적으로 분석하여 큰 수의 법칙 시뮬레이션 학습에서 학습자와 시뮬레이션 사이의 상호작용을 분석하고, 과제 설계 시 의도한 학습 및 추론이 이루어지지 못한 원인을 조사하는 것이다. 또한 공학 도구 기반 학습에서 상호작용 분석 도구로써 안구 운동 추적 방법론의 가능성을 확인하는 것이다. 이러한 연구 목적 달성을 위하여 연구 문제를 다음과 같이 설정하였다.

연구문제 1. 큰 수의 법칙 시뮬레이션 학습에서 중학생의 과제 수행 내용, 관심영역별 시선 점유도는 어떠한가?

연구문제 2. 큰 수의 법칙 시뮬레이션 학습에서 과제에서 의도된 추론을 하지 못한 학생들의 안구 운동은 어떤 특징을 보이는가?

연구 문제의 분석 결과를 바탕으로 연구에서 사용된 큰 수의 법칙 시뮬레이션 과제의 수정 방안과 큰 수의 법칙 교수·학습에 관한 시사점 및 안구 운동 추적을 활용한 수학교육 연구에 관한 시사점을 도출하였다.

II. 이론적 배경

1. 큰 수의 법칙

학문적으로 큰 수의 법칙은 상관없는 확률변수의 수가 많아질수록 이들의 평균이 기댓값에 확률 수렴

(converge in probability)한다는 의미이다¹⁾. 만약 확률변수들이 모두 확률 p 인 베르누이 분포를 따른다고 가정하면, 큰 수의 법칙은 독립시행을 n 번 반복했을 때, 성공이 나타난 횟수 X 에 대하여 상대도수 $\frac{X}{n}$ 가 p 에 확률 수렴함을 설명할 수 있다²⁾. 2009 개정 교육과정에서 큰 수의 법칙을 명시적으로 학습하는 것은 고등학교 확률과 통계 교과이다. 그러나 중학교 교육과정에서 확률을 실험이나 관찰 상황에서 구한 상대도수로서의 의미와 경우의 수의 비율로서의 의미를 연결하여 이해하도록 교수·학습상의 유의점으로 제시하고 있기 때문에(교육과학기술부, 2011, p.32), 중학교 수학 2 교과서에는 일반적으로 다음과 같이 큰 수의 법칙이 직관적으로 등장하며 상대도수와 수학적 확률을 연결시킨다.

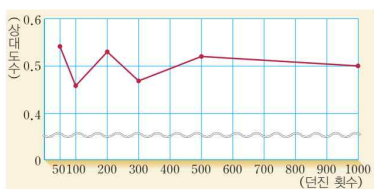
일반적으로 모든 경우가 일어날 가능성이 같은 어떤 실험이나 관찰을 여러 번 반복할 때, 사건 A 가 일어나는 상대도수가 일정한 값에 가까워지면 이 일정한 값은 일어날 수 있는 모든 경우의 수에 대한 사건 A 가 일어날 경우의 수의 비율과 같다. 이때 일어날 수 있는 모든 경우의 수에 대한 사건 A 가 일어날 경우의 수의 비율을 사건 A 가 일어날 확률이라고 하고, 사건 A 가 일어날 확률 p 는 다음과 같다(류희찬 외, 2013, p.212).

그러나 이와 같은 단순히 ‘가까워진다’라는 설명은 신보미, 이경화(2006)가 지적한 바와 같이 학생들이 큰 수의 법칙을 $N > n$ 인 시행 횟수 N 과 n 에 대하여 $\left| \frac{X}{N} - p \right| < \left| \frac{X}{n} - p \right|$ 와 같이 시행 횟수의 증가에 따라 상대도수가 순차적으로(sequential procedure) p 에 수렴하는 것처럼 생각하게 만들 수 있다. 특히 많은 교과서들이(예를 들어, 류희찬 외, 2013; 신항균 외, 2013; 우정호 외, 2013) 이러한 정의를 자연스럽게 이끌어내기 위해 [그림 1]과 같은 누적 상대도수 그래프를 제시하는데, 이 그래프들은 $\left| \frac{X}{N} - p \right| < \left| \frac{X}{n} - p \right|$ 를 만족시키는 형태이기

1) 큰 수의 법칙에는 강한 법칙과 약한 법칙이 있다. 본문에서 설명하고 있는 큰 수의 법칙은 교육과정에서 다루고 있는 약한 법칙을 의미한다.

2) 현대적 정의의 큰 수의 법칙을 독립시행에 적용한 것이 베르누이의 큰 수의 법칙에 해당한다.

때문에 이러한 오개념을 더욱 강화시킬 위험이 있다.

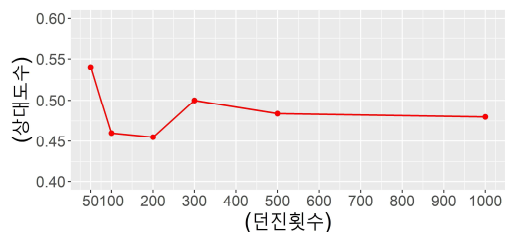


이 실험에서 동전을 던진 횟수가 많아질수록 상대도수는 점점 일정한 값 0.5에 가까워짐을 알 수 있다.

[그림 1] 교과서의 누적 상대도수 그래프(신항균 외, 2013, p.211)

[Fig. 1] Relative frequency graph in textbook

실제 실험에서는 일반적으로 [그림 2]와 같은 결과들이 나온다는 점을 생각했을 때, 상대 도수와 수학적 확률의 관계를 학생들이 쉽게 받아들이도록 하기 위해 이상적인 형태의 그래프를 채택한 것이라 볼 수 있다. 실제로 Quinn(2000)은 많은 학생들이 교과서에 제시된 큰 수의 법칙에 대한 설명 중에서 ‘가까워지는 경향이 있다’는 부분을 잘못 해석한 결과, 시행 횟수가 증가할수록 실험적 확률은 이론적 확률에 항상 가까워진다고거나 시행의 횟수가 충분히 크면 실험적 확률과 이론적 확률은 정확히 같다고 생각하는 등 큰 수의 법칙에 대해 잘못된 신념을 가지고 있다고 보고한 바 있다(신보미, 이경화, 2006에서 재인용).



[그림 2] 동전 던지기 시뮬레이션 결과의 한 예
[Fig. 2] An example of coin flipping simulation result

3) [그림 2]는 R의 sample() 함수를 이용한 동전 시뮬레이션의 한 결과이다. 이러한 그래프를 그리는 시뮬레이션을 100000 번 반복하였을 때, [그림 1]과 같이 순차적으로 0.5에 가까워지는 그래프가 나타나는 사건의 상대도수의 한 값은 0.0666에 불과했다.

큰 수의 법칙에 관하여 학생들에게 대표적으로 나타나는 오개념은 소위 ‘작은 수의 법칙’이 성립한다고 믿는 것이다. Tversky & Kahneman(1971)에 의하면 사람들은 모집단에서 임의로 추출한 표본을 표본의 크기에 상관없이 항상 대표성을 띠는 것처럼 믿는 경향이 있다. 즉, 큰 수의 법칙이 작은 수에도 적용된다는 ‘작은 수의 법칙’을 믿는다는 것이다. Biehler(1991)는 학생들이 상대도수에 절대적 안정성이 존재한다고 믿으며 시행횟수에 따른 변이성⁴⁾의 차등을 느끼지 못하는 경우가 많다고 하였다. 실제로 Shaughnessy et al.(2003)의 연구에서 대부분의 학생들은 주사위를 60번 던지면 각 눈이 정확히 10번씩 나온다고 응답하였으며 변이성을 고려한 응답을 한 소수의 학생들도 12, 11, 10, 12, 9, 9 과 같이 10에 근접한 값만을 언급하였다. 즉, 학생들은 시행횟수가 적어도 변이성이 없거나 매우 작다고 믿는 것이다. Ireland & Watson(2009)의 TinkerPlots(Konold & Miller, 2005)을 이용한 연구에서 큰 수의 법칙은 학생들이 가장 이해하기 어려운 개념이었다. 그들은 확률 실험이 짧은 시행에서도 수학적 확률을 공정하게 따를 것이라는 ‘공정성’에 대한 잘못된 신념이 큰 수의 법칙 개념을 이해하기 어렵게 한다고 지적하였다. Fischbein & Schnarch(1997)는 학생들의 이러한 표본 크기의 효과에 대한 오개념은 비율이 무수히 많은 짝지어진 수들의 대푯값이라는 생각으로부터 기인했을 것이라고 추측하였다. 예컨대, 주사위를 던져 1의 눈이 나올 수학적 확률은 경우의 수의 비율로써 $\frac{1}{6}$ 로 정의되는데, 비율의 정의상 $\frac{1}{6} = \frac{10}{60} = \frac{100}{600}$ 이 성립한다. 따라서 이러한 비율적 추론이 확률 추론에 사용된다면 상대도수의 절대적 안정성을 믿는 잘못된 직관이 유도될 수 있다.

큰 수의 법칙에 관한 오개념들은 실제 실험이나 시뮬레이션을 통해 그 실험적 의미를 경험함으로써 교정될 수 있다(신보미, 이경화, 2006; Biehler, 1991; Stohl & Tarr, 2002). 큰 수의 법칙의 정의와 학생들의 오개념 유형을 살펴보았을 때, 큰 수의 법칙의 실험적 의미를 이해하는 것은 곧 상대도수의 변이성과 변이성의 차등을 인식하는 것이다. 변이성의 인식은 상대도수가 기대확률을 중심으로 변이하는 것을 느끼는 것이다. 학생들은 시

4) 본고에서의 변이성은 상대도수의 변이성을 의미한다.

행횟수가 동일한 실험을 반복하면서 상대도수가 달라지기는 하지만 그 상대도수들이 '존재할 것 같은 범위(likely range)'를 확인해보는 경험을 가져야 한다(Shaughnessy et al., 2003). 변이성의 차등을 인식하는 것은 이러한 범위가 시행횟수에 따라 감소함을 느끼는 것이다. 즉, 상대도수가 수학적 확률에 순차적으로 수렴하는 것이 아니라 확률적 변이성이 존재하는 상황에서 상대도수가 존재할 가능성이 높은 범위의 폭이 점점 감소하여 수학적 확률에 가까워진다는 것을 깨달아야 한다. 중학교에서는 변이성, 변이성의 차등을 중심으로 큰 수의 법칙의 실험적 의미를 지도하고, 고등학교 확률과 통계 교과에서 이항분포를 학습한 이후에는 이항분포를 따르는 X 에 대해 $P\left(\left|\frac{X}{n}-p\right| \leq 1.96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right)=0.95$ 이 성립함을 이용하면 대부분(95%)의 상대도수가 존재하는 구간이 시행횟수 n 의 증가에 따라 감소되어가는 현상을 형식적으로 지도할 수 있다.

2. 안구 운동과 인지 과정

사람의 시각은 한가운데만을 아주 자세히 볼 수 있다. 따라서 사람은 어떤 대상을 자세히 보기 위해서 그 대상이 눈의 중심와(fovea) 위에 위치하도록 안구의 방향을 바꾸어야 하는데, 이것이 곧 안구 운동이다(Snowden, Thompson, & Troscianko, 2012). 인간의 시선은 끝없이 움직이는 것이 아니라 어떤 한 지점을 바라보면서 한동안 정지하는데, 이를 응시(fixation)라 한다. 또한 한 응시점에서 다른 응시점을 향해 빠른 속도로 안구의 방향을 바꾸는데 이를 도약 안구 운동(saccade)이라 한다. 정보의 획득이나 처리는 주로 응시에서 일어난다(Holmqvist et al., 2011). 안구 운동 추적 장치는 인간의 안구 운동을 거의 실시간⁵⁾으로 측정하여 매순간 피험자의 중심와가 어느 위치를 향하고 있는지 알려준다.

안구 운동은 시각적 주의(visual attention)와 밀접하게 연관된다. 의도적으로 주의와 시각을 분리할 수 있음이 인지 심리학의 실험을 통해 밝혀졌지만(Posner, 1980), 읽기와 같은 복잡한 정보 처리 과정을 수행하는

과정에서는 안구 운동과 주의가 연결되어 있다는 것에 대해 많은 연구자들이 동의하고 있다(Just & Carpenter, 1980; Rayner, 1998)⁶⁾. 따라서 안구 운동을 추적한다는 것은 곧 주의의 동적인 변화를 추적하는 것이다.

주의는 일반적으로 '인지 자원을 목표와 관련한 정보에 집중시키는 능력'으로 정의된다(Gazzaley & Nobre, 2012). 주의는 자극의 물리적 특성을 기반으로 하는 상향식 과정(bottom-up process)와 관찰자의 사전 지식, 목표 및 기대를 기반으로 하는 하향식 과정(top-down process)의 상호작용을 통해 유도된다(Snowden et al., 2012). 특정 목표 없이 제시되는 자극에 대한 자연스러운 관찰에서의 주의 유도에는 상향식 프로세스의 영향이 크고(Parkhurst, Law, & Niebur, 2002) 목표가 주어진 학습이나 문제 해결의 상황에서의 주의 유도에는 하향식 프로세스의 영향이 더 크다(Henderson, Brockmole, Castelano, & Mack, 2007).

인간은 특정 대상에 주의를 집중하고 정보를 수집해 표상을 만들며 자신의 기억, 지식, 기술 등과의 상호작용을 통해 정보 처리를 한다(Baars & Gage, 2010). 따라서 우리는 안구 운동 추적을 통해 주의의 이동을 분석함으로써 학습에서의 인지 과정을 간접적으로 추론할 수 있다⁷⁾. 실제로 여러 선행연구들은 안구 운동이 인지 과정을 반영함을 보여주었다(Just & Carpenter, 1980; Rayner, 1998; Knoblich, Ohlsson, & Raney, 2001; Yarus, 1967). 선행연구는 응시의 순서와 분포, 패턴으로부터 피험자의 인지 전략을 추론할 수 있으며(이미진, 이광호, 2015; 이지윤, 2015; 최인용, 조한혁, 2016; Epelboim & Suppes, 2001; Susac et al., 2014), 긴 응시 시간이나 응시 횟수의 증가는 과제 난이도나 피험자의

6) 사람은 의도적으로 시선과 주의를 분리할 수 있지만 이는 부자연스럽고 많은 노력을 요구하는 일이므로 일반적인 상황에서는 시각과 주의가 일치한다(Snowden et al., 2012). 시각과 주의가 일치하는 경우를 외현적 주의(overt attention, 안구 운동을 동반하지 않는 주의를 내현적 주의(covert attention)라 한다. 안구 운동 추적은 인간의 외현적 주의를 동적으로 추적하는 것이라고 볼 수 있다.

7) 안구 운동 추적을 통해 매 순간 시선이 화면의 어떤 지점을 향하고 있는지는 분명하게 알 수 있지만, 그 순간 진행되고 있는 내적 처리 과정을 정확히 알 수는 없다. 따라서 기존의 자기보고식 자료, 실험과제의 특성, 맥락 등을 토대로 종합적으로 인지 과정을 추론해야 한다(최인용, 조한혁, 2016).

5) 기기의 성능에 따라 60Hz ~ 1000Hz 의 시간해상도로 측정한다.

인지 부하와 관련됨을 보였다(Rayner, 1998; Susac et al., 2014).

최근 수학교육 분야에서도 안구 운동 추적을 이용한 다양한 연구가 이루어지고 있는데, 인간이 수학적 문장, 수식, 기호, 그래프 등의 수학적 표상을 어떻게 인식하는지에 대한 연구(Andrá, et al., 2015), 기하 문제의 해결 과정이나 전략을 분석하는 연구(Epelboim, & Suppes, 2001; Lin & Lin, 2014), 십직 회전에서의 인지 전략을 분석한 연구(이지윤, 2015), 방정식 문제 해결 전략을 분석한 연구(Susac et al., 2014; 이미진, 이광호, 2015), 조합 문제의 해결 과정 및 난이도를 분석한 연구(최인용, 조한혁, 2016) 등이 이루어졌다.

III. 연구 방법

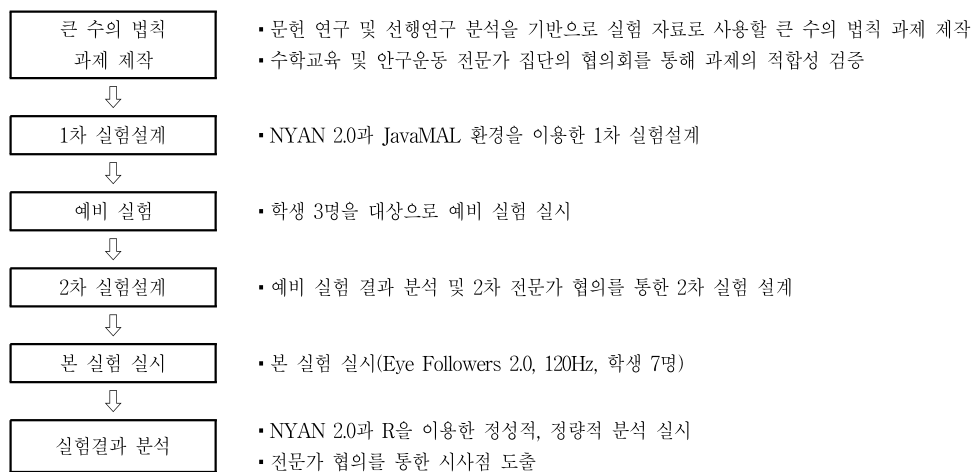
1. 연구 참여자

S시 ○○대학교 과학영재교육원 정보분과 학급에서 학부모의 동의를 얻어 본 연구에 자발적으로 참여한 7명(남 5명, 여 2명)의 학생을 대상으로 하였다. 참여한 학생들은 모두 중학교 2학년 학생이며 영재교육원 수업을 통해 실험에서 사용한 공학 학습 환경인 JavaMAL(조한혁, 2003)에서의 탐구 활동 경험이 풍부했다. 실험 측정

시기가 9월이었기 때문에 학생들은 2009 개정 교육과정을 따르는 수학 2 교과서를 통해 상대도수와 수학적 확률 사이의 관계에 대해 직관적으로 이해하고 있는 상태였다.

2. 연구 절차

본 연구의 연구 절차는 [그림 3]과 같다. 수학교육공학 전문가 1명, 수학교육 전공 석사 학위자 2명, 안구 운동 측정 전문가 1명을 포함한 전문가 집단의 정기적인 세미나를 통해 과제 개발, 실험 설계 및 실험결과 분석 방법의 적합성과 타당성을 높이기 위한 협의과정을 거쳤다. 문헌 연구와 선행 연구 분석을 통해 큰 수의 범칙 시뮬레이션 과제를 제작한 후 전문가와의 협의를 통해 과제를 수정·보완하였다. 1차 실험은 시뮬레이션 창을 화면 좌측에 과제가 포함된 PDF 파일을 우측에 배치한 후 NYAN 2.0(LC Technologies)을 이용하여 전체화면을 녹화하면서 안구 운동을 측정하는 방식으로 설계하였다. 그러나 학생 3명을 대상으로 실시한 1차 실험 분석 결과, 과제 해결이 지나치게 오래 걸리고 과제 화면이 스크롤 되는 방식에서는 관심영역(Area Of Interest; AOI)을 설정하여 안구운동을 분석하기 어렵다는 문제점이 발견되었다. 이에 전문가와의 협의를 통해 HTML을 이용하여 과제를 제시하는 2차 실험을 설계하였다. LC



[그림 3] 연구 절차
[Fig. 3] Research process

Technologies사의 Eye Followers 2.0 장비를 사용하여 본 실험인 2차 실험을 실시하였다. 연구 참여자의 응답 내용, 과제 수행과정 녹화 영상, 안구 운동 데이터를 정량적·정성적으로 분석하여 연구의 시사점과 결론을 도출하였다.

3. 과제

1) 시뮬레이션 환경

본 연구는 JavaMAL(조한혁, 2003)을 이용하여 확률 시뮬레이션 과제를 설계하였다. JavaMAL에서는 확률 실행식⁸⁾과 LOGO(papert, 1980) 기반 행동 명령을 이용하여 간단한 코딩으로 에이전트(agent)에 확률적 움직임을 부여함으로써 실시간으로 누적 상대도수 그래프나 히스토그램 등을 그릴 수 있다. 이러한 LOGO 기반 환경은 학생들은 단순히 확률 실험의 최종 결과만을 관찰하는 것이 아니라 과정을 관찰할 수 있으며 확률 실험을 시각화시키는 작동원리에 접근가능하기 때문에 실험 결과의 의미를 보다 잘 해석할 수 있다(Wilensky, 1995; Wilensky, 1997). 본 연구는 모델링과 시뮬레이션의 장점을 모두 포함할 수 있는 Wilensky(1995)의 결합된 접근 방식을 사용하여 학생들에게 선 구축된(pre-built) 확률 시뮬레이션 모델을 제공하고 문제 상황에 맞추어 모델의 핵심 부분을 스스로 수정하는 과정을 거쳐 시뮬레이션 할 수 있도록 하였다.

2) 과제 설계

최종적으로 개발된 전체 과제는 [표 1]과 같다. 과제1은 주사위를 반복하여 던질 때의 누적 상대도수 그래프를 실시간으로 그려주는 시뮬레이션을 중심으로 구성하였다. 누적 상대도수 그래프는 이론적 배경에서 살펴본 것과 같이 대부분의 우리나라 중학교 수학 2 교과서(강욱기 외, 2013; 류희찬 외, 2013; 신항균 외, 2013; 우정호 외, 2013)에서 큰 수의 법칙을 도입하기 위한 예시로 사용되며 여러 선행연구(Eichler & Vogel, 2014; 이윤경, 조정수, 2015)에서도 시뮬레이션 형태로 사용되었다. 학생들은 실시간으로 그려지는 그래프를 통해 시행횟수가

증가함에 따라 상대도수가 기대확률 주변에서 변화하는 현상을 관찰할 수 있다. 과제1은 3개의 시뮬레이션 활동과 8개의 질문으로 구성되어 있다. 활동1을 통해 시행횟수가 적을 때, 예상보다 변이성이 크게 나타남을 경험하고, 활동2에서는 시행횟수를 600회로 늘려 시행횟수가 60회일 때와 변이성을 비교할 수 있게 하였다. 한편, 1회의 시행에 대한 누적 상대도수의 순차적인 변화를 통해 큰 수의 법칙을 지도하는 것은 자칫 학생들로 하여금 상대도수가 그 시행 횟수의 증가에 따라 연속적인 순서로 수학적 확률에 접근해간다는 오개념을 심어줄 수 있다(Freudenthal, 1972; 신보미, 이경화, 2006). 따라서 활동3에서는 시행횟수가 1000인 실험을 5회 반복하고 그 결과를 동시에 그래프로 나타냄으로써 변이성이 전체적으로 감소하는 경향을 관찰할 수 있도록 설계하였다.

누적 상대도수 그래프의 사용을 반대한 Freudenthal(1972)은 교실에서 변이성을 중심으로 큰 수의 법칙을 경험할 수 있는 모듈별 실험 활동을 제시하였다. 신보미, 이경화(2006)는 Freudenthal(1972)의 활동을 기초로 학생들이 확률적 수렴의 개념에 실험적으로 접근할 수 있는 시뮬레이션 과제를 설계하여 제시하였다. 과제2는 이러한 선행연구를 기초로 개발하였다. 과제2의 3번 문항은 예비 실험에서 학생들이 직접 상대도수를 계산하는 과정에 많은 시간이 소요되었기 때문에 본 실험 과제에서는 실험결과를 입력하면 상대도수는 자동으로 계산될 수 있도록 수정하였다. 4번 문항에서는 구체적인 질문을 통해 확률적 수렴에 대해 접근하도록 하며 5번 문항에서는 표를 자율적으로 관찰하면서 큰 수의 법칙의 실험적 의미를 찾도록 유도하였다.

과제1은 상대도수의 안정화 경향을 강조하며 시각적 그래프 형태로 제시되기 때문에 학생들이 직관적으로 이해하기 쉬운 것이다. 반면, 과제2는 시행횟수 별로 10회씩의 실험을 실시하고 기록하기 때문에 변이성을 인식하기 쉽고 구체적인 수치에 대한 조작을 통해 큰 수의 법칙 및 확률적 수렴의 개념에 접근할 수 있는 기회를 제공한다. 따라서 과제1과 과제2를 통해 학생들이 직관적으로 이해하고 있던 큰 수의 법칙의 실험적 의미를 경험할 수 있을 것으로 기대하였다.

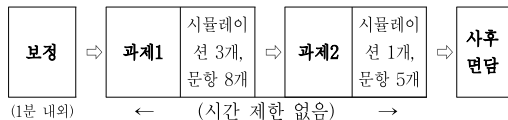
8) 확률 상황을 모델링할 수 있는 문자 표현 체계이며 자세한 설명은 최인용, 조한혁(2016)에 제시되어있다.

4. 실험 설계

[표 1] 과제별 시뮬레이션 활동 및 문항
 [Table 1] Simulation activities and questions for each task

과제	활동	시뮬레이션	문항																																																																																																																
과제1	-	-	1. 상대도수와 수학적 확률 사이의 관계에 대하여 아는 것이 있으면 모두 써보시오. 2. 한 개의 주사위를 한 번 던질 때 1의 눈이 나올 수학적 확률을 구하시오. 3. 주사위를 실제 60번 던졌을 때 1의 눈이 몇 번 나올 것으로 예상되는가? 또 360번 던졌을 때 1의 눈은 몇 번 나올 것으로 예상되는가?																																																																																																																
	활동1		4. 다음 JavaMAL 코드는 주사위를 60번 던졌을 때 1의 눈이 나오는 사건의 상대도수의 변화 그래프를 그려주는 실험의 코드이다. 이 실험을 반복하면서 얻어지는 그래프들을 관찰하고 그 특징에 대해 설명해보시오. 모델(코드 생략)																																																																																																																
	활동2		5. 실험 코드를 수정하여 실험 횟수를 600번으로 늘렸을 때 거북이가 상대도수의 그래프를 그리도록 바꾸어라. 600번 일 때의 그래프와 60번 던졌을 때의 그래프의 차이는 무엇인가? 6. 600번 던지는 실험을 여러 번 반복하여 얻은 그래프들을 관찰하면서 알 수 있었던 점에 대해 모두 말해보시오.																																																																																																																
	활동3		7. 다음 JavaMAL 코드는 주사위를 1000번 던졌을 때 1의 눈이 나오는 사건의 상대도수의 변화 그래프를 그려주는 실험을 5번 반복하는 코드이다. 이 실험에서 나타나는 그래프들의 특징에 대해 말해보시오. 모델(코드 생략)																																																																																																																
-	-	-	8. 앞의 실험들을 종합적으로 고려하여, “상대도수와 수학적 확률”의 관계에 대해 알 수 있었던 것을 최대한 자세히 설명해보시오.																																																																																																																
과제2	-	-	1. 한 개의 동전을 던질 때, 앞면이 나올 수학적 확률을 구하시오. 2. 다음 JavaMAL 코드를 수정하여 동전 던지기 실험을 구성하시오. 모델(코드 생략)																																																																																																																
	활동4		3. JavaMAL을 이용하여 동전 던지기 실험을 한 결과를 아래 표에 채워보시오. <table border="1" style="margin-left: 20px;"> <thead> <tr> <th>시행 횟수</th> <th>실험 회차</th> <th>1회</th> <th>2회</th> <th>3회</th> <th>4회</th> <th>5회</th> <th>6회</th> <th>7회</th> <th>8회</th> <th>9회</th> <th>10회</th> <th>평균</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>10</td> <td rowspan="3">앞면 의수</td> <td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td> </tr> <tr> <td>100</td> <td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td> </tr> <tr> <td>500</td> <td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td> </tr> <tr> <td>1000</td> <td rowspan="3">상대 도수</td> <td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td> </tr> <tr> <td>10</td> <td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td> </tr> <tr> <td>100</td> <td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td> </tr> <tr> <td>500</td> <td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td> </tr> <tr> <td>1000</td> <td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td> </tr> </tbody> </table> 4. 위 표에서 시행횟수가 10, 100, 500, 1000인 실험에서 상대도수와 수학적 확률 사이의 차이가 0.05 이하인 경우는 각각 10번 중 몇 번인가? 어떤 특징이 있는가? 5. 표와 4번으로부터 상대도수와 수학적 확률 사이의 관계에 대해 어떻게 설명할 수 있을지 자세히 쓰시오.	시행 횟수	실험 회차	1회	2회	3회	4회	5회	6회	7회	8회	9회	10회	평균	10	앞면 의수												100												500												1000	상대 도수												10												100												500													1000											
시행 횟수	실험 회차	1회	2회	3회	4회	5회	6회	7회	8회	9회	10회	평균																																																																																																							
10	앞면 의수																																																																																																																		
100																																																																																																																			
500																																																																																																																			
1000	상대 도수																																																																																																																		
10																																																																																																																			
100																																																																																																																			
500																																																																																																																			
1000																																																																																																																			

안구 운동 추적 실험 일주일 전에 모든 실험 참가자들은 영재교육원에서 JavaMAL을 이용한 확률 모델링 및 시뮬레이션에 관한 총 2차시의 수업을 들었다. 수업에서 수학적 확률과 상대도수에 대한 설명은 하지 않았



[그림 4] 실험 설계
[Fig. 4] Design of experiment

둘 사이의 관계에 대해서는 특별히 언급하지 않았으며 JavaMAL 표현체계를 이용하여 여러 가지 확률 상황을 모델링하고 시뮬레이션하는 활동을 충분히 하였다.

본 실험은 [그림 4]와 같이 안구 운동 보정(calibration) → 과제1 → 과제2 → 사후 면담 순서로 설계하였다. 보정은 화면에 고루 분포된 몇 개의 지점을 응시할 때 각 실험 참가자의 동공 상태를 확인함으로써 안구 운동 추적의 정확도를 높이는 단계이다. 사람의 동공은 개인별로 크기와 모양이 상이하므로 안구 운동 추적 실험에서 보정 단계는 반드시 필요하다(Holmqvist et al., 2011). 보정은 9-point 알고리즘을 사용하는 안구 운동 측정 소프트웨어 NYAN 2.0(LC Technology)을 통해 진행되었다. 보정 단계 이후 실험 참가자들은 과제1과 과제2를 해결하였다. 참가자들이 키보드와 마우스를 자유롭게 이용하여 코드를 수정하고 시뮬레이션 하며 과제의 해답을 HTML 문서에 직접 입력할 수 있도록 하였다. 과제 해결 시간에 제한을 두지 않았으며, 참가자 스스로 마우스 클릭을 통해 다음 과제로 넘어가도록 하였다. 실험 자료는 1920px×1080px 해상도의 22인치 모니터 전체화면 모드로 제시되었다. 측정이 끝난 후 면담을 통해 불분명한 응답 내용 등에 대해 확인하였다.

5. 자료 수집 및 분석 방법

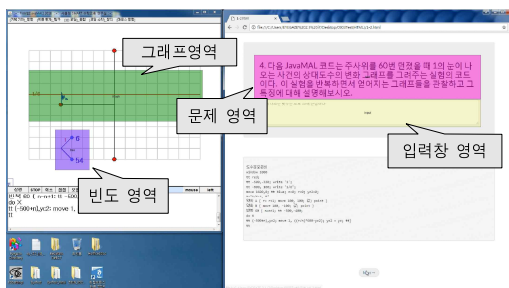
1) 안구 운동 추적기

본 연구는 LC Technologies사의 Eyegaze Eye Follower 2.0 장비로 참가자의 안구 운동을 추적하였다. 이 기기는 22인치 모니터 하단에 부착된 고정형 장치로써 총 4개의 카메라를 통해 피험자의 안구 운동을 추적

하고 기록한다. 머리의 움직임은 인식하며 동공의 위치를 추적하기 때문에 보정 이후에는 피험자가 자연스럽게 움직이면서 실험에 참여할 수 있다. 본 연구는 양안 추적 모드를 사용하였으며 120Hz의 샘플링 속도로 측정하였다.

2) 자료 수집 및 분석 방법

본 연구의 목적에 따라 과제1과 과제2 중 시뮬레이션이 포함된 4개의 활동에 대한 자료 수집과 분석을 하였다. 확률 시뮬레이션 활동에서 나타나는 학생들의 추론 과정을 분석하기 위해 과제 내에 관심영역(AOI)을 설정하였다. AOI는 [그림 5]와 같이 상대도수 그래프 영역, 수형도 형태의 빈도 영역, 문제 영역, 입력창 영역으로 구분하여 설정하였다. 활동4의 경우 시뮬레이션을 통해 완성한 상대도수 표를 기반으로 하는 활동이므로 별도의 AOI를 설정하지는 않았다. 활동별로 AOI별 체류 시간(dwell time)⁹⁾의 비율을 계산하여 시선 점유도를 구하였다. 시선 점유도와 히트맵(Heatmap)을 통해 학생들의 시뮬레이션 활동에서의 전체적인 주의를 분석하였다.



[그림 5] 관심영역의 설정
[Fig. 5] Designation of AOI

안구운동 측정과 동시에 확률 시뮬레이션 과제를 수행하는 화면을 동영상으로 녹화하였다. 이 영상을 통해 참여자들의 응답 내용 수정 과정 및 최종 응답 내용, 시뮬레이션 반복 횟수 등 과제 수행 과정을 분석하였다. 또한 과제 수행 영상과 안구 운동 데이터를 동기화시켜 시선 흐름(scan path) 영상을 생성하였다. 시선 흐름은 응시 응시 길이에 비례하는 반지름을 갖는 원으로 나타

9) 체류시간(dwell time)은 응시 시간(fixation duration)과 도약 운동 시간(saccadic duration)의 총합이다.

내고 도약 운동을 원 사이의 선으로 나타내는 것으로, 정량적 분석으로는 확인할 수 없는 시선의 움직임이나 순서와 같은 패턴에 대한 정보를 제공한다. 동기화된 영상을 통해 학생들이 시뮬레이션 활동을 하면서 매 순간 실제로 어떤 표상이나 영역을 응시하고 관찰하였는지 분석하고 이를 통해 학생들의 시뮬레이션 활동에서의 인지 과정을 정성적으로 추론하였다. 특히 연구 목적에 맞게 오개념이나 잘못된 추론이 나타난 경우를 중심으로 연구 참여자의 공학 도구 및 과제와의 상호작용을 분석하였다. 참여자 s7의 경우 과제1의 활동3 중간부터 프로그램 오류로 인해 안구 운동 측정 데이터가 손상되어 시선점 유도 분석에서는 제외하였으며 활동2까지의 시선 흐름만을 분석하였다. s7의 과제수행 내용은 정상적인 분석이 가능하였다.

IV. 결과 분석 및 논의

1. 연구 참여자의 과제 수행 내용

[표 2]는 연구 참여자의 과제별 응답결과이다. 과제1은 사전 질문을 제외하면 총 3개의 시뮬레이션 활동으로 구성되어 있다. 활동1에서는 $n=60$ 일 때, 상대도수가 큰 변이성을 보임을 인식한 학생은 3명뿐이었다. 4명은 마치 도수의 안정성이 존재하는 것처럼 상대도수는 수학적 확률과 가까운 값이 나온다고 응답하였다. 활동2에서도 변이성을 인식하고 $n=60$ 일 때와 $n=600$ 일 때의 차이를 설명한 학생은 2명뿐이었다. 5명의 학생은 변이성에 대한 고려 없이 시행횟수가 늘수록 상대도수는 수학적 확률에 가까이 간다고 응답하였다. 활동3에서 수학적 확률 주변에서 변화하는 상대도수의 존재 범위가 시행횟수가 증가함에 따라 감소하는 경향이 있음을 인식한 학생은 2명뿐이었다. 5명의 학생은 여전히 시행횟수가 늘수록 상대도수는 수학적 확률과 비슷한 값이 나온다는 직관적 응답을 하였다.

과제2는 50번의 동전 시뮬레이션 반복으로 얻은 상대도수 표를 관찰하는 1개의 활동으로 구성되어 있다. 가능성을 이용하여 상대도수와 수학적 확률 사이의 관계에 대해 설명한 학생은 없었다. 하지만 오차와 범위의 개념을 이용하여 시행횟수가 증가하면 정해진 오차를 벗어나

[표 2] 과제별 응답결과

[Table 2] Responses for each task

참여자	활동1	활동2	활동3	활동4
s1	×	×	×	×
s2	○	×	○	×
s3	○	×	×	×
s4	×	×	×	△
s5	×	×	×	×
s6	×	○	×	△
s7	○	○	○	×

* ○: 올바른 추론, ×: 잘못된 추론, △: 활동4에서 범위와 오차의 인식

는 값들이 적어진다는 것을 설명한 학생이 2명 있었다.

참가자들의 시뮬레이션 활동별 소요시간은 [표 3]과 같다. 학생들이 코드를 수정하고 자유롭게 시뮬레이션 하면서 관찰하는 과제가기 때문에 1인당 평균 1175.38초 (SD=338.67)의 많은 시간이 소요됐다.

[표 3] 시뮬레이션 활동별 응답시간(초)

[Table 3] Response time(s) for each simulation activity

참여자	활동1	활동2	활동3	활동4	계
s1	65.36	72.05	52.22	255.16	444.79
s2	252.06	377.64	343.62	474.35	1447.67
s3	194.24	125.69	359.21	449.22	1128.36
s4	152.97	473.44	233.33	602.78	1462.52
s5	101.48	337.89	131.28	761.11	1331.76
s6	137.46	339.16	122.71	402.06	1001.39
s7	302.05	587.7	230.16	291.26	1411.17
평균	172.23	330.51	210.36	462.28	1175.38

[표 4]는 학생들이 각 활동에서 시뮬레이션을 실시한 횟수이다. 활동3과 활동4는 문제에서 요구하는 시뮬레이션 횟수가 정해져있기 때문에 횟수가 동일하지만 활동1과 활동2에서는 학생들이 원하는 만큼 시뮬레이션을 실행할 수 있다. 활동1에서는 모든 학생들이 일반적인 현상을 관찰할 수 있을 만큼의 충분한 실험을 실시하였지만 활동2의 경우 3명의 학생이 시뮬레이션을 5번 이하로 매우 적게 실시하였음을 알 수 있다.

[표 4] 시뮬레이션 실시 횟수

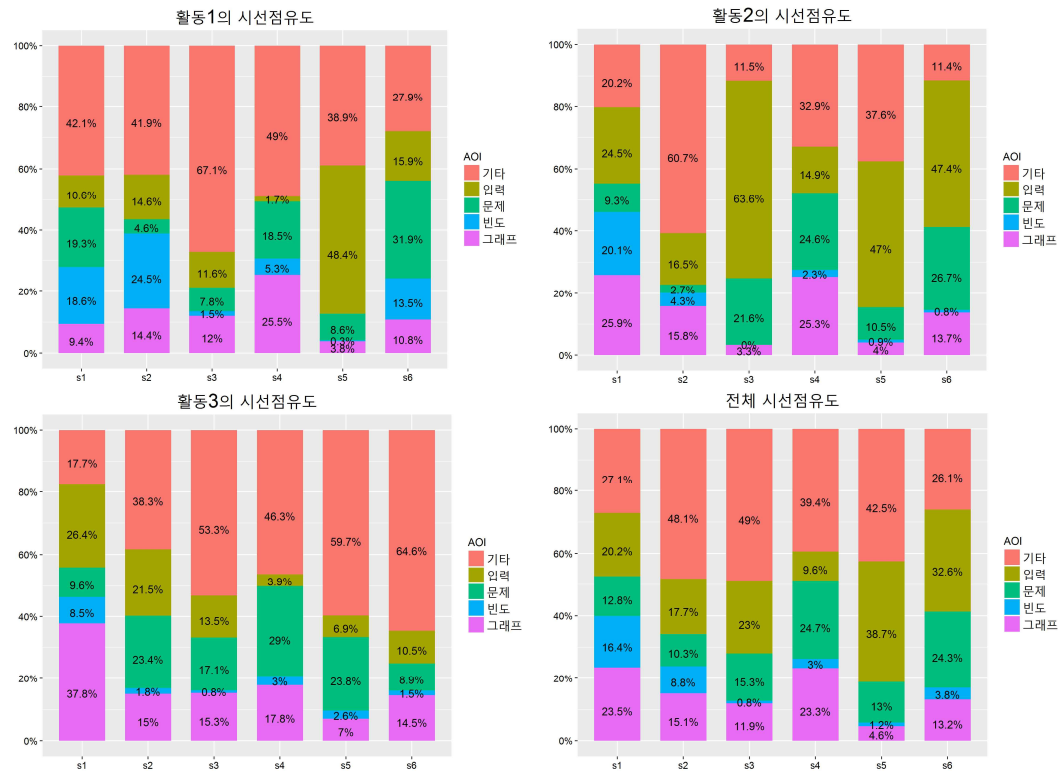
[Table 4] The number of simulation runs

참여자	활동1	활동2	활동3	활동4	계
s1	24	8	1	50	83
s2	67	27	1	50	145
s3	22	2	1	50	75
s4	18	15	1	50	84
s5	22	5	1	50	78
s6	13	10	1	50	74
s7	18	3	1	50	72
평균	26.3	10.0	1	50	87.3

2. 과제에서 의도한 추론을 하지 못한 연구 참여자의 안구 운동 사례

1) 시뮬레이션 결과를 거의 응시하지 않은 경우

[그림 6]는 3개의 시뮬레이션 활동에서 각 실험 참가자들의 AOI별 시선 점유도를 분석한 것이다. 그래프 영역과 빈도 영역을 실험 결과 영역으로 볼 수 있으며, 이 영역의 점유도가 높다는 것은 곧 시뮬레이션 결과를 응시한 시간의 비중이 크다는 의미이다. 시선 점유도를 보면 s5는 모든 활동에서 실험 결과 영역의 점유도가 10% 미만임을 확인할 수 있다. s5의 과제별 응답 내용은 [표 5]와 같은데, 표현 방식은 조금씩 다르지만 모든 문항에서 일관되게 ‘실험횟수가 많아질수록 $\frac{1}{6}$ 에 가까워진다’라고 대답한 것을 볼 수 있다. s3의 경우도 활동2에서는 실험 결과 영역의 시선 점유도가 5%이하인데, [그림 7]의 히트맵을 보면 시뮬레이션은 거의 응시하지 않고 (3.8초 응시) 입력창을 응시하면서 ‘더 많이 던질수록 점점 1/6에 가까워진다’라고 응답한 것을 확인할 수 있



[그림 6] 과제1의 관심영역별 시선 점유도(s7은 데이터 손실로 제외)

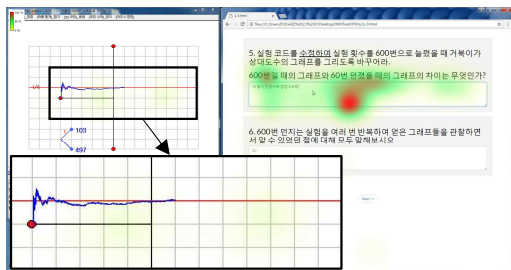
[Fig. 6] Dwell time ratio of AOI for Task 1

다10). 따라서 이러한 경우들은 활동이 의도하는 결론이 ‘상대도수는 시행횟수가 늘어나면 수학적 확률에 가까이 간다’라는 자신들이 교과서를 통해 배웠고 직관적으로 참이라 믿는 내용이라고 생각하고 시뮬레이션 결과를 거의 보지 않은 것으로 판단된다. 확률 실험을 여러 번 실시하거나 그 결과를 주의를 기울여 관찰하지 않았기 때문에 이들의 큰 수의 법칙에 대한 이해는 직관적인 수준에 머물러 있을 수밖에 없었다.

[표 5] s5의 과제 응답 내용

[Table 5] The task response of s5

활동	문항	응답 내용
s5	활동1 4	실험횟수가 많아질수록 1/6에 가까워진다.
	활동2 5	60번 던졌을 때는 예상과는 달리 처음에 예상했던 수보다 더욱 떨어져 있었지만 600번을 던지면서 1/6에 가까워졌다.
	6	실험 수가 많아질수록 예상했던 확률에 가까워졌다.
활동3	7	실험 수가 적을 때는 1/6로부터 멀어졌지만 1000번에 가까워질수록 1/6에 근접했다.
	8	실험횟수가 많아질수록 수학적 확률에 근접해간다는 것을 알 수 있다.



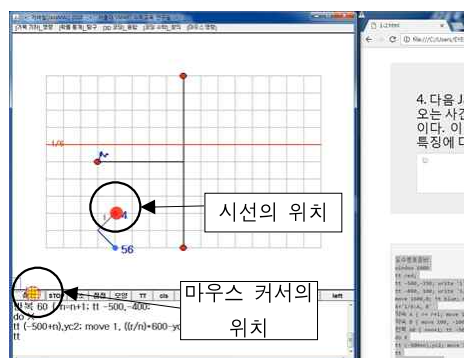
[그림 7] s3의 활동2에 대한 히트맵
[Fig. 7] Heatmap of s3 for activity 2

2) 직관과 모순되는 시뮬레이션 결과를 관찰했음에도 변화가 일어나지 않는 경우

활동1은 주사위를 60번 던지는 시뮬레이션에서의 상대도수의 그래프 변화를 관찰하는 과제이다. 이 활동은 시행횟수가 60번일 때는 상대도수의 변이성이 크며 시행횟수에 따른 상대도수의 변화 역시 매우 불규칙함을 보여주기 위해 설계하였다. 그러나 일부 학생들은 실제 시뮬레이션에서 관찰한 결과에 부합되지 않는 내용을 서술

10) 히트맵은 응시의 밀도가 높은 지점일수록 붉게 표시한다.

하였다. 예를 들어, s1의 경우 전반적으로 과제 해결 속도가 빨랐지만 활동1에서 충분한 횟수(24회)의 시뮬레이션을 실행하였으며 [그림 6]의 시선 점유도에서 볼 수 있듯이 실험결과에 적절한 주의를 기울였다. 그러나 s1은 실험을 반복하는 동안 [그림 8]과 같이 1의 눈이 4번만 나오거나 18번이 나오는 경우를 응시하였음에도 불구하고 4번 문항에 대해 ‘1이 나오는 횟수는 모두 10에 근접한다’라고 응답하였다. 즉, 시행횟수가 60번일 때 도수가 큰 쪽으로 변이하는 현상을 관찰했음에도 불구하고 마치 작은 수의 법칙이 성립하는 것처럼 결론을 내렸다.



[그림 8] 시뮬레이션 결과를 확인하고 있는 s1의 시선
[Fig. 8] s1's gaze looking the simulation result

s4의 경우도 이와 유사하게 변이성이 큰 실험 결과들을 얻고 충분히 응시했음에도 불구하고 ‘그래프의 끝점이 1/6 직선과 근접하게 위치하여 있다’라고 응답하였다. s2도 여러 번의 실험을 반복하면서 상대도수가 오히려 점점 1/6로부터 멀어지는 그래프들을 관찰했음에도 불구하고 ‘점점 확률이 1/6에 가까워짐’이라고 서술하였다.

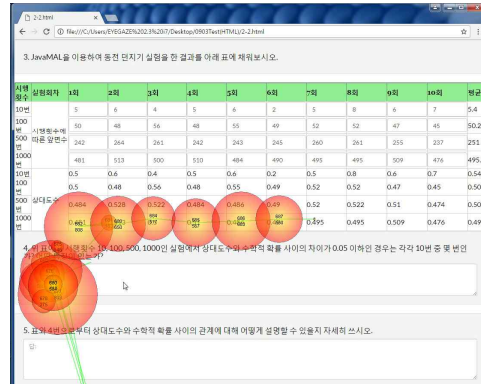
많은 연구자들이 시뮬레이션 결과 자체가 스스로 직관과 모순됨을 설명해주거나 학생들의 확률적 이해를 향상시켜주지 않음을 강조한 바 있다(Maxara & Biehler, 2006; Konold, 1995). 위의 사례들은 학생들이 실제로 실험 결과를 응시하고 시각적 주의를 기울인다 해도 그러한 모순을 인식하고 직관과 신념을 변화시키는 것이 쉽지 않음을 확인한 것으로 볼 수 있다. 과제1은 활동1을 하기 전에 주사위를 60번 던졌을 때 1의 눈의 예상 횟수를 사전에 예측하도록 요구하기는 하였지만, 사전 판단과 실험 결과를 구체적으로 비교하는 기회를 제공하지는 않았다. 사전 예측하기만으로는 학생들이 시뮬레이션에

나타난 모순을 인식하고 상호작용하도록 유도하기에 충분하지 않음을 알 수 있다. 여러 선행연구에서 제안한 바와 같이 학생이 사전예측과 시뮬레이션 결과의 차이를 인식하고 논의할 수 있는 기회를 적극적으로 제공해야 한다(Batanero & Sanchez, 2005; Chance, Ben-zvi, Garfield, Medina, 2007; Konold, 1995; 우정호, 이경화, 1996). 예를 들어, 학생들이 미리 시뮬레이션 결과를 예측하여 결과를 공학 환경에 나타내고 실제 시뮬레이션 결과를 그 위에 함께 나타나게 하는 시뮬레이션 설계를 생각할 수 있다. 교실 활동에서 교사는 학생들에게 사전예측의 근거를 설명하게 하고 구체적인 발문을 통해 사전예측과 실험결과 사이의 차이를 인식하게 할 필요가 있다.

3) 추론에 필요한 안구 운동 패턴이 나타나지 않은 경우

활동4의 경우 모든 참여자가 연구자들이 기대하였던 추론을 이끌어내지 못하였다. 총 40번의 실험을 하여 표를 완성하고 4번 문항에서 요구하는 상대도수와 수학적 확률 사이의 차이가 0.05 이하인 경우를 시행횟수별로 잘 구하였다. 그러나 표의 상대도수 데이터를 기반으로 종합적으로 추론하는 5번 문항에서는 과제 설계 목적에 부합하는 응답을 하지 못하였다. 안구 운동을 분석한 결과 과제에서 의도하는 추론에 필요한 관찰 패턴이 나타나지 않거나 핵심적인 단서가 존재하는 영역에 주의가 분배되지 못하는 현상이 관찰되었다.

예를 들어 [그림 9]의 표의 상대도수 영역에서 유의미한 추론이 일어나기 위해서는 크게 두 가지 패턴의 안구 운동, 즉 주의를 전환이 있어야 한다. 첫 번째는 수평적 패턴으로써 동일한 시행횟수의 실험을 10번 반복했을 때 상대도수의 값들을 관찰하고 변이성을 인식하는 것이다. 두 번째는 수직적 패턴으로써 시행횟수가 커질수록 상대도수가 변이하는 폭이 좁아짐을 인식하는 것이다. [그림 9]을 보면, $n=10$ 일 때는 상대도수가 0.1 단위로 변이하지만 $n=100$ 일 때는 0.01 단위, $n=1000$ 일 때는 0.001 단위에서 값이 변화함을 볼 수 있다. 또한 학생들은 수직적 관찰을 통해 변이성의 폭이 좁아지기는 하지만 1회차 각 실험에서 얻은 상대도수 0.5 / 0.5 / 0.484 / 0.481과 같이 $n=500$ 일 때의 상대도수가 $n=100$ 일 때의 상

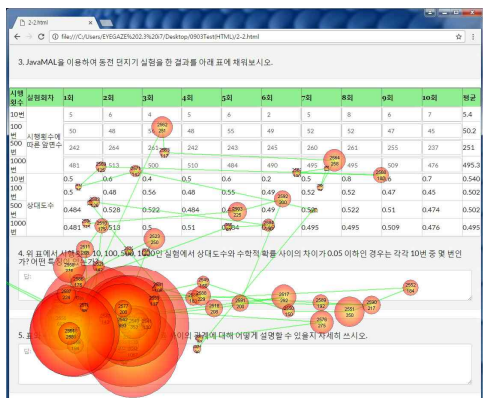


[그림 9] 문항4의 답을 구하기 위한 s5의 시선 흐름
[Fig. 9] s5's scan-path for getting answer of item 4

대도수보다 수학적 확률에 반드시 가까운 것은 아니라는 것을 관찰할 수 있다. 그러한 가운데 우측 평균 열을 수직적으로 비교함으로써 시행횟수가 증가함에 따라 상대도수가 평균적으로 수학적 확률에 가까워지는 경향이 있음을 볼 수 있다.

s5의 사례를 보면 [그림 9]와 같이 구체적인 목표가 제시된 문항4에서는 답을 구하기 위해 각 상대도수를 오른쪽으로 이동하면서 하나씩 관찰하는 안구운동 패턴이 나타났다. 그러나 그 이후 문항5의 자율적인 관찰 상황에서 나타난 시선 흐름 [그림 10]을 보면 앞에서 언급한 추론에 필요한 수직적, 수평적 안구운동 패턴들은 나타나지 않고 표의 이곳저곳을 불규칙하게 응시하는 안구운동이 진행되었음을 확인할 수 있다. [그림 9]의 목적 지향적인 안구 운동과 비교해보면, [그림 10]의 안구 운동은 응시 시간이 짧고 도약의 길이가 길며 방향이 무선적인 특징이 있다. 이러한 안구 운동 패턴은 자극의 물리적 특성이나 개인의 습관적 감각에 대한 의존성이 큰 상황식 주의와 관련되어 있다(신원섭, 신동훈, 2016). 심지어 전체적인 경향을 확인하는데 핵심이 되는 단서 영역인 우측 마지막 평균열은 단 한 번도 응시하지 않았다.

Radford(2010)의 연구에서 기하적 패턴 일반화 과제가 공간적, 시각적으로 규칙성에 대한 단서를 포함하고 있음에도 학생들은 수학적 구조를 발견하기 위해 필요한 의도적인 시각적 행동을 스스로 해내지 못한다. 교사가



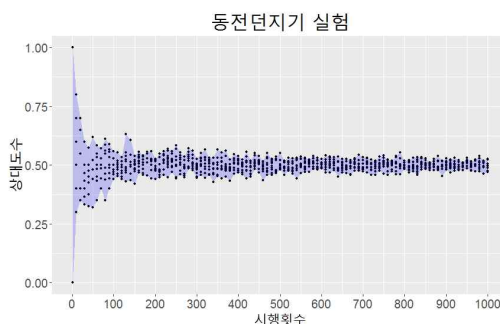
[그림 10] 문항5에서 s5의 시선흐름
[Fig. 10] s5's scan-path in item 5

각종 기호학적 자원을 동원하여 수학적 구조를 지각할 수 있는 특정 방식으로 주의를 유도했을 때, 학생들은 비로소 수학적 구조를 인식하였다. 그는 학생들의 눈이 아직 수학적 구조를 지각할 만큼 숙련되어 있지 않기 때문에, 비계가 설정되어있는 과제일지라도 단순히 제시하기보다는 내재된 수학적 구조를 발견할 수 있는 특정 의도로 주의를 기울일 수 있도록 교사와 학생이 협력적인 행동을 해야 한다고 주장하였다.

비록 대수적 추론과 확률 추론에는 많은 차이점이 존재하지만, 넓은 관점에서 본 연구의 사례는 Radford (2010)의 사례와 유사하다. 과제2의 표는 큰 수의 법칙에 관한 많은 정보를 담고 있지만, 표로부터 변이성이나 변이성의 차등, 상대도수의 평균의 수렴성 등과 같은 현상들을 도출하기 위해서는 특정한 방식으로 표의 값들을 관찰해야 한다. 그러나 안구 운동 분석 결과 학생들은 주로 상향식 주위에 의존한 안구 운동을 통해 표를 관찰했지만 올바른 추론을 하기 위해 필요한 특정 의도로 표 안에서 주의를 전환시키어나가는 과정으로 연결되지는 못하였음을 확인할 수 있었다. 중학생들은 아직 변이성과 무작위성의 특징을 가진 확률 실험 자료에서 패턴을 스스로 지각할 만큼 충분히 성숙하지 않다. 따라서 학생이 목적을 가지고 추론에 필요한 핵심 단서 영역을 응시하도록 유도하는 말문이나 질문을 제시하는 것이 필요하다. 예를 들어, 활동4에서 ‘n = 1000일 때의 상대도수는 n = 100일 때의 상대도수보다 항상 수학적 확률에 가까운가?’, ‘시행횟수가 증가함에 따라 1회차, 5회차 상대도

수들은 어떻게 변화하는가? 또한 상대도수의 평균은 어떻게 변화하는가?’ 와 같은 질문을 한다면 학생들이 시뮬레이션과 보다 유의미한 상호작용을 할 것으로 판단된다.

한편, 확률 시뮬레이션의 결과를 해석하는데 있어서 너무 많은 추론이 필요하거나 결과가 수치적으로 제시되는 경우 학생들이 해석에 어려움을 겪을 수 있다 (Chance et al., 2007). 표에 나열된 데이터에서 일정한 패턴을 인식하는 것은 쉬운 일이 아니다. 따라서 [그림 11]과 같이 산점도(scatter plot)로 시각화하는 그래프를 표와 함께 제공한다면 학생들이 특정한 의도로 실험 데이터를 관찰하고 패턴을 발견하는데 도움이 될 것이다. 이러한 그래프는 동일한 n에 대해 수학적 확률 주변에서 변화하는 상대도수의 변이성과 n이 증가함에 따라 변이하는 범위가 불규칙하지만 점차 확률적으로 감소하는 경향을 명확히 보여주는 장점이 있다.



[그림 11] 큰 수의 법칙을 보여주는 산점도
[Fig. 11] Scatter plot showing the law of large numbers

4) 시각적으로 현저한 부분에 주의를 유도된 경우

s7은 활동2에서 n = 600인 시뮬레이션을 총 3회 실시하였는데, 그 중 2회는 첫 번째나 두 번째 시행에서 1의 눈이 나오면서 [그림 12]과 같이 높게 시작하는 상대도수 그래프를 얻었다. 시선 흐름 영상을 분석한 결과 s7이 [그림 12]과 같이 그래프의 초기 부분을 집중적으로 관찰하는 모습이 나타났다. 그 후 s7은 ‘(상대도수의) 그

11) 2015 개정 교육과정의 경우 중학교에서 상관관계와 산점도가 추가되었으나 순서상 확률보다 뒤에 배치되어있으므로 이러한 그래프를 실제로 활용하는 것에 대해서는 추가적인 검토가 필요하다.

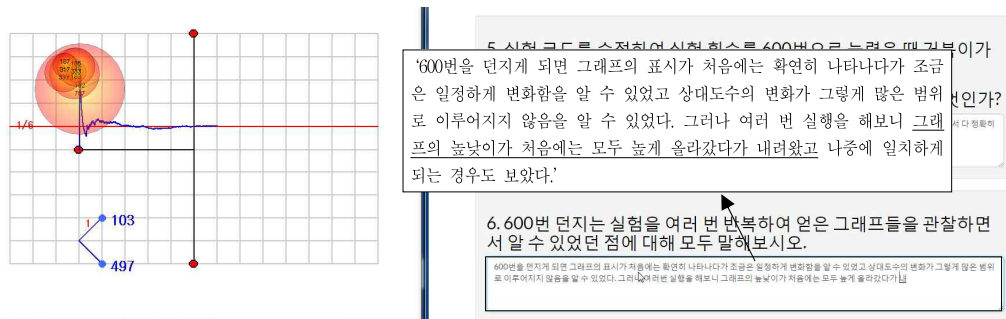
래프의 높낮이가 처음에는 모두 높게 올라갔다가 내려왔고 나중에 일치하게 된다'라는 응답을 한다. 유사하게 [그림 13]을 보면 s3 역시 활동3에서 '모두 초반에는 값이 확 튀다가 후반에는 점점 $\frac{1}{6}$ 에 가까워진다'라고 응답하였고 유독 두드러지게 수학적 확률보다 아래쪽에 나타난 시행의 누적 상대도수 그래프를 응시한 후 '중간쯤에서 내려가 있는 값이 쉽게 다시 올라오지 않는다'라고 응답하기도 하였다.

이러한 사례들은 그래프의 시각적으로 두드러지는 부분에 상향식 주의가 유도되고 이로부터 잘못된 일반화가 진행된 것으로 해석할 수 있다. 따라서 과제 설계에 있어서 시각적 현저성(salience)이 상향식 주의를 유도하여 확률 추론에 영향을 미칠 수 있음을 유의해야 한다.

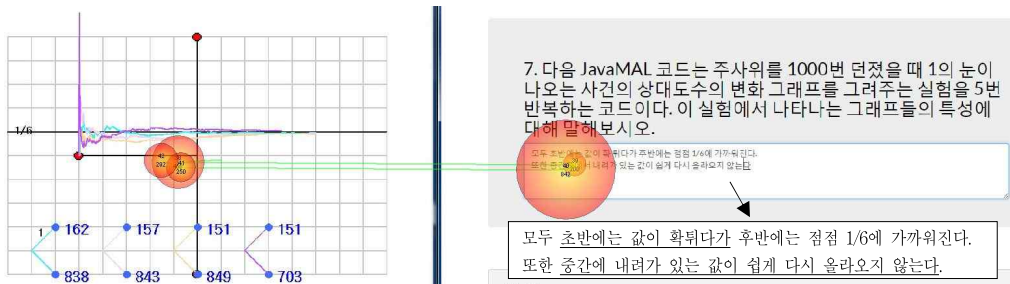
과제1의 설계 단계에서 동전 외에 다양한 확률 실험 상황을 이용하기 위하여 주사위 실험을 택하였으며 수학

적인 검토를 통해 활동2, 활동3에서 시행횟수를 충분히 큰 600번, 1000번으로 정하였다. 그러나 이러한 설계가 오히려 학생들의 확률 추론에 부정적인 영향을 끼쳤다.

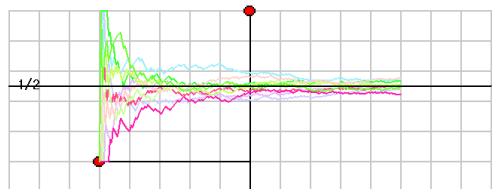
주사위의 1의 눈이 나올 확률이 $\frac{1}{6}$ 이기 때문에 비대칭적 구조로써 그래프 초반의 상승이 시각적으로 강조되었다. 더욱이 시행횟수가 600, 1000인 실험을 한 화면에 제시하기 위하여 그래프의 x축을 지나치게 압축하는 바람에 중반 이후의 변이성의 변화가 시각적으로 분명하게 나타나지 못하고 상대적으로 초기의 변화가 두드러졌기 때문에 학생들의 변이성에 대한 추론이 활발하지 못했던 것으로 판단된다. 따라서 [그림 14]와 같이 변이성의 감소 경향이 시각적으로 잘 부각되어 주의를 유도될 수 있도록 $n=200$ 인 동전 실험을 실시한 후 $n=1000$ 인 실험을 실시하거나 상대도수 그래프의 확대, 축소를 지원하는 방법 등의 개선 방안을 생각할 수 있다.



[그림 12] 시뮬레이션 결과를 관찰하는 s7의 시선 흐름과 응답 내용
[Fig. 12] s7's scan-path observing simulation results and task response



[그림 13] 시뮬레이션 결과를 관찰하는 s3의 시선 흐름과 응답 내용
[Fig. 13] s3's scan-path observing simulation results and task response



[그림 14] 수정된 누적 상대도수 그래프($n = 200$, 총 10회)

[Fig. 14] Modified cumulative relative frequency graph

V. 결론 및 제언

본 연구는 과제 수행 과정 영상과 안구 운동 데이터의 분석을 통하여 큰 수의 범칙 시뮬레이션 활동에서 중학교 2학년 영재 학생들의 확률 추론 사례를 분석하였다. 과제 응답 내용을 분석한 결과 많은 학생들이 시뮬레이션 활동 이후에도 큰 수의 범칙에 관한 이해가 직관적인 수준에 머물러있거나 오개념이 교정되지 않았다. 연구문제 1, 2의 결과를 토대로 과제 설계 시 의도한 추론을 하지 못한 연구 참여자의 사례를 요약하면 다음과 같다.

첫째, 일부 학생들은 확률 시뮬레이션 결과 자체에 주의를 기울이지 않았다. 이들은 시뮬레이션을 5회 이하로 매우 적게 실시하였으며 시뮬레이션 결과 영역을 거의 응시하지 않고 ‘상대도수는 시행횟수가 증가하면 점점 수학적 확률에 가까워진다’라고 응답하였다. 학생들은 시뮬레이션 과제가 유도하는 목적이 교과서를 통해 이미 배운 내용이라고 예상하였기 때문에 적극적으로 관찰하지 않은 것으로 판단된다. 또한 일부 학생들은 시행횟수가 적을 때의 큰 폭의 변이성이나, 시행횟수가 증가함에 따라 오히려 상대도수가 수학적 확률로부터 멀어지는 실험 결과를 충분히 응시하였음에도 불구하고 ‘작은 수의 범칙’이 성립하는 것처럼 응답하거나 ‘상대도수는 수학적 확률에 가까워진다’라는 직관적인 수준의 응답을 하였다. 학생들의 사전 직관이 예상보다 강하게 작용하면서 시뮬레이션을 통해 큰 수의 범칙의 실험적 의미를 이해하는 활동에 오히려 방해가 된 것으로 판단된다. 단순한 사전 예측과 시뮬레이션 결과의 제시만으로는 학생들이 가지고 있는 잘못된 직관을 수정할 수 없다. 학생들이 자신

의 직관과 시뮬레이션 결과를 구체적으로 비교하도록 하는 의도적인 개입이 필요하다. 이러한 개입은 교사의 발문을 통해서 이루어질 수도 있지만, 학생들이 미리 시뮬레이션 결과를 예측하여 결과를 공학 환경에 나타내고 실제 시뮬레이션 결과를 그 위에 함께 나타나게 하는 것과 같은 시뮬레이션 설계를 통해 이루어질 수도 있을 것이다.

둘째, 여러 번의 실험 결과를 정리한 표 형식의 상대도수 자료에 대한 자율적인 탐구 상황에서 학생들은 주로 상향식 주의와 관련된 안구 운동을 보였으며 표에서 큰 수의 범칙의 실험적 의미를 발견하기 위해 필요한 특정 안구 운동 패턴이나 핵심 단서 영역에 대한 응시가 나타나지 않았다. 중학생들은 아직 변이성과 무작위성의 특징을 가진 확률 실험 자료에서 패턴을 스스로 지각할 만큼 충분히 성숙하지 않다. 따라서 많은 데이터를 제시할 때는 학생들이 특정한 의도로 실험 데이터를 관찰하고 패턴을 발견할 수 있도록 수행도나 그래프와 같이 시각적 표상을 적극적으로 활용하고 학생이 목적을 가지고 추론에 필요한 핵심 단서 영역을 응시하도록 유도하는 발문이나 질문을 제시하는 것이 필요하다.

셋째, 시각적으로 두드러진 실험 결과에 주의가 유도되고 이로부터 잘못된 일반화로 이어지는 경우가 있었다. 예를 들어 우연히 시각적으로 두드러진, 즉 변이성이 크게 나타난 결과를 관찰한 뒤 ‘상대도수는 수학적 확률보다 높은 값에서 시작하여 서서히 감소한다’, ‘한번 내려간 상대도수는 쉽게 올라오지 못한다’와 같은 추론을 하였다. 학생들이 확률 추론을 하기 위한 정보를 선택하는데 있어 시각적 현저성이 많은 영향을 주는 것으로 판단된다. 따라서 충분한 횟수의 실험을 실시할 수 있도록 하여 특수한 결과가 시각적으로 부각되지 않도록 유의해야 하며, 학생들이 발견해야 할 수학적 구조가 시각적으로 왜곡되지 않고 잘 드러나도록 시뮬레이션 과제를 구성해야 한다.

이러한 연구 결과를 바탕으로 본 연구에서 사용한 시뮬레이션 과제의 수정 방안을 결과 분석에 함께 제시하였다. 또한 연구 과정과 결과를 토대로 다음과 같은 제언을 하고자 한다.

첫째, 상대도수와 수학적 확률의 연결에 있어서 ‘가까이 간다’라는 표현과 함께 이상적인 형태의 1회의 시행

에 대한 누적 상대도수 그래프를 사용하는 것을 중지할 필요가 있다. 이러한 설명에 의한 직관적 이해는 상대도수와 수학적 확률 사이의 관계에 대한 오개념으로 이어질 가능성이 높을 뿐 아니라 상술한 바와 같이 확률 실험 해석에 부정적인 영향을 주는 것으로 판단된다. 따라서 이러한 방식의 직관적 이해를 교과서에서 설명을 통해 강화시키기 보다는, [그림 11]이나 [그림 14]처럼 여러 번의 시행 결과를 동시에 그래프로 나타내어 변이성과 변이성의 차등이 잘 나타나는 삽화를 사용하고 '가까이 간다'라는 표현보다는 '대체로 가까이 가는 경향이 있다'와 같은 표현을 통해, 상대도수와 수학적 확률 사이의 관계를 보다 정확하게 지도하는 것이 바람직하다고 생각된다.

둘째, 안구 운동 추적은 확률 시뮬레이션 학습에서 상호작용을 분석하는데 유의미한 정보를 제공하였다. 연구 참여자의 과제 수행 과정과 시선 흐름을 동기화시킨 영상으로부터 확률 판단을 내릴 때 자료의 어떤 부분에 주의를 집중하였는지 파악할 수 있었고, 이를 바탕으로 확률 판단의 근거를 보다 객관적으로 추론할 수 있었다. 또한 안구 운동 데이터는 동일한 응답을 한 학생들을 시뮬레이션에 아예 주의를 기울이지 않은 경우, 실험 결과를 관찰했음에도 직관과 실험 결과 사이의 모순을 인식하지 못한 경우로 구분할 수 있게 해주었다. 안구 운동 데이터의 도움 없이 이렇게 세밀하게 학생과 시뮬레이션 사이의 상호작용을 분석하고 분류해내는 것은 어려운 일이다. 확률·통계적 추론에서 주어진 자료의 관찰과 해석이 중요한 비중을 차지하는 만큼 이 영역에서의 안구 운동 추적 방법론의 적용은 많은 가능성을 가지고 있다고 판단된다. 그러나 평균 응시 시간이나 평균 응시 횟수 등의 안구 운동 지표(measure)를 정량적으로 분석하는 연구에 비해 본 연구에서 주로 사용한 정성적 분석 방식은 상대적으로 주관적 해석의 위험이 높다고 볼 수 있다. 따라서 전통적인 학습자의 행동 데이터와 안구 운동 데이터를 통합하여 객관적으로 학습자의 인지 과정을 분석할 수 있는 체계적인 연구 방법론에 대한 연구가 필요하다고 생각된다.

마지막으로, 본 연구는 안구 운동 측정을 위해 교사와 학생, 학생과 학생 사이의 사회적 상호작용을 배제하고 참가자 혼자 정해진 과제를 수행하는 과정을 분석했

다는 측면에서 한계가 있다. 또한 소수의 영재 학생을 대상으로 한 결과이기 때문에 분석에서 나타난 확률 추론 양상이 일반적이라고 볼 수 없다. 그러나 안구 운동 데이터를 이용하여 학생들의 확률 추론 과정을 분석한 사례 연구로써 의의가 있을 것이다. 안경 형태의 안구 운동 추적기를 이용하여 공학 도구, 과제와의 상호작용 외에 교사, 학생의 사회적 상호작용을 함께 분석하는 후속 연구도 의미가 있을 것이라 판단된다. 끝으로, 안구 운동 추적을 이용한 수학교육 연구들이 활발히 실시되길 기대한다.

참 고 문 헌

- 강옥기, 권은근, 이형주, 우희정, 윤상혁, 김태희, 김수철, 유승연, 윤혜미 (2013). 중학교 수학 2, 서울: 두산동아.
- Kang, O., Kwon, E., Lee, H., Woo, H., Yoon, S., Kim, T., Kim, S., Yoo, S., & Yoon, H. (2013). *Middle school mathematics 2*. Seoul: Doosan Donga.
- 고상숙, 주홍연, 한혜숙 (2014). 그래핑 계산기를 활용한 수학적 과정의 평가도구 개발에 관한 연구 - 중학교 수학을 중심으로-, 수학교육 53(2), 163-184.
- Koh, S., Joo, H., & Han, H. (2014). A study on the development of assessment tools using graphing calculators for the assessment of mathematical process -Focused on middle school mathematics-, *The Mathematical Education* 53(2), 163-184.
- 교육과학기술부 (2011). 수학과 교육과정(교육과학기술부 고시 제2011-361호[별책 8]).
- Ministers of Education Science and Technology (2011). *Mathematics curriculum*: MEST announcement 2011-361 [Separate Volume 8], Seoul: MEST.
- 김부윤, 이지성 (2008). Instrument로서의 테크놀로지와 수학 학습 패러다임의 변화, 수학교육 47(3), 261-271.
- Kim, B. & Lee, J. (2008). Technology as Instruments and the Change of Paradigm in Mathematics Learning, *The Mathematical Education* 47(3), 261-271.
- 류희찬, 류성립, 이경화, 신보미, 강순모, 윤옥교, 김명수, 조성오, 천태선, 김철호 (2013). 중학교 수학 2, 서울: 천재교육.
- Ryu, H., Ryu, S., Lee, K., Shin, B., Kang, S., Yoon, O., Kim,

- M., Cho, S., Chun, T., & Kim, C. (2013). *Middle School Mathematics 2*. Seoul: Chunjae.
- 신보미, 이경화 (2006). 컴퓨터 시뮬레이션을 통한 통계적 확률 지도에 대한 연구, 수학교육학연구 16(2), 139-156.
- Shin, B. & Lee, K. (2006). A Study on the Statistical Probability Instruction through Computer Simulation, *The Journal of Education Research in Mathematics* 16(2), 139-156.
- 신원섭, 신동훈 (2016). 실제 과학수업에서 시선추적과 주의력 검사를 통한 초등학생들의 주의 특성 분석, 한국과학교육학회지 36(4), 705-715.
- Shin, W. & Shin, D. (2016). An analysis of elementary students' attention characteristics through attention test and the eye tracking on real science classes, *Journal of the Korean Association for Science Education* 38(4), 705-715.
- 신항균, 황혜정, 이광연, 김화영, 조준모, 최화정, 윤기원 (2013). 중학교 수학 2, 서울: 지학사.
- Shin, H., Hwang, H., Lee, K., Kim, H., Cho, J., Choi, H., & Yoon, K. (2013). *Middle school mathematics 2*. Seoul: Jihaksa.
- 우정호, 이경화 (1996). 확률 개념의 교수학적 변환에 관한 연구, 수학교육학연구 6(1), 125-144.
- Woo, J. & Lee, K. (1996). A study on the didactic transposition of the concept of probability, *The Journal of Education Research in Mathematics* 6(1), 125-144.
- 우정호, 박교식, 이종희, 박경미, 김남희, 임재훈, 남진영, 권석일, 김진환, 강현영, 조차미, 최은자, 김준식, 허선희, 전지영, 고현주, 이정연 (2013). 중학교 수학 2, 서울: 두산동아.
- Woo, J., Park, K., Lee, J., Park, K., Kim, N., Lim, J., Nam, J., Kwon, S., Kim, J., Kang, H., Cho, C., Choi, E., Kim, J., Heo, S., Chun, J., Ko, H., & Lee, J. (2013). *Middle school mathematics 2*. Seoul: Doosan Donga.
- 이미진, 이광호 (2015). 시선 추적기를 통해 본, 4학년 학생들의 방정식에 대한 관계적 사고 형성, 학교수학 17(3), 391-405.
- Lee, M. & Lee, K. (2015). Elementary students' formation of relational thinking about equation - Centered for web-based balance. *school mathematics*, 17(3), 391-405.
- 이윤경, 조정수 (2015). '큰 수의 법칙' 탐구 활동에서 나타난 가추법의 유형 분석, 수학교육학연구 25(3), 323-345.
- Lee, Y. & Cho, C. (2015). An analysis on abduction type in the activities exploring 'Law of large numbers', *The Journal of Education Research in Mathematics* 23(3), 323-345.
- 이지윤 (2015). 3D 입체 변별 과제에서 공간 인지 전략의 유형과 역할 : 체화된 3D 거북 표현식과 전략을 중심으로. 박사학위논문, 서울대학교.
- Lee, J. (2015). *Type and role of spatial cognition strategies in 3D object discrimination tasks*. Doctoral dissertation, Seoul National University.
- 조한혁 (2003). 컴퓨터와 수학교육, 수학교육 42(2), 177-191.
- Cho, H. (2003). Computers and mathematics education, *The Mathematical Education* 43(2), 177-191.
- 최인용, 조한혁 (2016). 순열 조합 이해 과제에서의 안구 운동 추적 연구, 수학교육학연구 26(4), 635-662.
- Choi, I. & Cho, H. (2016). Eye movements in understanding combinatorial problems, *The Journal of Education Research in Mathematics* 28(4), 635-662.
- Abrahamson, D. (2009). Embodied design: Constructing means for constructing meaning, *Educational Studies in Mathematics* 70(1), 27-47.
- Andrá, C., Lindström, P., Arzarello, F., Holmqvist, K., Robutti, O., & Sabena, C. (2015). Reading mathematics representations: An eye-tracking study, *International Journal of Science and Mathematics Education* 13(2), 237-259.
- Aspinwall, L. & Tarr, J. E. (2001). Middle school students' understanding of the role sample size plays in experimental probability, *The Journal of Mathematical Behavior* 20(2), 229-245.
- Baars, B. J. & Gage, N. M. (2010). *Cognition, brain, and consciousness: Introduction to cognitive neuroscience*. Burlington, USA: Academic Press.
- Batanero, C. & Sanchez, E. (2005). What is the nature of high school students' conceptions and misconceptions about probability? *In exploring probability in school* (241-266). New York, USA: Springer.

- Biehler, R. (1991). Computers in probability education. In *chance encounters: Probability in education* (pp. 169-211). Netherlands: Springer.
- Campbell, S. R. (2010). Embodied minds and dancing brains: New opportunities for research in mathematics education. In *Theories of mathematics education* (309-331). Berlin: Springer.
- Chance, B., Ben-Zvi, D., Garfield, J., & Medina, E. (2007). The role of technology in improving student learning of statistics, *Technology Innovations in Statistics Education* 1(1), 16-41.
- Chaput, B., Girard, J. C., & Henry, M. (2011). Modeling and simulations in statistics and probability, In *Teaching Statistics in School Mathematics-Challenges for Teaching and Teacher Education*. (85-85). A Joint ICMI/IASE Study.
- Eichler, A. & Vogel, M. (2014). Three approaches for modelling situations with randomness, In *Probabilistic thinking* (75-99). Netherlands: Springer.
- English, L. D. & Watson, J. M. (2016). Development of probabilistic understanding in fourth grade, *Journal for Research in Mathematics Education* 47(1), 28-62.
- Epelboim, J. & Suppes, P. (2001). A model of eye movements and visual working memory during problem solving in geometry, *Vision Research* 41(12), 1561-1574.
- Fischbein, E. & Schnarch, D. (1997). The evolution with age of probabilistic, intuitively based misconceptions, *Journal for research in mathematics education*, 96-105.
- Freudenthal, H. (1972). The 'empirical law of large numbers' or 'The stability of frequencies', *Educational studies in mathematics* 4(4), 484-490.
- Gazzaley, A. & Nobre, A. C. (2012). Top-down modulation: Bridging selective attention and working memory, *Trends in cognitive sciences* 16(2), 129-135.
- Henderson, J. M., Brockmole, J. R., Castelano, M. S., & Mack, M. (2007). Visual saliency does not account for eye movements during visual search in real-world scenes. *Eye movements: A window on mind and brain* (537-562). Netherlands: Elsevier.
- Holmqvist, K., Nyström, M., Andersson, R., Dewhurst, R., Jarodzka, H., & Van de Weijer, J. (2011). *Eye tracking: A comprehensive guide to methods and measures*. Oxford, UK: Oxford University Press.
- Inzunza, S. & México, C. S. (2008). Probability calculus and connections between empirical and theoretical distributions through computer simulation, In *Proceedings of the 11th International Congress on Mathematical Education. Monterrey México*.
- Ireland, S. & Watson, J. (2009). Building a connection between experimental and theoretical aspects of probability, *International Electronic Journal of Mathematics Education* 4(3), 339-370.
- Just, M. A. & Carpenter, P. A. (1980). A theory of reading: from eye fixations to comprehension, *Psychological review* 87(4), 329.
- Konold, C. (1995). Confessions of a coin flipper and would-be instructor, *The American Statistician*, 49(2), 203-209.
- Konold, C. & Miller, C. D. (2005). Tinker plots dynamic data exploration. 1.0, *Computer software/ Emeryville, CA: Key Curriculum Press*.
- Knoblich, G., Ohlsson, S., & Raney, G. E. (2001). An eye movement study of insight problem solving, *Memory & Cognition* 29(7), 1000-1009.
- Lin, J. J. H. & Lin, S. S. (2014). Cognitive load for configuration comprehension in computer-supported geometry problem solving: An eye movement perspective, *International Journal of Science and Mathematics Education* 12, 605-627.
- Maxara, C. & Biehler, R. (2006). Students' probabilistic simulation and modeling competence after a computer-intensive elementary course in statistics and probability, In *Proceeding of the Seventh*

- International Conference on the Teaching of Statistics*.
- Papert, S. (1980). *Mindstorms: Children, computers, and powerful ideas*, New York, USA: Basic Books Inc.
- Parkhurst, D., Law, K., & Niebur, E. (2002). Modeling the role of salience in the allocation of overt visual attention, *Vision research* 42(1), 107-123.
- Posner, M. I. (1980). Orienting of attention, *Quarterly journal of experimental psychology* 32(1), 3-25.
- Prodromou, T. (2012). Connecting experimental probability and theoretical probability, *ZDM* 44(7), 855-868.
- Radford, L. (2010). The eye as a theoretician: Seeing structures in generalizing activities, *For the Learning of Mathematics* 30(2), 2-7.
- Rayner, K. (1998). Eye movements in reading and information processing: 20 years of research, *Psychological bulletin* 124(3), 372.
- Shaughnessy, J. M., Canada, D., & Ciancetta, M. (2003). Middle school students' thinking about variability in repeated trials: A cross-task comparison, *International Group for the Psychology of Mathematics Education* 4, 159-166.
- Snowden, R., Thompson, P., & Troscianko, T. (2012). *Basic vision: an introduction to visual perception*. 오성주 역. 서울: 학지사.
- Stohl, H. & Tarr, J. E. (2002). Developing notions of inference using probability simulation tools, *The Journal of Mathematical Behavior* 2(3), 319-337.
- Susac, A., Bubic, A., Kaponja, J., Planinic, M., & Palmovic, M. (2014). Eye movements reveal students' strategies in simple equation solving, *International Journal of Science and Mathematics Education* 12, 555-577.
- Tversky, A. & Kahneman, D. (1971). Belief in the law of small numbers. *Psychological bulletin* 76(2), 105.
- Wilensky, U. (1995). Paradox, programming, and learning probability: A case study in a connected mathematics framework, *The Journal of Mathematical Behavior* 14(2), 253-280.
- Wilensky, U. (1997). What is normal anyway? Therapy for epistemological anxiety, *Educational Studies in Mathematics* 33(2), 171-202.
- Yarbus, A. L. (1967). Eye movements during perception of complex objects. In *Eye movements and vision* (171-211). New York, USA: Springer.

An Analysis of Middle School Student's Eye Movements in the Law of Large Numbers Simulation Activity

Choi, In Yong

Hansung Science High School, Seoul 279-79, Korea

E-mail : ciy98@snu.ac.kr

Cho, Han Hyuk[†]

Department of Mathematics Education, Seoul National University,

E-mail : hancho@snu.ac.kr

This study analyzed the difficulties of middle school students in computer simulation of the law of large numbers through eye movement analysis. Some students did not attend to the simulation results and could not make meaningful inferences. It is observed that students keep the existing concept even though they observe the simulation results which are inconsistent with the misconceptions they have. Since probabilistic intuition influence student's thinking very strongly, it is necessary to design a task that allows students to clearly recognize the difference between their erroneous intuitions and simulation results. In addition, we could confirm through eye movements analysis that students could not make meaningful observations and inferences if too much reasoning was needed even though the simulation included a rich context. It is necessary to use visual representations such as graphs to provide immediate feedback to students, to encourage students to attend to the results in a certain intentional way to discover the underlying mathematical structure rather than simply presenting experimental data. Some students focused their attention on the visually salient feature of the experimental results and have made incorrect conclusion. The simulation should be designed so that the patterns of the experimental results that the student must discover are not visually distorted and allow the students to perform a sufficient number of simulations. Based on the results of this study, we suggested that cumulative relative frequency graph showing multiple results at the same time, and the term 'generally tends to get closer' should be used in learning of the law of large numbers. In addition, it was confirmed that eye-tracking method is a useful tool for analyzing interaction in technology-based probabilistic learning.

* ZDM Classification : U73

* 2000 Mathematics Subject Classification : 97U70

* Key words : eye movement, law of large numbers, simulation, probability education

[†] Corresponding author