대한수학교육학회지 수학교육학연구 제 27 권 제 3 호
Journal of Educational Research in Mathematics
Vol. 27, No. 3, 351 ~ 373. Aug 2017

수학의 내적 연결성을 강조한 5학년 분수 나눗셈과 소수 나눗셈 수업의 실행 연구

김 정 원*

나눗셈의 의미는 수의 범위가 확장되어도 연결된다. 즉, 자연수 범위에 적용되는 나눗셈의 의미는 분수 및 소수를 다루는 유리수 범위로 확장되어도 적용가능하다. 이러한 측면에서 자연수의 나눗셈과 분수의 나눗셈, 소수의 나눗셈을 서로 연결하여 가르치는 것은 수학의 내적 연결성을 통하여 나눗셈을 의미 있게 학습하는데 도움이 될 것이다. 본 연구에서는 5학년 2학기에 제시되는 분수의 나눗셈과 소수의 나눗셈 단원을 나눗셈의 의미와 절차가 연결되도록 재구성한 뒤 수업을 실행하고 분석하였다. 연구 결과, 학생들은 수의 범위가 확장되더라도 나눗셈의 의미를 이해하여 문제를 해결하거나 만들 수 있었다. 또한 문제 해결 과정에서 자연수의 나눗셈, 분수의 나눗셈, 소수의 나눗셈의 원리를 이용할 수 있었다. 단, 일부 학생들의 경우 나눗셈 의미를 이해하지 못하여 잘못된 나눗셈식을 세우거나 문제를 만들었으며, 특정한 해결 절차만을 선호하는 모습도 발견할 수 있었다. 본 연구를 통하여 초등학교 전 과정에 제시되는 나눗셈을 연결성을 강조하여 의미 있게 지도·학습할 수 있는 방향을 모색하는데 도움이 되기를 기대한다.

I. 서론

형식적인 교육과정을 통하여 학생들이 학습하는 수학의 양은 방대하다. 방대한 수학 내용은 수학적 연결성을 고려하여 내적, 외적으로 서로 연결 지을 수 있으며, 이는 학생들의 이해도를 높이고 학습 부담을 경감시킬 수 있다(NCTM, 2000). 이러한 측면에서 볼 때, 초등학교 수학에서 가장 큰 비중을 차지하는 수와 연산 영역의 사칙연산들은 연산끼리 서로 연결되어 있다. 즉, 뺄셈은 덧셈의 역연산으로, 나눗셈은 곱셈의 역연산으로 이해할 수 있다. 한편, 각각의 연산의 의미나 성질은 수의 범위가 확장되어도 대부분 본질적으로 변하지 않는다(Barnett-Clarke, Fisher, Marks, & Ross, 2010). 예를 들어, 범자연수 범위에서의 덧셈과 뺄셈의 의미인 첨가, 합병, 제거, 비교는(Carpenter, Fennema, Franke, Levi, & Empson, 1999) 유리수의 범위의 덧셈과 뺄셈에서도 적용된다. 또한 결합법칙, 교환법칙, 항등원, 역원, 분배법칙과 같은 덧셈과 곱셈의 성질은 범자연수에서 분수, 소수로 확장되어도 적용된다(Blanton, Levi, Crites, & Dougherty, 2011).

사칙연산 가운데 나눗셈은 자연수, 분수, 소수 영역 모두에서 가장 나중에 다루어지는 연산이다. 나눗셈의 의미는 분할 나눗셈과 측정 나눗셈으로 구분되는데, 전자는 전체를 몇 묶음으로 똑같이 나누었을 때 한 묶음의 크기가 얼마인지에 관한 것이고 후자는 전체를 일정한 단위로 묶었을 때 몇 묶음이 되는지에 관한 것이다(교육부, 2016d). 이와 같은 나눗셈의 의미는 자연수 범위뿐만 아니라 분수 및 소수의 나눗셈에도 적용되

* 신탄진초등학교, nymph019@hanmail.net

기 때문에, 수의 범위가 확장됨에 따라 나눗셈을 의미 있게 연결할 수 있다. 하지만 제수가 분수 및 소수인 나눗셈에는 이러한 나눗셈의 의미를 적용하기에 적절하지 않으므로 나눗셈의 의미가 조정될 필요가 있다(Barnett-Clarke et al., 2010). 이와 관련하여 단위 비율 결정 맥락, 곱셈의 역 그리고 카테시안 곱의 역으로서의 나눗셈의 의미는 유리수 범위의 나눗셈에 적절한 상황을 제공해줄 수 있다(Sinicrope, Mick, & Kolb, 2002).

2009 개정 교육과정에 의한 교과서를 살펴보면 3학년 1학기와 2학기, 4학년 1학기에 자연수의 나눗셈을, 5학년 2학기와 6학년 1학기에 분수의 나눗셈과 소수의 나눗셈을 다루고 있다(교육부, 2015a~b, 2016a~c). 특히 5학년과 6학년에서는 분수의 나눗셈 단원과 소수의 나눗셈 단원을 나란히 제시하고 있는데, 이는 두 단원 모두 나눗셈 연산에 관한 것이고, 분수와 소수 개념이 서로 관련되기 때문에 연결성을 고려하여 두 단원을 배열한 것이라 판단된다.

한편, 나눗셈에 관한 학생들의 이해를 살펴보면 학생들은 사칙 연산 가운데 나눗셈을 가장 어려워하며, 자연수의 나눗셈에 비하여 분수나 소수의 나눗셈을 더욱 어려워하는 것으로 드러났다(Barnett-Clarke et al., 2010; Sinicrope et al., 2002). 이와 같은 어려움의 원인으로, 학생들은 분수의 나눗셈 문제를 해결할 수는 있지만 분수의 나눗셈의 의미를 충분히 이해하지 못하기 때문이거나(김경미, 황우형, 2011), 분수 나눗셈의 의미에 따라 수반되어야 하는 사전 지식이 부족하기 때문이다(이영주, 이광호, 이효진, 2012). 소수 나눗셈의 경우, 소수의 다른 연산에 비하여 낮은 수행 능력을 드러냈다(문범식, 이대현, 2014). 이와 같이 초등학교 학생들은 분수의 나눗셈과 소수의 나눗셈의 의미를 이해하고 수행하는데 어려움을 겪고 있으며, 이와 같은 학습 결손은 학년이 올라갈수록 격차가 크게 나타날 수 있으므로, 분수의 나눗셈과 소수의 나눗셈을 처음 학습하는 5학년 시기에 이를 의미 있게 다루어줄 필요가 있다.

이에 본 연구에서는 수학의 내적 연결성을 고려하여 5학년 2학기에 제시되는 3. 분수의 나눗셈 단원과 4. 소수의 나눗셈 단원을 연결하여 가르치고자 한다. 특히 자연수에서 다루어진 다양한 나눗셈 상황을 분수 및 소수의 나눗셈 상황에서도 적용하고, 학생 스스로 나눗셈식을 세워보는 기회를 지속적으로 제공함으로써 타 연산과 구분되는 나눗셈 상황을 이해하고 제수와 피제수를 구분하여 나눗셈식으로 나타낼 수 있도록 강조하여 지도하였다. 뿐만 아니라 자연수 나눗셈의 계산 원리를 분수 및 소수 나눗셈 해결에 적용하고, 분수의 나눗셈과 소수의 나눗셈의 계산 원리 또한 연결할 수 있게 하였다. 본 연구를 통하여 분수의 나눗셈과 소수의 나눗셈을 포함한 초등학교에서의 나눗셈의 지도 방안에 대한 시사점을 제시하고, 자연수 나눗셈, 분수 나눗셈 그리고 소수 나눗셈을 연결하지 못하고 각각 분리하여 학습함으로써 생길 수 있는 학생들의 학습 부담감을 경감시키고자 한다.

II. 이론적 배경

1. 나눗셈의 의미

나눗셈의 의미는 나눗셈이 이루어지는 상황에 의하여 분할 나눗셈과 측정 나눗셈으로 구분된다. 분할 나눗셈은 주어진 대상을 몇 묶음으로 묶었을 때 한 묶음의 크기가 얼마인지를 묻는 상황으로 등분제에 해당된다. 측정 나눗셈은 주어진 대상을 일정한 단위로 묶으면 몇 묶음이 되는지 묻는 상황으로 포함제라고도 한다. Carptenter 외(2005)는 이와 같은 나눗셈의 두 가

지 의미를 묶기 및 분할, 비율, 가격, 곱셈적 비교의 문제 유형으로 각각 구분하여 더욱 구체적인 문제 상황을 제시하였다.

나눗셈의 대표적인 의미인 분할 나눗셈과 측정 나눗셈이외에 카테시안 곱의 역(inverse of a Cartesian product) 맥락을 고려해볼 수 있다(Sinicrope et al., 2002). 이는 한 변의 길이가 4cm이고 넓이가 12cm^{2}인 직사각형 또는 직사각형 모양의 배열에서 나머지 한 변의 길이를 구하는 것과 같은 상황이다. 지금까지 살펴본 분할 나눗셈, 측정 나눗셈, 그리고 카테시안 곱의 역으로서의 나눗셈은 분수 및 소수의 나눗셈에도 적용될 수 있지만, 단 제수가 분수나 소수인 경우 분할 나눗셈 상황이 적절하지 못하므로 측정 나눗셈을 도입하거나 그 밖의 다른 상황을 고려해 볼 필요가 있다.

이와 관련하여 Sinicrope 외(2002)는 분수 나눗셈을 해석하기에 적절한 5가지 상황을 제시한다. 여기에는 분할 나눗셈과 측정 나눗셈, 카테시안 곱의 역 맥락 외에 단위 비율 결정 맥락(determination of a unit rate)과 곱셈의 역(inverse of multiplication)이 추가된다. 단위 비율 결정 맥락이란 분수와 같이 불특정한 비율로 주어진 값을 기본 단위에 해당하는 값으로 환산하는 양을 구하는 것이다(Ma, 1999). $1\frac{3}{4} \div \frac{1}{2}$의 나눗셈식은 단위 비율 결정 맥락에 의하면 어떤 수의 $\frac{1}{2}$이 $1\frac{3}{4}$일 때 어떤 수의 값을 구하는 상황으로 이해할 수 있다. 같은 나눗셈식을 곱셈의 역 맥락으로 해석하면, 어떤 수에 $\frac{1}{2}$을 곱한 값이 $1\frac{3}{4}$일 때의 어떤 수의 값을 구하는 상황이 된다.

지금까지 살펴본 나눗셈 의미를 정리하면, 범자연수의 나눗셈 상황으로 측정 나눗셈, 분할 나눗셈, 카테시안 곱의 역으로서의 나눗셈을 적용할 수 있다. 하지만 수가 분수나 소수와 같은 유리수로 확장됨에 따라 이러한 상황으로 나눗셈식을 설명하기에는 충분하지 않으며 이에 따라 단위 비율 결정 맥락이나 곱셈의 역으로서의 나눗셈을 도입할 수 있다.

한편, 교과서에서 분수의 나눗셈과 소수의 나눗셈의 단원 구성을 살펴보면, 제수나 피제수의 수의 유형, 즉, 제수가 자연수인지 분수 또는 소수인지에 의하여 구분되거나 나누어떨어지는 지의 여부로 차시가 구분되어 단원이 구성됨을 알 수 있다. 이러한 맥락에서 지금까지 살펴본 5가지 나눗셈 상황을 제수와 피제수의 수의 유형으로 구분하여 생각해볼 수 있다(<표 II-1> 참조). 측정 나눗셈, 카테시안 곱의 역, 곱셈의 역 상황은 제수나 피제수의 수의 유형에 상관없이 모두 적용해 볼 수 있는 반면, 분할 나눗셈의 경우 전체를 0.5개, $\frac{3}{4}$개로 나누는 것은 자연스럽지 않으므로 제수가 자연수인 상황에 적절하게 적용할 수 있다. 이와 다르게 단위 비율 결정 맥락은 제수가 분수나 소수와 같은 불특정한 비율인 경우에 적용해 볼 수 있다.

<표 II-1> 피제수와 제수의 수의 범위에 따른 나눗셈 의미의 적용

	(피제수)÷(제수)			
	(자*)÷(자)	(자)÷(분*)	(분)÷(자)	(분)÷(분)
측정 나눗셈				
분할 나눗셈		×		×
카테시안 곱의 역				
단위 비율 결정	-		-	
곱셈의 역				

*'자'는 자연수, '분'은 분수를 의미함

참고로, 나눗셈의 의미와 관련하여 대부분의

연구에서는 범자연수의 나눗셈의 의미를 제시하고 분수 나눗셈으로 확장하여 분수 나눗셈에 적용할 수 있는 의미를 추가한다(예, Sinicrope et al., 2002; 이지영, 2015). 따라서 소수 나눗셈의 의미만을 상세히 살펴본 연구를 찾아보기 힘든데, 이는 소수가 자연수와 같은 십진 체계를 따르고 모든 소수는 분수로 바꿀 수 있기 때문에이라 여겨진다. 따라서 본 연구에서는 지금까지 살펴본 5가지 나눗셈의 의미를 소수 나눗셈에도 적용하여 관련 상황을 구성하고자 한다.

2. 교과서에 드러난 자연수의 나눗셈, 분수의 나눗셈, 소수의 나눗셈의 연결성 분석

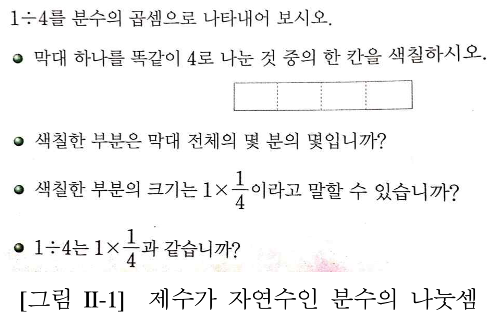
현재 사용되고 있는 2009 개정 교육과정에 따른 수학 교과서에서 자연수의 나눗셈, 분수의 나눗셈, 그리고 소수의 나눗셈이 어떻게 다루어지고 있으며 그 안에 어떠한 연결성이 내재되어 있는지 나눗셈의 계열과 계산 원리로 나누어 살펴보았다.

가. 나눗셈 계열의 연결성

2009 개정에 따른 초등학교 수학 교과서를 살펴보면 3학년 1학기와 2학기, 4학년 1학기에는 자연수의 나눗셈이, 5학년 2학기와 6학년 1학기에는 분수의 나눗셈과 소수의 나눗셈이 제시된다. <표 II-2>는 3학년 1학기부터 6학년 1학기까지 나눗셈과 관련된 단원의 내용 및 특징을 간략히 정리한 것이다.

나눗셈이 처음 도입되는 3학년 1학기에는 포함제 및 등분제의 나눗셈 의미에 해당하는 문제 상황을 통하여 나눗셈식을 정의하고, 곱셈구구 범위의 나눗셈식을 다룬다. 이 때 나눗셈이 곱셈의 역연산이라는 성질을 이용하여 문제를 해결하기도 한다. 3학년 2학기에도 1학기와 유사하게 (두 자리 수)÷(한 자리 수)의 나눗셈을 다루지만 곱셈구구의 범위를 넘어서기 때문에 수모형을 이용하거나 세로로 계산하는 방법을 도입하고 있다. 또한 나누어떨어지지 않는 나눗셈을 도입함으로써 몫과 나머지로 나눗셈의 결과를 나타낸다.

5학년 2학기와 6학년 1학기에 다루는 분수의 나눗셈과 소수의 나눗셈은 그동안 자연수의 범위에서 다루었던 나눗셈이 유리수 범위로 확장된 것이라 할 수 있다. 5학년 2학기 3. 분수의 나눗셈 단원에서 가장 먼저 다루는 나눗셈은 (자연수)÷(자연수)로 4학년까지 다루었던 자연수의 나눗셈과 식의 형태는 동일하지만, 몫을 분수로 나타낸다는 점에서 차이가 있다. [그림 II-1]과 같이 1÷4의 나눗셈식을 해결하기 위하여 '÷4'와 '$\times\frac{1}{4}$'의 의미가 같다는 것을 바탕으로 나눗셈을 곱셈으로 바꾸고 제수를 역수 바꾸어 계산하는 과정을 설명하고 있다.



[그림 II-1] 제수가 자연수인 분수의 나눗셈 (2015a, p.88)

한편, 6학년 1학기 2. 분수의 나눗셈 단원에서는 제수가 자연수가 아닌 나눗셈을 다루는데, [그림 II-2]와 같이 계산식을 조작함으로써 제수가 역수가 되는 과정을 도출하고 있어 5학년 2학기의 제수가 자연수인 나눗셈 계산 과정에 비하여 다소 계산 절차에 초점이 맞추어져 있다고

<표 II-2> 자연수의 나눗셈, 분수의 나눗셈, 소수의 나눗셈 단원의 내용 및 특징

시기	(자연수)÷(자연수)	(분수)÷(자연수)	(소수)÷(자연수)	(분수)÷(분수)	(자연수)÷(분수)	(소수)÷(소수)	(자연수)÷(소수)	계산 원리(✓)/비고(*)
3-1	**3. 나눗셈** • 똑같이 나누기 • 곱셈과 나눗셈의 관계 • 곱셈식에서 나눗셈의 몫 알아보기 • 곱셈구구로 나눗셈의 몫 구하기							✓그림 ✓곱셈의 역연산 이용 *나누어 떨어짐 *3-1-6 분수 단원에서 분수, 소수 개념 도입
3-2	**2. 나눗셈** • (두 자리 수)÷(한 자리 수)							✓그림 ✓수모형 ✓세로 계산 *나누어 떨어지지 않는 나눗셈 도입
4-1	**2. 곱셈과 나눗셈** • (두 자리 수)÷(두 자리 수) • (세 자리 수)÷(두 자리 수)							✓수모형 ✓동치식으로 변환 (예.160÷20=16÷2) ✓비율표로 어림 ✓세로 계산
5-2	**3. 분수의 나눗셈** • (자연수)÷(자연수)를 곱셈으로 나타내기 • 나눗셈의 몫을 분수로 나타내기	**3. 분수의 나눗셈** • (진분수)÷(자연수) • (가분수)÷(자연수) • (대분수)÷(자연수)						✓그림(막대, 사각형) ✓분수 곱셈 *나눗셈의 몫으로서의 분수의 의미
5-2	**4. 소수의 나눗셈** • 몫을 소수로 나타내기 • 몫을 반올림하여 나타내기		**4. 소수의 나눗셈** • 몫이 소수 한 자리, 소수 두 자리의 대소수 • 몫이 1보다 작은 소수 • 소수점 아래 0을 내려 계산 • 몫의 소수 첫째 자리에 0이 있는 계산					✓분수 곱셈 ✓자연수끼리의 나눗셈의 몫과 비교 (예. 26÷2→2.6÷2) ✓세로 계산
6-1				**2. 분수의 나눗셈** • (진분수)÷(진분수) • (대분수)÷(대분수)	**2. 분수의 나눗셈** • (자연수)÷(단위분수) • (자연수)÷(진분수)			✓그림 ✓통분→자연수 나눗셈 ✓분수 곱셈
6-1			**3. 소수의 나눗셈** • 몫과 나머지 구하기 • 몫을 반올림하여 나타내기			**3. 소수의 나눗셈** • (소수 한 자리 수)÷(소수 한 자리 수) • (소수 두 자리 수)÷(소수 두 자리 수) • (소수 두 자리 수)÷(소수 한 자리 수)	**3. 소수의 나눗셈** • (자연수)÷(소수 한 자리 수) • (자연수)÷(소수 두 자리 수)	✓동치식으로 변환 (예. 3.68÷0.46=368÷46) ✓소수를 분수로→자연수 나눗셈 ✓세로 계산

사료된다. 따라서 제수의 역수를 곱하는 원리를 처음 다루는 5학년 과정에서 계산 원리를 이해할 수 있도록 제시하는 것과 같이, 6학년에서도 학생들이 계산 절차뿐만 아니라 그 의미에도 초점을 맞출 수 있도록 교사의 주의가 필요할 것으로 보인다.

$\frac{2}{3}\div\frac{5}{7}=\frac{2\times7}{3\times7}\div\frac{5\times3}{7\times3}=(2\times7)\div(5\times3)=\frac{2\times7}{5\times3}$입니다.

$\frac{2\times7}{5\times3}=\frac{2\times7}{3\times5}$이고 $\frac{2\times7}{3\times5}$은 $\frac{2}{3}\times\frac{7}{5}$과 같습니다.

따라서 $\frac{2}{3}\div\frac{5}{7}=\frac{\square}{\square}\times\frac{\square}{\square}$입니다.

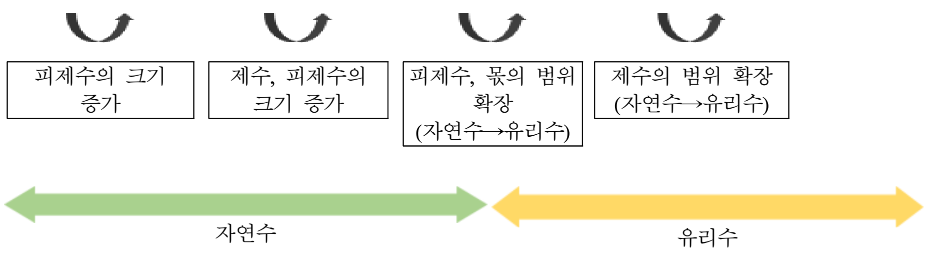
[그림 II-2] 제수가 분수인 분수의 나눗셈 (2015b, p. 49)

참고로 제수와 피제수, 몫과 나머지의 수의 형태를 기준으로 3학년부터 6학년까지 나눗셈이 어떻게 제시되는지 살펴보았다 (<표 II-3> 참조). 우선, 나눗셈이 도입되는 3학년부터 5학년까지 지속적으로 다루어지고 있는 (자연수)÷(자연수)의 몫과 나머지를 살펴보면, 3, 4학년과 5학년에서 차이가 있다. 즉, 3학년 2학기와 4학년 1학기에는 나누어떨어지지 않는 나눗셈의 몫과 나머지를 모두 자연수로 나타냈는데, 예를 들어 19÷5의 몫은 3, 나머지는 4로 하여 19÷5=3⋯4로 표현했다. 반면, 5학년 2학기에는 몫을 분수 또는 소수로 나타내거나 어림하게 하는데, 예를 들어 3÷4의 몫은 분수 $\frac{3}{4}$ 또는 소수 0.75로 나타내고, 나누어떨어지지 않는 나눗셈인 4÷7의 몫은 반올림하여 소수 첫째 자리 또는 둘째 자리까지인 0.6이나 0.57로 나타내도록 한다.

이와 관련하여 교과서에 제시된 나눗셈 상황을 살펴보면, 같은 (자연수)÷(자연수)의 나눗셈을 다루지만 몫과 나머지를 다루는 방식에 따라 나눗셈 상황이 다르게 제시된다는 것을 알 수 있다. 예를 들어, [그림 II-3]과 같이 3학년에 제시되는 상황은 이산량의 포함제 상황으로 몫과 나머지가 자연수가 되는 것이 자연스러운 반면, 5학년에서는 연속량의 등분제 상황에 해당되기 때문에 몫이 유리수이고 나머지가 0이 되는 것이 이치에 맞다.

<표 II-3> 몫과 나머지의 관점에서 본 나눗셈 단원의 계열성

	3-1	3-2		4-1		5-2		6-1		
피제수	자연수	자연수		자연수		자연수, 분수, 소수		자연수, 분수, 소수		
제수	자연수	자연수		자연수		자연수		자연수, 분수, 소수		
몫	자연수	자연수	자연수	자연수	자연수	분수	소수	분수	소수	자연수
나머지	0	0	자연수	0	자연수	0	0	0	0	소수



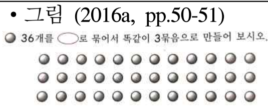
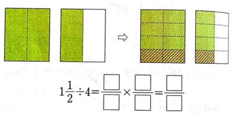
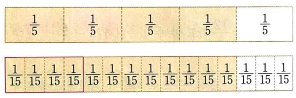
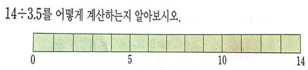
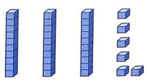
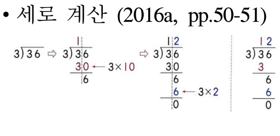
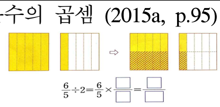
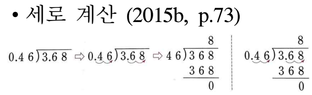
학년	상황
3	 (교육부, 2016a, p.52)
5	 (교육부, 2015a, p.126)

[그림 II-3] (자연수)÷(자연수)의 나눗셈 상황

나. 나눗셈 계산 원리의 연결성

다음으로 교과서에서 나눗셈의 계산 원리를 어떻게 설명하는지 구체적으로 살펴보았다. 본 연구에서는 5학년 2학기 분수의 나눗셈과 소수의 나눗셈 단원이 초점이지만 나눗셈의 의미와 계산 원리는 수의 범위가 달라져도 연결되기 때문에, 자연수, 분수, 소수의 나눗셈을 각각 분리하여 다루기보다는 나눗셈이라는 큰 맥락 아래에서 공통점과 차이점을 이해하고 연결하여 가르칠 필요가 있다. 이러한 맥락에서 <표 II-4>와 같이 나눗셈이 처음 도입되는 3학년 1학기부터 5학년 2학기까지 나눗셈 단원을 자연수, 분수, 소수로 나누어 계산 원리를 어떻게 설명하고 있는지 정리하였다. 이 때 표에 제시된 계산 원리는 교과서에 포함된 모든 원리들을 나타낸 것이

<표 II-4> 나눗셈의 계산 원리

	자연수	분수	소수
활동 1	• 그림 (2016a, pp.50-51)  	• 넓이 모델 (2015a, p. 96)  • 분수 막대 (2015b, p.48)  • 통분 후 나눗셈(2015b, p.48) $\frac{4}{5}\div\frac{4}{15}=\frac{12}{15}\div\frac{4}{15}=\square\div\square=\square$	• 그림 (2015b, p.76)  • 자연수 나눗셈과 비교 (2015a. p.117) $168\div12=\square$ $16.8\div12=\square$ • 동치식 (2015b, p.73) 3.68 m와 0.46 m를 cm 단위로 고쳐서 계산하시오. 3.68 m=□ cm, 0.46 m=□ cm ⇨ $3.68\div0.46=368\div\square=\square$
활동 2	• 수모형 (2016a, pp.50-51)  • 세로 계산 (2016a, pp.50-51) 	• 분수의 곱셈 (2015a, p.95)  <활동 3> • 분수의 곱셈 (2015b, p. 49) $\frac{2}{3}\div\frac{5}{7}=\frac{2\times7}{3\times7}\div\frac{5\times3}{7\times3}=(2\times7)\div(5\times3)=\frac{2\times7}{5\times3}$입니다. $\frac{2\times7}{5\times3}=\frac{2\times7}{3\times5}$이고 $\frac{2\times7}{3\times5}$은 $\frac{2}{3}\times\frac{7}{5}$과 같습니다. 따라서 $\frac{2}{3}\div\frac{5}{7}=\frac{\square}{\square}\times\frac{\square}{\square}$입니다.	• 분수의 곱셈 (2015a, p.117) $16.8\div12=\frac{\square}{10}\div12=\frac{\square}{10}\times\frac{1}{\square}=\frac{\square}{10}=\square$ • 분수의 나눗셈(통분) (2015b, p.73) $3.68\div0.46=\frac{368}{100}\div\frac{46}{100}=\square\div\square=\square$ • 세로 계산 (2015b, p.73) 

아니라 빈번하게 제시되는 원리나 전략들이라는 것을 염두에 두어야 한다.

우리나라 초등학교 수학 교과서는 자연수, 분수, 소수의 순서로 나눗셈을 다루고 있으며, 문제 상황이 제시된 다음 <활동 1>과 <활동 2>로 나누어 계산 방법 및 원리를 소개하면서 문제를 해결한다. <표 II-4>에서 알 수 있듯이 <활동 1>에서는 주로 반 구체물이나 그림과 같은 좀 더 직관적이며 구체적인 방법을 통하여 나눗셈을 해결하고, <활동 2>로 갈수록 원래의 식을 변형하거나 나눗셈을 곱셈으로 바꾸어 계산하거나 세로로 계산하는 것과 같은 좀 더 추상적이며 형식적인 방법을 도입한다는 것을 알 수 있다.

연결성 측면에서 살펴보면, 크게 2가지 측면에서의 나눗셈 계산 원리가 연결되어 있다. 우선 자연수의 나눗셈 원리가 분수의 나눗셈 및 소수의 나눗셈과 연결되어, 분수의 나눗셈 및 소수의 나눗셈 계산 과정에서 자연수 나눗셈 계산 원리가 활용된다.

<표 II-4>에 제시된 것처럼 16.8÷12를 168÷12와 비교하여 계산하는 것은 소수의 나눗셈을 자연수의 나눗셈으로 바꾼 뒤, 피제수가 $\frac{1}{10}$이 된 만큼 몫도 $\frac{1}{10}$이 된다는 성질을 적용하는 것이다. 또한 이분모 분수의 나눗셈의 분모를 통분한 뒤 분자끼리 나누어 계산하는 과정은 자연수의 나눗셈이 연결되어 있다고 할 수 있다.

다음으로, 분수의 나눗셈과 소수의 나눗셈의 연결성을 고려해볼 수 있다. 특히 분수의 나눗셈과 소수의 나눗셈 단원은 5학년 2학기와 6학년 1학기에서 모두 연달아 제시되는데, 소수의 나눗셈 원리를 살펴보면 분수의 나눗셈 원리와 밀접하게 연관되어 있다는 것을 알 수 있다. <표 II-5>는 5학년 2학기와 6학년 1학기에 다루는 분수의 나눗셈과 소수의 나눗셈에서 계산 원리가 연결되는 예로서, 네모 박스 부분에서 볼 수 있듯이 소수의 나눗셈을 계산하는 과정에서 소수를 분수로 바꾸어 계산하는 방법이 제시된다.

이상으로 나눗셈의 계산 절차에서의 연결성을 살펴보았다. 그 결과 자연수의 나눗셈, 분수의 나눗셈, 소수의 나눗셈이 연결되어 제시되고 있다는 것을 알 수 있다. 따라서 수업에서, 의미를 이해하지 못한 채 절차만을 기계적으로 수행하는 것이 아니라, 이전에 학습한 내용을 적용하여 계산 원리를 터득함으로써 나눗셈이 서로 연결되고 있다는 것을 이해할 수 있도록 지도해야 할 것이다. 만약 그렇지 못하다면 분수의 나눗셈 계산에서 학생들이 그 의미를 이해하지 못한 채 무조건 나눗셈을 곱셈으로 바꾼 뒤 제수의 역수를 취하여 계산하는 것과 같은 상황이 발생될

<표 II-5> 분수의 나눗셈과 소수의 나눗셈의 계산 원리의 연결성

학년-학기	분수의 나눗셈	→	소수의 나눗셈
5-2	$\frac{6}{5} \div 2 = \frac{6}{5} \times \frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square}$ (2015a, p.95)		$16.8 \div 12 = \boxed{\frac{\square}{10} \div 12 = \frac{\square}{10} \times \frac{1}{\square}} = \frac{\square}{10} = \square$ (2015a. p.117)
	• 나눗셈을 곱셈으로 바꾸고 제수를 제수의 역수로 고친 뒤 계산		
6-1	$\frac{4}{5} \div \frac{4}{15} = \frac{12}{15} \div \frac{4}{15} = \square \div \square = \square$ (2015b, p.48)		$3.68 \div 0.46 = \boxed{\frac{368}{100} \div \frac{46}{100} = \square \div \square = \square}$ (2015b, p.73)
	• 통분한 뒤 분자끼리 나누어 자연수의 나눗셈처럼 계산		

수 있다. 이에 본 연구에서는 이와 같은 나눗셈의 연결성을 염두에 두고 수업을 계획하고 실행하고자 한다.

III. 연구 방법

1. 연구 방법 개관

본 연구는 실행 연구의 방법을 적용하였다. 이용숙 외(2005)에 의하면 실행 연구란 이론보다는 실천을 통해 학교 현장을 개선하기 위한 목적으로 하는 연구이다. 본 연구에서는 관련 이론을 충분히 탐색한 뒤, 실제 학교 현장에서 접근 가능하게 적용할 수 있는 연결성을 강조한 나눗셈의 지도·학습 방법을 계획하고 실제 수업에 적용해보고자 하였기 때문에, 실행 연구의 방법을 적용하는 것이 타당하다고 판단되었다. 본 연구에서는 나눗셈의 연결성을 강조하기 위해서 현행 교육과정에 따른 교과서를 기본으로 하여 어떻게 수업을 재구성하고 실행할 수 있는지, 이때 학생들의 이해 정도 및 반응이 어떠한지를 자세히 살펴보고자 한다.

2. 연구 대상

본 연구의 대상은 수업을 실행한 1명의 교사와 5개 반의 학생들이다. 수업 실행과 관련하여, 우리나라 초등학교 수학 교과의 지도는 담임교사가 직접 가르치는 것이 일반적이지만, 본 연구에서는 연결성을 강조하여 분수의 나눗셈 단원과 소수의 나눗셈 단원을 어떻게 가르칠 수 있는지 제시하는 것이 목적이기 때문에, 본 연구의 목적을 충분히 인지하고 구체적인 수업의 흐름을 제시할 수 있는 교사가 하는 것이 좋을 것 같다고 판단되었다. 이에 수업 교사는 경기도에 소재한 U 초등학교에 재직 중인 수학 수석교사가 실행하였는데, 수학 교육 및 수학 수업에 대한 전문성을 소지하고 다수의 수학 수업 경험을 통하여 본 연구의 목적에 맞는 수업을 실행할 수 있었다.

학생들은 수석교사가 근무하는 동일한 초등학교 5학년 5개 학급 학생 총 125명(남자 63명, 여자 62명)이다. U 초등학교 학생들의 학력 수준은 경기도 내에서 중위권에 속하며, 한 학급 당 2~3명의 수학 부진학생이 포함되어 있다. 초등학교 5학년을 연구 대상으로 선정한 까닭은 5학년은 분수의 나눗셈과 소수의 나눗셈 단원이 처음 제시되는 학년으로, 4학년 1학기에 배운 자연수의 나눗셈과 연결하여 지도하기에 적합하다고 판단되었기 때문이다.

3. 자료 수집

가. 단원의 재구성 방향

5학년에 도입되는 분수의 나눗셈과 소수의 나눗셈 단원을 연결성 측면에서 분석한 결과, 몇

재구성 방향	1. 나눗셈 의미 연결	2. 문제 해결 기회 확대	3. 일상생활과 연결
단원 구성	• 차시 추가(1차시): 분수/소수 개념 및 나눗셈의 특징 알기 • 다양한 나눗셈 상황제시 • 차시 구성 변경	• 학생 간 의사소통 기회 확대 • 문제 만들기 활동 추가	• 창의•융합형 프로젝트 학습

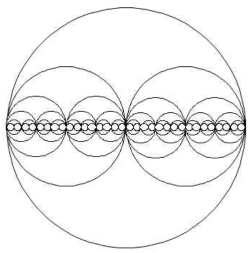
[그림 III-1] 단원의 재구성 방향 및 구성

가지 제한점을 발견할 수 있었다. 여기에는 첫째, 나눗셈 문제 맥락이 포함제와 등분제에 한정해있어 다양하지 않다는 점, 둘째, 교과서에 제시된 문제 해결 과정이 지나치게 단계별로 상세하여 학생 스스로 나눗셈식을 만들어 볼 수 있는 기회가 충분하지 않다는 점, 마지막으로, 분수의 나눗셈과 소수의 나눗셈을 적용하여 일상생활의 문제를 해결해보고 이를 통해 나눗셈의 유용성을 인식하고 수학을 외적으로 연결해볼 수 있는 기회가 드물다는 점이다.

이에, 본 연구에서는 [그림 III-1]과 같은 방향으로 교과서를 재구성하여 지도하고자 계획하였다. 단, 본 연구에서는 수학 교과서에 제시된 나눗셈 내용의 내적 연결성을 강조하되, 기존의 교과서를 바탕으로 실제 학급에서 접근할 만하고 실현가능한 나눗셈 수업을 계획하고 실행하는데 중점을 둠으로써, 본 연구에서 제안하는 방향들이 일회성에 그치는 것이 아니라 지속적으로 실현되고 수정되기를 기대하였다.

단원의 재구성 방향과 그에 따른 단원 구성 계획을 자세히 살펴보면 [그림 III-1]과 같이 크게 3가지의 재구성 방향을 선정하였다. 첫째, 자연수 나눗셈의 의미를 분수 및 소수 나눗셈에 적용함으로써 수의 범위가 확장되어도 나눗셈의 의미를 이해할 수 있게 한다. 이를 위하여 단원의 도입 1차시에 앞으로 학습할 내용의 바탕이 되는 분수 및 소수의 개념과 나눗셈의 특징을 알아보는 시간을 추가 하였다. 뿐만 아니라 측정 나눗셈과 분할 나눗셈 이외의 상황을 추가로 제시하거나, <표 III-1>과 같이 문제 상황이 없거나 지나치게 단순한 경우 기존 문제를 수정하거나 추가하였다. 또한 현행 교과서의 분수의 나눗셈과 소수의 나눗셈 단원의 차시가 피제수와 제수의 형태에 따라 구분되어 있는 것을, 나눗셈의 원리가 유사한 차시를 서로 관련시켜 한 차시로 묶고 계산 원리를 여러 차시에서 반복적으로 다룰 수 있도록 차시를 변형하여 구성하였다.

둘째, 학생 스스로 문제를 해결해 볼 수 있는 기회를 확대한다. 이를 위하여 1:1 또는 2:2로 문제를 만들고 친구들끼리 바꾸어 해결해보며 자신의 문제 해결 과정을 설명하는 활동을 포함시켰다. 마지막으로, 분수의 나눗셈과 소수의 나눗셈을 일상생활에 적용해볼 수 있는 기회를 마련한다. 이를 위하여 본 연구에서는 2015 개정 수학과 교육과정에서도 강조하는 6가지 수학 교과 역량 가운데 하나인 창의·융합과 관련하여(교육부, 2015c), 창의·융합형 프로젝트 학습을 2차시 활동으로 계획하여 분수 나눗셈 단원의 도입 삽화에 제시되었던 프랙탈 도형의 의미를 탐색하고 [그림 III-2]와 같은 프랙탈 도형의 원을 실제 그려볼 수 있는 기회를 갖도록 하였다.



[모둠이 함께 해결할 문제]

* 가장 큰 원의 지름이 20cm일 때, 우리 모둠에서 그린 가장 작은 원의 지름은 몇 cm입니까?

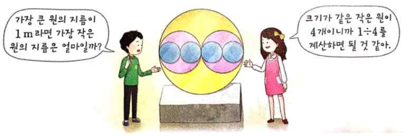
[그림 III-2] 창의·융합형 프로젝트 학습의 프랙탈 과제

나. 차시별 전개계획

<표 III-2>는 이와 같은 재구성 방향 및 활동을 바탕으로 계획된 구체적인 차시별 학습 주제를 기존 차시와 비교하여 나타낸 표이다. 밑줄이나 음영 표시된 셀은 기존 차시에는 없지만 본 연구의 목적을 바탕으로 추가한 활동을 의미한다. 구체적으로 살펴보면, 1차시에 분수 및 소수의 개념이 무엇인지 알아보도록 하였고, 몇 개의

차시를 학습한 뒤 짝 및 모둠 활동으로 문제를 만들고 해결하는 차시를 추가하였다. 한편, 계산 원리가 유사한 차시들은 내용을 묶어 학습하도록 계획하였는데, 예를 들면 기존의 3단원 5차시에 제시되었던 (가분수)÷(자연수) 학습은 (대분수)÷(자연수)의 계산 방법을 알아보는 차시에서 중복되기 때문에 삭제하였다.

<표 III-1> 분수의 나눗셈 단원의 재구성된 문제 상황

<table>
<tr><th colspan="2" rowspan="2">차시</th><th colspan="2">문제 상황</th></tr>
<tr><th>기존 교과서 문제 상황</th><th>수정 및 추가된 문제 상황</th></tr>
<tr><td>2</td><td rowspan="3">(자연수)÷(자연수)</td><td>
</td><td rowspan="2">색종이 1장을 4명이 나눠가지면 한 사람이 얼마나 가질 수 있습니까?

색 띠 3장을 4명이 똑같이 나눠가지면 한 사람이 얼마나 가질 수 있습니까?

파이 9개를 4명이 똑같이 나눠가지면 한 사람이 얼마나 가질 수 있습니까?</td></tr>
<tr><td>3</td><td>
</td></tr>
<tr><td>4</td><td>$\frac{1}{4}$÷2를 계산하는 방법을 알아봅시다.</td><td>(문제 해결 및 문제 만들기)
피자 3개를 5명이 똑같이 나누어 먹으려고 합니다. 1명이 피자를 얼마나 먹을 수 있습니까?

수수깡 8개를 3명이 똑같이 나누어가지려고 합니다. 1명이 수수깡을 얼마나 가질 수 있습니까?</td></tr>
<tr><td>5</td><td rowspan="3">(분수)÷(자연수)</td><td>$\frac{9}{4}$÷2를 계산하는 방법을 알아봅시다.</td><td rowspan="2">색종이 $\frac{1}{3}$장을 2명이 똑같이 나눠가지면 한 사람이 얼마나 가질 수 있습니까?

색종이 $\frac{3}{4}$장을 4명이 똑같이 나눠가지면 한 사람이 얼마나 가질 수 있습니까?

색종이 $3\frac{3}{4}$장을 5명이 똑같이 나눠가지면 한 사람이 얼마나 가질 수 있습니까?</td></tr>
<tr><td>6</td><td>$1\frac{1}{2}$÷4를 계산하는 방법을 알아봅시다.</td></tr>
<tr><td>7</td><td>잘 공부했는지 알아봅시다.</td><td>(문제 해결 및 문제 만들기)
도화지 $\frac{4}{5}$장을 3명이 똑같이 나누어 가지면 한 사람이 얼마나 가질 수 있습니까?

리본 $5\frac{2}{5}$ m를 9명이 똑같이 나누어 가지면 한 사람은 몇 m 가질 수 있습니까?</td></tr>
</table>

<표 III-2> 기존 차시와 재구성 차시 비교

기존 차시				→	재구성 차시			
단원	차시	주제 및 활동			차시	주제 및 활동		단원
3. 분수의 나눗셈	1	단원 도입: 분수의 나눗셈 필요성 인식			1	되돌아보기: 분수와 소수의 개념, 나눗셈의 성질, 학습동기 부여		분수의 나눗셈 + 소수의 나눗셈
	2	(자연수)÷(자연수)를 곱셈으로 나타내기			2	등분제 맥락의 자연수의 나눗셈을 분수의 곱셈으로 나타내고 해결하기(모둠)		
	3	나눗셈의 몫을 분수로 나타내기			3	나눗셈의 몫을 분수로 나타내기(모둠)		
	4	(진분수)÷(자연수)	분수의 곱셈으로 나타내기, 계산 방법 알기		4	1:1로 해결방법을 짝에게 설명하기, 2:2로 문제 만들고 협력하여 해결하기		
	5	(가분수)÷(자연수)			5	포함제, 등분제 맥락의 (진분수)÷(자연수) 문제 해결하기(모둠)		
	6	(대분수)÷(자연수)			6	포함제, 등분제 맥락의 (대분수)÷(자연수) 문제 해결하기(모둠)		
	7	공부를 잘했는지 알아봅시다			7	1:1로 해결방법을 짝에게 설명하기, 2:2로 문제 만들고 협력하여 해결하기		
	8	문제 해결			8	교과서에 제시된 문제 및 활동 해결하기 (단원평가, 문제해결)		
	9	이야기 마당			9	교과서에 제시된 문제 및 활동 해결하기 (이야기, 체험, 놀이마당)		
4. 소수의 나눗셈	1	단원 도입: 소수의 나눗셈의 필요성 인식			10	소수의 개념과 나눗셈의 성질 다시 살펴보기, 나눗셈의 성질을 이용하여 소수의 계산 원리 생각해보기		
	2	(소수)÷(자연수)	몫이 소수 한 자리의 대소수		11	(소수)÷(자연수)	몫이 소수 한 자리의 대소수	
	3		몫이 소수 한 자리의 대소수		12		몫이 소수 두 자리의 대소수, 몫이 1보다 작은 소수	
	4		몫이 소수 두 자리의 대소수		13		소수점 아래 0을 내려 계산	
	5		몫이 1보다 작은 소수		14		몫의 소수 첫째 자리에 0이 있는 계산	
	6		소수점 아래 0을 내려 계산		15		1:1, 2:2로 문제 만들고 협력하여 해결하기	
	7		몫의 소수 첫째 자리에 0이 있는 계산		16	(자연수)÷(자연수)	나누어떨어지는 경우, 몫을 반올림하여 나타내기	
	8	(자연수)÷(자연수)	몫을 소수로 나타내기		17		1:1, 2:2로 문제 만들고 협력하여 해결하기	
	9		몫을 반올림하기		18	교과서에 제시된 문제 및 활동 해결하기 (단원평가, 문제해결)		
	10	공부를 잘했는지 알아봅시다			19	교과서에 제시된 문제 및 활동 해결하기 (이야기, 체험, 놀이마당)		
	11	문제 해결			20~21	생활에 쓰이는 분수와 소수의 나눗셈 상황을 제시하고 협력하여 문제를 해결하기 (삶과 연결, 창의·융합 학습)		
	12	체험 마당			22	자기평가와 반성, 성취수준 평가(지필) 및 피드백		

4. 자료 분석

수집한 자료는 나눗셈 의미의 연결성과 나눗셈 절차의 연결성이라는 두 가지 측면에서 분석하였다. 나눗셈 의미의 연결성과 관련하여 우선 나눗셈 문제 상황을 분수의 나눗셈식이나 소수의 나눗셈식으로 어떻게 나타내는지 살펴보았는데, 이 때 피제수와 제수를 잘 구분하여 나눗셈식으로 나타낼 수 있는지에 초점을 두었다. 또한 분수의 나눗셈식이나 소수의 나눗셈식을 제시했을 때 어떠한 나눗셈 의미가 내재된 문장제를 만드는지, 제수와 피제수를 잘 구분하여 적합한 상황을 제시하는지 분석하였다.

나눗셈 절차의 연결성과 관련해서는 우선 나눗셈식의 해결 과정에서 자연수의 나눗셈, 분수의 나눗셈, 소수의 나눗셈 해결 방법을 어떻게 연결하는지 살펴보았다. 또한 본 연구에서는 나눗셈과 실생활을 연결시키기 위하여 마지막 2개 차시에 걸쳐 창의·융합 문제를 해결하였는데, 이 때 분수의 나눗셈 또는 소수의 나눗셈 절차를 어떻게 연결시키는지 살펴보았다. <표 III-3>은 지금까지 설명한 본 연구에서 살펴본 분석의 측면 및 초점을 간략히 정리한 것이다.

<표 III-3> 분석의 측면 및 초점

분석의 측면	분석의 초점
나눗셈 의미의 연결성	• 나눗셈의 의미가 내재된 상황을 분수의 나눗셈식 또는 소수의 나눗셈식으로 어떻게 표현하는가? • 분수의 나눗셈식과 소수의 나눗셈식에 나눗셈의 의미를 어떻게 연결시켜 문제를 만드는가?
나눗셈 절차의 연결성	• 나눗셈식을 해결할 때 자연수의 나눗셈, 분수의 나눗셈, 소수의 나눗셈을 어떻게 연결시키는가? • 창의·융합 문제를 해결하는 과정에서 분수의 나눗셈 및 소수의 나눗셈 절차를 어떻게 연결시키는가?

IV. 결과

1. 나눗셈 의미의 연결성

나눗셈 상황에는 나눗셈의 의미가 내재되어 있다. 나눗셈 의미의 연결성은 제시된 문제 상황을 식으로 나타낼 수 있는지, 반대로 나눗셈식을 보고 알맞은 나눗셈의 문제 상황을 만들 수 있는지로 구분하여 살펴보았다. 나눗셈 의미의 연결성과 관련하여 수업의 특징 및 학생들의 이해 실태를 살펴보면 다음과 같다.

첫째, 학생들은 나눗셈의 문제 상황을 나눗셈식으로 표현할 수 있었다. 5학년 2학기에 처음 도입되는 분수의 나눗셈과 소수의 나눗셈 단원에서는 포함되는 수가 분수 또는 소수라는 차이점이 있을 뿐, 이전에 학습했던 자연수의 나눗셈 상황과 대부분 유사하다. 단, 제수나 피제수뿐만 아니라 몫의 범위까지 유리수로 확대됨에 따라, 대부분 피제수의 크기가 제수에 비해 커서 문제 상황에 제시된 수의 크기만을 가지고도 쉽게 나눗셈식으로 나타낼 수 있었던 자연수의 나눗셈과 다르게, 나눗셈 상황을 이해하고 피제수와 제수를 구분하여 식으로 표현해야 한다. 수업 및 학생 활동지의 분석 결과, 학생들은 문제 상황에 적절한 나눗셈식을 표현하는데 큰 어려움을 느끼지 않은 것으로 드러났으며 이는 나눗셈의 의미를 분수 및 소수 범위에도 잘 적용할 수 있다는 것을 의미한다. <에피소드 1>은 분수의 나눗셈 단원의 2차시에서 문제 상황을 나눗셈식으로 표현하면서 지금까지 학습한 나눗셈과의 차이점을 언급하는 장면이다.

<에피소드 1 : 자연수 나눗셈과의 차이점 알아보기>

교사 : 15÷6을 하면 지금까지는 몫이 2이고, 나머지가 3이라고 썼는데, 이제 이 나머지 3도 6등분할 거예요. 그런데 만약에 이게 구슬이면 쪼갤 수 있을까요?

학생 : 아니요.

교사 : 맞아요. 못 쪼개요. 그런데 빵이면 여기 나머지 3개를 다시 6개로 쪼개면?

학생 : 1/2이 되요.

교사 : 맞아요, 1/2이 되죠. 결국은 한 사람이 2와 1/2개씩 가지게 될 거예요. 이제는 이것처럼 나머지 생각하지 않고 정확하게 나누는 방법을 알아보겠습니다. 어떻게 하면 될까요?

학생 : 분수로 나타내면 되요.

교사 : 맞아요. 그럼 색종이 1장을 4명이 나누어 가진다면 식으로 어떻게 표현할 수 있지요?

학생들 : 1 나누기 4

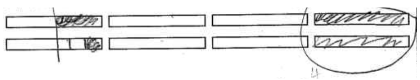
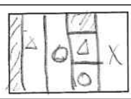
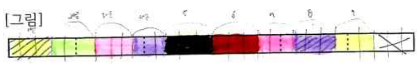
교사 : (칠판에 나눗셈식 1÷4를 쓰며) 어? 좀 이상하지 않아요? 큰 수가 앞에 가야하니까 4÷1 아닌가요?

학생 : 아니에요. 1장을 4명이 나누어 가지니까 그게 맞아요.

<에피소드 1>에서 알 수 있듯이, 학생들은 나누어떨어지지 않는 자연수의 나눗셈의 몫을 분수로 나타낼 수 있다는 것을 이해하고 나누기에 적합한 양의 유형이 무엇일지도 구분할 수 있었다. 뿐만 아니라 비록 학생들은 지금까지 자연수의 나눗셈을 다루면서 대부분 피제수가 제수보다 더 큰 나눗셈식을 경험했음에도 불구하고, 문제 상황과 관련지어 1÷4와 같이 제수가 더 큰 나눗셈식을 이해할 수 있었다. 이는 자연수의 나눗셈으로부터 분수의 나눗셈을 자연스럽게 연결지어 학습할 수 있는 가능성이 있다는 것을 시사한다. 또한 이와 같은 연구 결과를 통해, 연속량이 포함된 나누어떨어지지 않는 문제 상황에서 나머지 없이 똑같이 나누어야할 때 그 몫은 분수 또는 소수가 되므로, 이와 같은 상황은 자연수의 나눗셈과 연결하면서 분수의 나눗셈 및 소수의 나눗셈을 도입하기에 적절하다고 사료된다.

한편, 학생들은 나눗셈 상황을 그림으로 적절하게 표현했다. [그림 IV-1]은 분수의 나눗셈 단원에서 학생들이 제시한 그림 표현으로서, 포함제 상황을 색, 빗금, 또는 △, ○와 같은 기호로 구분하여 나눗셈 의미가 드러날 수 있게 하였다. 하지만 놀랍게도, 많은 학생들이 나눗셈식을 그림으로 나타내는데 큰 어려움을 보이지 않은 반면, 이와 같은 그림 표현이 몫을 구하는데 도움이 되는 경우도 있고 단지 그림 자체로 끝나는 경우도 있었다. 예를 들어, [그림 IV-1]에서 $8 \div 3$이나 $5\frac{2}{5} \div 9$와 같은 경우는 그림 표현만을 이용하여 나눗셈 식의 몫을 구한 반면, $\frac{4}{5} \div 3$과 같은 경우는 그림으로 나타내었지만 정작 문제 해결은 제수를 그 역수로 바꾼 뒤 곱셈으로 바꾸어 몫을 구하였다.

이와 같이 나눗셈 상황을 식이나 그림과 연결지어 나타낼 수 있는 것은 문제 해결에 매우 중요하다. 특히 나눗셈 상황을 바로 식으로 나타내는 대신, 중간에 그림으로 표현하는 것은 '÷(제수)'가 '$\times \frac{1}{(제수)}$'가 되는 원리를 이해하는데 도움이 되기 때문에 나눗셈의 의미를 이해하는 것 뿐만 아니라 계산 절차를 이해하기 위한 촉진제가 될 수 있다.

나눗셈 식	그림 표현
$8 \div 3$	
$\frac{4}{5} \div 3$	
$5\frac{2}{5} \div 9$	

[그림 IV-1] 등분제 나눗셈 상황을 그림 표현과 연결

둘째, 나눗셈 상황을 나눗셈식으로 표현하는 과정에서 대부분의 학생들은 나눗셈의 제수와

피제수의 의미를 이해하고 적절한 식으로 나타낼 수 있었다. 특히, 본 연구에서는 소수의 나눗셈 단원의 본 차시를 본격적으로 학습하기 전에 교과서에 제시된 모든 문제 상황을 교사가 읽어준 뒤 나눗셈식으로 나타내보게 하였는데, <에피소드 2>와 같이 학생들은 수의 크기 비교가 아니라 나눗셈의 상황을 기준으로 피제수와 제수를 구분하여 나눗셈식을 나타낼 수 있었다. 즉, 나눗셈식에서 궁금한 양이 나누어지는 피제수, 기준량이 나누는 제수가 되어야 한다는 것을 이해하고 있었다.

<에피소드 2 : 문제 상황을 듣고 나눗셈식으로 나타내기>

교사 : 선생님이 교과서에 있는 문제를 다 읽어 볼게요. 여러분은 뭐 나누기 뭐인지 얘기해보세요. 여학생 12명이 캔 고구마는 모두 16.8kg이었습니다. 고구마를 똑같이 나눌 때 한 사람은 고구마 몇 kg을 가지나요?

학생들 : 16.8 나누기 12.

교사 : 우유 3L를 4명이 똑같이 나눌 때 한 사람이 가질 수 있는 우유는 몇 L 입니까?

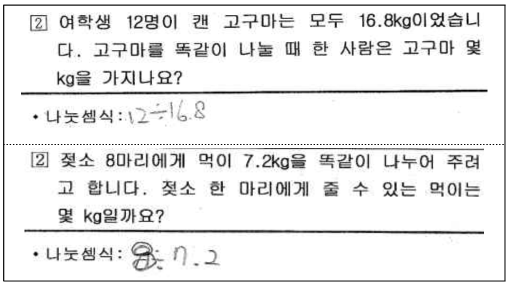
학생들 : 3 나누기 4.

교사 : 큰 수가 앞에 와서 4 나누기 3이지 않나요?

학생 : 우유를 나눠야해요. 한 사람이 가질 수 있는 우유의 양이니까 우유를 사람으로 나눠요.

교사 : 맞아요. 우리가 궁금한 건 우유의 양이고, 기준량은 4니까 3 나누기 4를 해야 해요.

한편, [그림 IV-2]와 같이 일부 학생들은 나눗셈 상황을 고려하지 않고 문제의 앞에 제시되는 수를 피제수로, 그 다음에 나오는 수를 제수로 하여 나눗셈식을 세우는 오류를 드러냈다. 이는 교과서에 제시되는 나눗셈 상황과 관련지어 생각해볼 수 있는데 즉, 나눗셈 상황을 진술할 때 대부분 피제수가 먼저 나오고 제수가 그 다음에 나오는 경우가 많기 때문에, 학생들은 종종 문제 상황을 이해하지 못했더라도 제시되는 수의 순서를 참고하여 나눗셈식을 세우는 경우가 있다. 하지만, [그림 IV-2]에 제시된 나눗셈 상황을 살펴보면 제수가 먼저 나오기 때문에 이와 같은 방법이 적용될 수 없으며, 그럼에도 불구하고 이와 같은 나눗셈식을 세웠다는 것은 문제 상황을 학생들이 충분히 이해하지 못했다는 것을 드러낸다.


2 여학생 12명이 캔 고구마는 모두 16.8kg이었습니다. 고구마를 똑같이 나눌 때 한 사람은 고구마 몇 kg을 가지나요?

• 나눗셈식 : 12÷16.8

2 젖소 8마리에게 먹이 7.2kg을 똑같이 나누어 주려고 합니다. 젖소 한 마리에게 줄 수 있는 먹이는 몇 kg일까요?

• 나눗셈식 : 8÷7.2

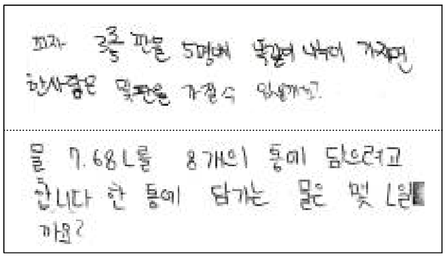
[그림 IV-2] 잘못된 나눗셈식을 제시한 예

분수의 나눗셈과 소수의 나눗셈에 관한 문제 상황은 자연수의 나눗셈 상황과 동일한 분할 나눗셈과 측정 나눗셈 상황이 대부분이므로, 학생들이 상황을 이해한 뒤 나눗셈식을 세우는 것을 크게 어려워하지 않을 것이라 여겨진다. 따라서 문제를 서술할 때 일관된 유형이 아니라 다양하게 변화를 주어 제시함으로써, 학생들이 기계적으로 식을 세우는 것이 아니라 이해를 바탕으로 식을 세울 수 있도록 지도한다면 이와 같은 오류는 어렵지 않게 수정할 수 있을 것이라 사료된다.

마지막으로, 학생들은 분수의 나눗셈이나 소수의 나눗셈에 관한 문제를 만드는데 큰 어려움을 겪지 않았다. 본 연구에서는 학생들로 하여금 나눗셈의 의미와 나눗셈식의 해결 방법에 대한 이해를 신장시키고자, 몫이 분수인 (자연수)÷(자연수), (분수)÷(자연수), (소수)÷(자연수), 몫이 소수

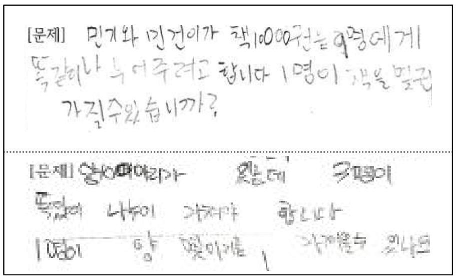
인 (자연수)÷(자연수)에 해당하는 내용을 학습한 뒤 매번 학습한 내용에 관한 문제를 해결하고 이를 짝이나 모둠원들에게 설명하며, 문제를 만들고 이를 교환하여 해결해보는 활동을 하는 차시를 추가하였다.

연구 결과, 학생들은 분수나 소수가 포함된 나눗셈 문제를 만드는데 큰 어려움을 겪지 않았다는 것을 알 수 있다. 5학년 시기는 분수의 나눗셈과 소수의 나눗셈이 처음 도입되는 시기인 만큼 제수가 자연수인 나눗셈만을 다루고 있는데, 학생들의 학습지를 살펴보면 [그림 IV-3]의 예와 같이 대부분 분할 나눗셈으로 피제수에 해당하는 양을 제수만큼으로 나누는 상황을 만들어 제시하고 있다.



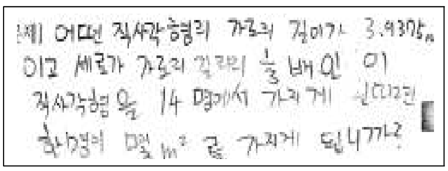
[그림 IV-3] 학생들이 만든 문제의 예

학생들이 제시한 분할 나눗셈 상황을 좀 더 자세히 살펴보면, 학생들 생활에 친숙한 물, 우유, 주스, 피자, 케이크, 리본, 책상 등과 같은 소재를 몇 등분하여 나누거나 몇 명이 나누어 먹는 상황으로 문제를 만들었다. 하지만, 예를 들어, 밀가루 $\frac{8}{9}$g을 5명이 나누어 갖거나, 여학생 8명이 우유 7.68L를 먹거나, 5명이 75.3kg의 파이를 나누어 먹는 상황과 같이, 분할 나눗셈에 해당하고 몫 자체를 구할 수는 있다하더라도 학생들의 양감이 부족함을 드러내는 문제들을 빈번하게 접할 수 있었다. 뿐만 아니라 [그림 IV-4]와 같이 책이나 양, 연필과 같은 이산량을 등분하는 적절하지 않은 상황을 제시하기도 하였다.



[그림 IV-4] 이산량의 등분제 상황의 예

대부분 학생들이 제시한 상황은 분할 나눗셈 상황에 해당하지만, 몇몇 학생들은 또 다른 상황을 제시하고자 시도했다. 예를 들어, [그림 IV-5]와 같이 어떤 직사각형의 가로의 길이가 있고 세로는 가로 길이의 $\frac{1}{3}$일 때 이 직사각형을 14명이 나누어 가지는 상황은, 카테시안 곱의 역으로서의 나눗셈의 의미와 직접적으로 연관되지는 않지만 직사각형의 가로, 세로, 넓이를 소재로 하였다는 점에서, 학생들로 하여금 카테시안 곱의 역으로서의 나눗셈의 의미에 대해 논할 수 있는 기회를 가질 수 있을 것이라 여겨진다.



[그림 IV-5] 다양한 나눗셈 상황의 예

2. 나눗셈 절차의 연결성

나눗셈의 계산 원리 및 절차는 자연수, 분수, 소수로 수의 범위가 변함에 따라 조금씩 달라지는데, 나눗셈 문제를 해결할 때 각각의 계산 원리를 연결할 수 있다. 계산 절차의 연결에 관한 수업의 특징 및 학생들의 이해 실태를 살펴 본

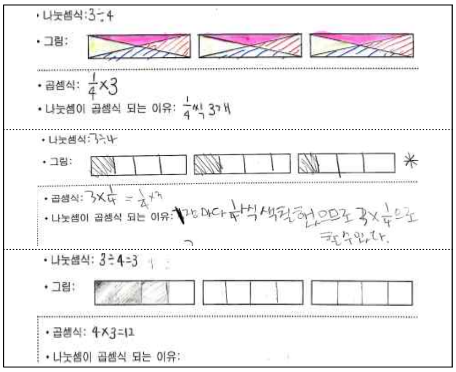
결과는 다음과 같다.

첫째, 학생들은 자연수 나눗셈의 원리를 바탕으로 분수의 나눗셈과 소수의 나눗셈 계산 원리를 연결하여 나눗셈식을 계산할 수 있었다. 우선 분수 나눗셈의 경우, (피제수)÷(자연수)를 (피제수)×$\frac{1}{(자연수)}$로 바꾸어 계산할 수 있는 이유를 설명할 수 있었는데, 이 때 이 전에 학습했던 자연수 나눗셈의 의미가 바탕이 되었다. 즉, 교사는 자연수 나눗셈에서 학습했던 분할 나눗셈의 의미와 관련지어 피제수를 어떤 자연수로 나누는 것은 한 사람 또는 한 개의 몫을 알기 위해서이며, 따라서 한 사람의 몫은 피제수에 $\frac{1}{(자연수)}$을 곱한 값이 된다는 것을 지속적으로 강조했다. 또한 학생들로 하여금 그림으로 표현하고 반복적으로 설명하도록 함으로써 계산 원리를 이해하여 수행할 수 있도록 했다. <에피소드 3>은 나눗셈의 제수가 자연수인 경우 나눗셈이 곱셈으로 바뀌고 자연수가 $\frac{1}{(자연수)}$이 되는 이유를 학생들과 이야기해보는 장면이다.

<에피소드 3 : 분수의 나눗셈을 분수의 곱셈으로 바꾸어 계산할 수 있는 이유 알아보기>

교사 : 이렇게 4로 나누는 이유는 무엇이지요?
학생 : 한 사람의 몫을 알기 위해서요.
교사 : 좋아요. 그러니까 그림을 그릴 때도 한 사람이 가질 만큼만 색칠해보세요. 1장을 4등분하니까 한 사람이 얼만큼 가지죠?
학생들: $\frac{1}{4}$장이요.
교사 : (칠판에 $1\times\frac{1}{4}$을 적으며) 맞아요. 1장의 $\frac{1}{4}$만큼 가져가는 거예요. 이제 3장을 4등분하면 어떨까요?
학생 : $\frac{1}{4}$ 조각을 3개씩 가져가요. $\frac{1}{4}$ 곱하기 3이 되요. 한 사람이 $\frac{3}{4}$장씩 가지는 거예요.
교사 : 좋아요.
(칠판에 $3\div4=3\times\frac{1}{4}=\frac{1}{4}\times3=\frac{3}{4}$을 적으며) 3장을 4명이 나눠가지면, 한 사람은 3장의 $\frac{1}{4}$만큼 가지게 되죠. 그럼 한 사람은 $\frac{1}{4}$을 3개 가지니까 $\frac{3}{4}$을 가지게 되는 거죠.

이처럼 학생들은 $1\div4$와 $3\div4$를 그림으로 표현하고 나눗셈의 의미를 바탕으로 계산 원리를 이해할 수 있었다. 분수의 나눗셈과 소수의 나눗셈에서 제수를 그 역으로 바꾸고 곱하는 방법은 그 뒤 나눗셈 원리를 탐색하는 과정에서도 지속적으로 제시되기 때문에, 분수의 나눗셈 학습이 시작될 때부터 이러한 나눗셈 원리를 이해할 필요가 있다. 또한 <에피소드 3>에서 교사와 학생이 마지막에 나눈 대화를 살펴보면, 나눗셈 원리를 탐색하는 과정에서 곱셈의 교환법칙이 자연스럽게 제시되고 있다는 것을 알 수 있다. [그림 IV-6]은 학생들이 나눗셈식 3÷4를 나눗셈식, 그림, 곱셈식으로 나타낸 반응의 예로 학생들은 그림으로 표현하는 과정에서 곱셈의 교환법칙을 적용할 수도 있었다. 한편, [그림 IV-6]의 마지막 반응과 같이 분할된 작은 사각형의 개수만을 고려하여 4×3=12의 곱셈식을 나타낸 학생도 발견할 수 있었다. 대부분의 학생들이 나눗셈의 의미를 바탕으로 제시된 나눗셈식을 그림이나 곱셈식으로 나타낼 수 있지만, 이와 같은 일부 학생들의 반응은 나눗셈을 다룰 때 분수 개념에서 중요한 전체와 부분이 무엇인지 다시 한 번 강조할 필요가 있다는 것을 시사한다.



[그림 IV-6] 3÷4를 그림과 곱셈식으로 표현한 예

소수 나눗셈의 경우, 주로 자연수 나눗셈과 분수 나눗셈과의 연결성을 인식할 수 있도록 분수의 나눗셈으로 고쳐서 계산하기, 자연수 나눗셈과 몫을 비교하기, 세로로 계산하기의 3가지 방법을 지속적으로 다루었다. 소수의 나눗셈을 다루기 바로 전에 분수의 나눗셈을 학습하였기 때문에 다수의 학생들은 소수인 피제수를 십진 분수로 바꾸어 분수의 나눗셈으로 나타낸 뒤, 다시 자연수인 제수의 역을 취하여 결국 소수의 나눗셈을 분수의 곱셈처럼 계산하였다. 또한 소수도 자연수와 같은 십진 위치 기수 체계를 따르기 때문에 자연수의 나눗셈의 몫과 비교하여 계산하는 방법 또한 크게 어려워하지 않았다.

나아가, 학생들은 그들 스스로 소수의 나눗셈을 계산하기 위해 학습한 여러 가지 방법을 고찰하면서 각 방법의 장단점이나 선호하는 방법이 무엇인지에 대해 언급하기도 하였다. 즉, 학생들 가운데 분수의 나눗셈이나 분수의 곱셈으로 바꾸어 계산하는 방법에 대해서는 소수를 분수로 바꾼 뒤 어차피 분자끼리 나누어야 하니까 '번거롭다'고 말하면서, 자연수 나눗셈처럼 계산하되 소수점의 위치에 주의를 기울이기만 하면 되는 세로 계산의 방법을 선호하는 모습을 발견할 수 있었다. 이와 같은 모습은 학생들이 나눗셈의 계산 원리를 인식할 수 있을 뿐만 아니라 여러 가지 원리를 서로 비교할 수 있다는 점에서 긍정적이라 할 수 있다.

둘째, 학생들은 자연수 나눗셈으로부터 분수 나눗셈의 계산 원리를 연결 짓고 이를 일반화하고 형식화할 수 있었다. 교사는 구체적인 상황을 통하여 $(\text{자연수})\div(\text{자연수})=(\text{자연수})\times\frac{1}{(\text{자연수})}$의 계산 원리를 탐구한 뒤, 더 나아가 이와 같은 나눗셈의 원리가 모든 수에 적용되는지에 대해 논의했다. <에피소드 4>는 학생들과 함께 지금까지 다룬 식들의 공통점을 찾아보고 형식화하는 과정이다. 교사는 우선 '$\div 4$'가 공통적으로 '$\times\frac{1}{4}$'로 바뀌었기 때문에 피제수를 A로 바꾸어 나타낸 뒤, 다음으로 제수를 B로 바꾸어 $A\div B=A\times\frac{1}{B}$로 형식화하였다. 학생들은 A와 B에 구체적인 수들을 대입시킴으로서 대수식이 옳다는 것을 정당화하였는데, 이 때 $12\div4=12\times\frac{1}{4}=\frac{12}{4}$와 같이 나머지가 0인 간단한 나눗셈에도 적용해보았다. $12\div4$를 계산하는 것은 곱셈 구구의 범위이며 굳이 계산하지 않아도 몫이 3이 된다는 것을 알 수 있음에도, 이와 같은 모습은 나눗셈의 원리를 지금 학습하고 있는 분수에만 한정하는 것이 아니라 이전에 배운 자연수의 나눗셈과 연결시켜 적용해본다는 점에서 고무적이라 판단된다.

<에피소드 4 : 분수 나눗셈을 분수의 곱셈으로 바꾸어 계산하는 원리를 형식화하기>

교사 : (지금까지 알아본 식들을 칠판에 쓰면서) $1\div4=1\times\frac{1}{4}$, $3\div4=3\times\frac{1}{4}$. $9\div4=9\times\frac{1}{4}$이 되지요. 이걸로 뭘 알 수 있을까?

학생 : 나누기 4에서 나누기가 곱하기로 되면서 4가 $\frac{1}{4}$이 되요.

교사 : 좋아요. (1, 3, 9를 가리키며) 그럼 앞에

있는 수를 A라고 할게요. 그럼 A÷4가 되지요. 이걸 곱셈으로 바꾸면 어떻게 될까요?

학생 : A 곱하기 $\frac{1}{4}$이요.

교사 : 이게 무슨 뜻이죠? A는 A라는 양이 있다고 합시다.

학생 : A라는 양을 4명한테 나누어주면, A라는 양의 $\frac{1}{4}$만큼 가지는 거예요.

교사 : 그럼 9명이면?

학생 : A 곱하기 $\frac{1}{9}$이 되요.

교사 : (4를 가리키며) 그럼 이제 이걸 B라고 하면 어떨까요?

학생 : A 나누기 B는 A 곱하기 $\frac{1}{B}$이 되요.

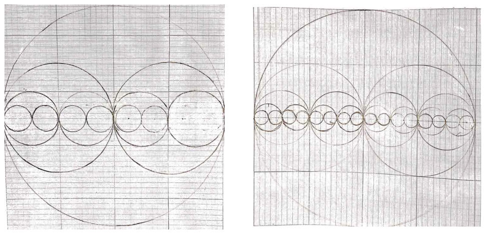
교사 : (칠판에 쓴 $A \div B = A \times \frac{1}{B}$ 식을 가리키며) 그럼 어떤 수가 와도 다 될까요?

학생들 : 네. 다 되요.

교사는 피제수가 분수인 (분수)÷(자연수)를 학습할 때도 이러한 원리를 상기시켜 학생들에게 지난 시간에 학습한 $A \div B = A \times \frac{1}{B} = \frac{A}{B}$에서 A가 분수일 때도 식이 참이 되는지 학생들에게 질문한다. 이에 대해 학생들은 B로 나누어 나오는 값은 한 사람 또는 한 개에 대한 값인데, 이것은 전체를 B로 나눈 것 가운데 1개와 같기 때문에 A가 분수여도 성립될 수 있다고 설명한다. 분수의 나눗셈을 해결할 때는 학생들이 지금까지 자연수의 나눗셈에서 빈번하게 활용했던 세로로 계산하는 방법을 적용할 수 없기 때문에 분수 나눗셈에 대한 이해가 없다면 식 자체를 해결하는 것이 막막하게 느껴질 수도 있다. 하지만 이와 같은 나눗셈 계산 원리는 자연수, 분수 및 소수에 모두 적용되므로 매우 유용하며, 실제 학생들의 문제 해결 모습을 관찰한 결과 매우 빈번하게 사용되었다.

마지막으로, 학생들은 분수 나눗셈과 소수 나눗셈 계산 원리를 이용하여 창의·융합 문제를 해결할 수 있었다. 창의·융합 문제는 분수의 나눗셈 도입에 제시되었던 프랙탈 형태의 원을 모둠원들끼리 그리는 활동으로, 학생들은 제시된 조건인 가장 큰 원의 지름의 길이 20cm를 2로 나누어 반지름을 그리고, 이러한 2로 나누는 과정을 반복하여 더 작은 원을 그려나갔다. 이 때 원의 반지름의 길이가 항상 자연수가 되지 않으므로 분수의 나눗셈이나 소수의 나눗셈을 통하여 반지름의 길이를 구해야 하는데, 학생들은 모눈종이에 나타내어야하기 때문에 수의 크기를 직감하기에 보다 용이한 분수보다는 소수를 선호하는 모습을 보였다. 실제 학생들에게 왜 분수로 나타내지 않고 소수를 사용해서 계산하는지 묻자 소수가 얼마인지 알기 쉽다고 대답하였다.

프랙탈 형태의 원을 완성하는 과정에서 대부분의 학생들은 바로 전에 그린 원의 지름을 소수로 나타내고 2로 나누어 몫을 구하였다. 또한 프랙탈 형태의 원을 완성하기 위해서는 원의 반지름을 구하는 것뿐만 아니라 컴퍼스로 원을 반복적으로 그려나가야 하는데 모둠원들끼리 순서를 정하여 원을 잘 그려나가는 모습을 보였다. 단, 모둠에 따라 프랙탈 형태의 원이 완성된 정도가 다르게 나타났는데, [그림 IV-7]의 왼쪽에 제시된 프랙탈이 대부분의 모둠에서 완성한 모양이고 몇몇 모둠은 오른쪽과 같이 반지름의 길이가 1보다 작은 원까지 나타내었다.



[그림 IV-7] 학생들이 그린 프랙탈 원의 예시

프랙탈 그리기 활동을 마친 뒤, 학생들은 소수를 사용하여 매우 작은 원까지 그릴 수 있었다는 사실을 자랑스러워했으며, 소수를 계속 2로 나누어 가면 매우 작은 원까지 들어가는 프랙탈을 완성할 수 있을 것이라 말했다. 컴퍼스 작도는 3학년에 제시된 이후 학교에서 거의 다루어지지 않기 때문에 학생들 가운데 컴퍼스를 사용하여 프랙탈 형태의 원을 그리는 활동에 어려움을 드러낸 학생들도 있었다. 하지만 수업에서 더욱 중요한 것은 일상생활이나 작품에서 접할 수 있는 프랙탈의 의미를 이해하고 이를 적용하여 원을 그려보고 이 때 분수의 나눗셈이나 소수의 나눗셈을 활용할 수 있다는 점이었기 때문에, 컴퍼스 작도에 어려움을 느끼는 학생들은 모둠원들끼리 서로 돕거나 교사의 도움으로 원을 그려나갈 수 있도록 하였다.

Ⅴ. 논의

본 연구에서는 수학의 내적 연결성을 강조하여 5학년 분수의 나눗셈과 소수의 나눗셈 단원의 수업을 재구성하고 실행한 뒤 수업 과정을 분석하였다. 연구 결과를 통한 결론 및 논의를 제시하면 다음과 같다.

첫째, 본 연구에서 학생들은 분수나 소수가 포함된 나눗셈 상황을 나눗셈식으로 나타낼 수 있었다. 이는 학생들이 수의 범위가 확장되더라도 나눗셈의 의미를 이해하는데 어려움을 겪지 않았다는 것을 의미한다. 단, 우리나라 수학 교과서에 제시되는 나눗셈 상황은 측정 나눗셈과 분할 나눗셈이 대부분이기 때문에, 학생들에게 보다 다양한 나눗셈의 의미가 내재된 상황을 접할 수 있는 기회를 제공하는 것을 고려해 볼 수 있다. 물론, 본 연구에서는 일반 학급의 교사들이 어렵지 않게 시도해볼 수 있도록 기존의 교과서를 충분히 활용하는 것을 교과서의 재구성 방향의 기본으로 하였으나, 우리나라 수학 교과서에 제시되는 분수의 나눗셈과 소수의 나눗셈 상황이 2가지 의미만을 담고 있기 때문에 제한적이라 할 수 있다. 또한 가장 빈번하게 제시되는, 연속량인 피제수를 몇 개로 등분하는 상황 가운데 일부는 불가능하지는 않지만 실제로 일어나기 어려운 경우가 있다. 예를 들어, 12명이 고구마 16.8kg을 등분하는 상황은(교육부, 2015a, p.117) 충분히 일어날 법한 상황이지만, 고구마를 세는 단위는 한 개, 두 개의 ‘개’로 이산량이기 때문에 $16.8 \div 12 = 1.4$, 즉 1.4kg씩 똑같이 나누는 것이 어색할 수 있다.

이와 관련하여 분수의 나눗셈의 다양한 의미를 제시한 Sinicrope 외(2002)의 연구를 고려해볼 수 있다. 이 연구에서는 범자연수 나눗셈에 적합한 문제 상황으로 분할 나눗셈, 측정 나눗셈, 그리고 카테시안 곱의 역으로서의 나눗셈을 제시하고, 분수 나눗셈을 위해 단위비율 결정 맥락과 곱셈의 역 상황을 추가로 제시한다. 여기서 곱셈의 역으로서의 나눗셈은 곱셈과 나눗셈의 관계에 대한 학습이, 카테시안 곱의 역으로서의 나눗셈은 직사각형의 넓이에 대한 학습이, 단위비율 결정 맥락으로서의 나눗셈은 비율 개념에 대한 학습이 이루어진 후에 다루어져야 할 것이다. 이러한 측면에서 우리나라 수학 교과서의 분수의 나눗셈과 소수의 나눗셈에서 제시되는 문제 상황을 고려해본다면, 단원의 도입부에는 주로 분할 나눗셈과 측정 나눗셈의 의미가 내재된 상황을 제시함으로써 이전에 학습했던 자연수의 나눗셈과 연결하고, 이후로 갈수록 곱셈의 역, 카테시안 곱의 역, 그리고 단위 비율 결정 맥락으로서의 나눗셈의 의미와 관련된 상황을 포함시키는 방법을 염두에 둘 수 있을 것이다.

둘째, 분수의 나눗셈과 소수의 나눗셈 단원의 제시 순서에 대한 고찰이 필요할 것이다. 현행

2009 개정 교육과정에 따른 수학 교과서를 살펴보면 분수의 나눗셈이 먼저 제시되고 소수 나눗셈이 뒤이어 제시된다. 덧셈, 뺄셈, 그리고 곱셈과 달리 나눗셈만은 분수의 나눗셈과 소수의 나눗셈이 연달아 제시되는데 이는 분수의 나눗셈 원리를 소수의 나눗셈 원리와 연결하여 학습하는 것이 유용할 것이라는 암묵적인 의도가 내재되어 있을 것이라 유추된다. 실제 소수의 나눗셈 단원에서는 소수를 분수로 바꾸어 계산하는 방법이 매 차시 다루어지고 있다.

이와 달리, 본 연구에서 학생들의 소수 나눗셈 계산 과정을 살펴본 결과 학생들은 세로 계산의 방법을 선호하는 것으로 드러났다. 학생들은 소수를 분수로 고쳐서 계산해도 결국 나눗셈을 해야 하므로, 처음부터 나눗셈을 하는 세로 계산 방법이 오히려 간편하게 느껴진다고 말하였다. 실제 일본의 초등학교 수학 교과서를 살펴보면, 소수의 나눗셈 단원이 분수의 나눗셈 단원보다 먼저 제시되며, 따라서 소수의 나눗셈은 분수의 나눗셈과 관련지어 다루어 지지 않고 있다 (Hitotsumatsu et al., 2011). 오히려, '피제수와 제수를 같은 수로 곱하거나 나누어도 몫은 변하지 않는다'는 나눗셈의 원리를 적용하여(Hitotsumatsu et al., 2011, p. 23), 자연수의 나눗셈과 같은 형태로 하되 소수점 이하를 계산할 수 있도록 제시하고 있다. 과연 분수의 나눗셈과 소수의 나눗셈 단원은 어떤 순서로 제시되는 것이 학생들의 학습에 도움이 되는 것일까? 이와 같이 분수의 나눗셈과 소수의 나눗셈 단원의 제시 순서에 따라 소수의 나눗셈의 계산 원리가 다르게 다루어진다는 점을 염두에 두었을 때, 교과서에 제시되는 단원의 순서를 그대로 받아들일 것이 아니라 각각의 장단점을 충분히 고려한 뒤에 학생들에게 제시할 필요가 있을 것이다.

마지막으로, 분수의 나눗셈과 소수의 나눗셈을 일상생활과 연결시킬 수 있는 기회를 제공할 필요가 있다. 본 연구에서는 수학의 내적 연결성을 우선적으로 강조하였지만, 창의・융합 프로젝트 학습을 통하여 마지막 2개의 차시에 분수의 나눗셈과 소수의 나눗셈을 적용하여 일상생활에서 접할 수 있는 프랙탈 형태의 원을 만들어보는 시간을 가졌다. 미술 작품이나 일상생활의 여러 현상에 내재되어 있는 프랙탈의 수학적 원리를 이해하고 분수의 나눗셈이나 소수의 나눗셈을 적용하여 프랙탈을 만들어 보는 활동은 학생들이 수학을 일상생활과 연결하고 그 유용성을 느낄 수 있는 기회가 될 수 있다. 영국의 초등학교 수학 교과서인 'Math Made Easy'를 살펴보면 모든 단원의 마지막에 'real-life problem'을 제시하는데(Kennedy, 2003), 이 또한 수학의 외적 연결성을 염두에 둔 교과서 구성이라 판단된다. 물론 현행 교과서에서도 단원 도입이나 매 차시 도입 상황이 실생활과 연결되지만, 학생들이 단원에서 학습한 내용, 또는 다른 교과나 단원에서 학습한 내용까지 연결시켜 문제를 해결하는 기회를 갖는 것은 2015 개정 교육과정에서 강조하는 수학 교과의 핵심 역량 가운데 하나인 창의・융합 능력을 신장시키는 데 도움이 될 것이라 사료된다.

본 연구에서는 수학의 내적 연결성의 중요성을 바탕으로 5학년 2학기에 제시되는 분수의 나눗셈과 소수의 나눗셈 단원을 재구성하여 수업을 계획하고 실행한 결과를 분석하였다. 본 연구를 통하여 드러난 학생들의 가능성과 한계를 통하여 자연수, 분수, 소수를 모두 포함하는 나눗셈 단원을 서로 연결하여 지도할 수 있는 방향을 모색하는데 도움이 되기를 기대한다.

참고문헌

교육부(2015a). **수학 5-2**. 서울: 천재교육.
교육부(2015b). **수학 6-1**. 서울: 천재교육.

교육부(2015c). **수학과 교육과정**. 교육부 고시 제 2015-74호 [별책 8]
교육부(2016a). **수학 3-1**. 서울: 천재교육.
교육부(2016b). **수학 3-2**. 서울: 천재교육.
교육부(2016c). **수학 4-1**. 서울: 천재교육.
교육부(2016d). **수학 3-1 교사용 지도서**. 서울: 천재교육.
김경미, 황우형(2011). 분수의 곱셈과 나눗셈에 대한 학생의 이해와 문장제 해결의 관련성 분석. **수학교육, 50**(3), 337-354.
김응태, 박승안(2012). **정수론 제 8판**. 서울: 경문사.
문범식, 이대현(2014). 초등학생들의 소수 개념과 그 연산에 대한 이해도 분석. **한국초등수학교육학회지, 18**(2), 237-255.
이영주, 이광호, 이효진(2012). 분수의 나눗셈에 대한 학습자의 인지구조. **한국초등수학교육학회지, 16**(2), 295-320.
이용숙 외(2005). **교육현장개선과 함께 하는 실행연구방법**. 서울: 학지사.
이지영(2015). **초등학교 학생들의 단위 추론을 기반으로 한 분수 나눗셈의 학습경로 개발**. 박사학위논문. 한국교원대학교대학원.
Barnett-Clarke, C., Fisher, W., Marks, R., & Ross, S. (2010). Developing essential understanding of rational numbers for teaching mathematics in grades 3-5. In R. I. Charles (Volume Ed.) & R. M. Zbiek (Series Ed.), *Essential understandings series*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
Blanton, M., Levi, L., Crites, T., & Dougherty, B. (2011). Developing essential understanding of algebraic thinking for teaching mathematics in grades 3-5. In B. J. Dougherty (Volume Ed.) & R. M. Zbiek (Series Ed.), *Essential understandings series*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
Carpenter, T. P., Fennema, E., Franke, M. L., Levi, L., & Empson, S. B. (1999). *Children's mathematics: Cognitively guided instruction*. Portsmouth, NH: Heinemann.
Carpenter, T. P., Fennema, E., Franke, M. L., Levi, L., Empson, S. B. (2005). *어떻게 수학을 배우지?* (김수환, 박영희, 백선수, 이경화, 한대희 역). 서울: 경문사.
Siebert, I. (2002). Connecting informal thinking and algorithms: The case of division of fraction. In B. Litwiller & G. Bright (Eds.), *Making sense of fractions, ratios, and proportions* (pp. 247-256). Reston, VA: NCTM.
Kennedy, J. (2003). *Math made easy: 4th grade workbook*. New York, NY: Dorling Kindersley.
Ma, L. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics: teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: Author.
Hitotsumatsu, S., Masaki, K., Akai, T., Okada, Y., Machida, S., Moriya, Y., et al. (2011). *Study with your friends mathematics for elementary school 4-1*. Takeshi, Nara: GAKKOHTOSHO.
Sinicrope, R., Mick, H. W., & Kolb, J. R. (2002). Interpretations of fraction division. In B. Litwiller & G. Bright (Eds.), *Making sense of fractions, ratios, and proportions* (pp.153-161). Reston, VA: NCTM.

An Action Research on Instruction of Division of Fractions and Division of Decimal Numbers : Focused on Mathematical Connections

Kim, Jeong Won (Sintanjin Elementary School)

The meanings of division don't change and rather are connected from whole numbers to rational numbers. In this respect, connecting division of natural numbers, division of fractions, and division of decimal numbers could help for students to study division in meaningful ways. Against this background, the units of division of fractions and division of decimal numbers in fifth grade were redesigned in a way for students to connect meanings of division and procedures of division. The results showed that most students were able to understand the division meanings and build correct expressions. In addition, the students were able to make appropriate division situations when given only division expressions. On the other hand, some students had difficulties in understanding division situations with fractions or decimal numbers and tended to use specific procedures without applying diverse principles. This study is expected to suggest implications for how to connect division throughout mathematics in elementary school.

* Key Words : connections(연결성), division of fractions(분수의 나눗셈), division of decimal numbers (소수의 나눗셈), meanings of division(나눗셈의 의미), procedures of division(나눗셈의 절차)

논문접수 : 2017. 7. 5
논문수정 : 2017. 7. 31
심사완료 : 2017. 8. 1