

# 적층식 석탑의 진동 시스템 인식

## System Identification for Structural Vibration of Layered Stone Pagoda System

김병화<sup>1)\*</sup>

Kim, Byeong Hwa<sup>1)\*</sup>

<sup>1)</sup>경남대학교 토목공학과

<sup>1)</sup>Department of Civil Engineering, Kyungnam University

### / A B S T R A C T /

This study proposes a numerical model to explain the closely placed double modes in the vibration of a layered stone pagoda system. The friction surface between the stones is modelled as the Timoshenko finite element while each stone layer is modelled as a rigid body. It is assumed that the irregular asperity on the friction surface enables the stone to be excited. This results in the closely placed modes that are composed of natural modes and self-excited modes. To examine the validity of the proposed model, a set of modal testing and analysis for a layered stone pagoda mock-up model has been conducted and a set of closely placed double modes are extracted. Applying the extended sensitivity-based system identification technique, the various system parameters are identified so that the modal parameters of the proposed numerical model are the same with those of the experimental mock-up. For a horizontal impulse excitation, the simulated acceleration responses are compared with measurements.

**Key words:** Stone pagoda, Mode shape, Modal parameters, Shear beam, System identification

## 1. 서론

석탑관련 연구는 대부분 사회학적 관점에서 이루어져 왔으며, 최근 들어 공학적 관점에서 연구가 진행되고 있다. 석탑의 초창기 공학적 연구는 석탑의 거동 특성을 파악하기 위한 수치모델 구성 연구가 주로 이루어졌다.

김재관 등[1]은 쌍계사 오층석탑 실물 크기 모형에 대하여 진동실험이 수행하였다. 예비시험에서 미소진동에 대한 고유진동수와 모드형상 등의 동특성이 추출되었고, 본 실험에서는 지진파 진동대 실험이 수행 되었다. 미소진동에서는 석탑은 외팔보의 거동을 보이지만, 진폭이 커짐에 따라서 그러한 거동특성은 사라진다고 보고하였다. 그러나 석탑 구조체에 대한 해석적 연구는 수행되지 못하였다. 이성민 등[2]은 석축이나 석탑과 같이 다수의 석재가 조적되어 구조물을 이루는 경우에 대하여 불연속 다자유도계 모델(Mass-spring model)과 연속 전단보(Shear beam) 진동계 모델의 고유진동수와 실측 고유진동수를 비교하였다. 다자유도계의 차수가 높을수록 전단보로 해석한 결과와 차이가 없음을 보였다. 이성민 등[3]은 석탑 구

조물을 불연속 다자유도계 이산 모델로 가정하고 실제 석탑 구조체에 대한 고유진동수를 계측하여 비교하고 석재 접촉면의 스프링 상수 추정 방법을 제안하였다. 또한 이성민 등[4]은 정림사지 5층석탑을 불연속 다자유도계 이산 모델로 가정하고, 석재 마찰면을 가상의 추가 사이부재로 모델링하여 총 29개의 자유도를 갖는 구조물로 모델링하였다. 산정된 고유진동수와 실측된 고유진동수를 비교하여 석재 접촉부의 전단강성을 추정하였다. 다자유도계 이산 모델은 석탑 구조형식에 대한 해석적 모델의 최초 제안이라 측면에서 의미는 있으나, 제안 모델의 유효성 검증 결과는 신뢰도가 낮다. 왜냐하면, 석탑의 해석모델과 실제 석탑의 고유진동수가 일치한다고 하여서, 항상 거동 특성이 일치한다는 가정은 충분하지 못하다. 수치 해석모델과 실제 석탑 구조체의 동적거동이 일치하기 위해서는 고유진동수와 모드형상이 모두 일치하여야 한다. 그러나 석탑의 모드형상에 대한 계측 확인이 수행되지 못하였기 때문에 제안된 해석모델의 유효성 검증은 미흡하다.

최근 상용 개별요소법(Distinct/Discrete element method) 3DEC[5]을 이용한 석탑의 구조해석 연구가 다수 수행되었다. 홍석일 등[6]은 미륵사지석탑에 대한 구조해석을 수행하였고, 김효수 등[7]은 감은사지석탑에 대한 구조적 특성평가를 수행하였다. 김희수 등[8]은 고선사지 삼층석탑에 대하여 구조모형화 연구를 수행하였다. 홍석일 등[9]은 석재 시편의 전단실험결과를 석탑모델의 석재 접촉부에 적용하여 석재면 거칠기에 따른 구조

\*Corresponding author: Kim, Byeong Hwa

E-mail: bhkim@kyungnam.ac.kr

(Received May 8, 2017; Revised July 20, 2017; Accepted July 21, 2017)

거동 평가연구를 수행하였다. 김호수[10]는 불국사3층석탑, 정림사지 오층석탑 및 고선사지 3층 석탑에 대하여 내진성능 검토 방안을 제시하였다. 김호수 등[11]은 석탑의 구조형식에 따른 내진거동특성을 분석하였다. 개별요소법은 석재와 석재사이의 대변형 및 분리 등 불연속면 모델링 측면에서 유한요소해석보다 매우 유리하다. 그러나 개별요소법은 요구되는 시물레이션 계산량이 방대하다는 단점이 있다. 또한, 개별요소법은 석재간 마찰 계수 등의 추가 변수가 발생하는 단점이 있지만, 구성된 개별요소 수치모델의 유효성이 검증된 후에는 다양한 수치 시물레이션이 가능하기 때문에 다양한 분야에 적용되고 있다. 그런데, 상기 언급된 석탑관련 개별요소법 연구들은 석탑의 구조모델에 대한 유효성 검증이 없이 이루어졌기 때문에 그 결과의 신뢰성이 낮다. 예를 들어 석재간 절리면을 단순히 Mohr-Coulomb 마찰 모델로 하였는데, 이는 석재사이의 미끄러짐(Sliding) 모드만 고려한 것이다. 그런데 지진시 조적된 강체들의 붕괴모드는 미끄러짐 모드와 록킹(Rocking) 모드 모두 중요하다.

김병화 등[12]은 나원리 5층 석탑의 모형에 대하여 고유진동수와 모드형상 등 동특성 추출 시험을 수행하였다. 석탑의 층간 마찰면에서 전단파 응답 시간 지연이 발생하는 것과 근접 이중 모드를 최초 관찰 보고하였다. 여기서, 근접 이중 모드라 함은 근접한 고유진동수의 모드형상이 유사한 경우를 일컫는다. 그러나 적층식 석탑구조 형식이 갖고있는 근접 이중 모드를 설명할 수 있는 모델을 제시하지는 못하였다.

본 연구는 김병화 등[12]의 후속 연구로서, 석탑구조 형식의 미소 거동 특성 중에서 근접 이중 모드를 설명할 수 있는 수치 모델을 제안하고, 그 유효성을 실험적으로 검증한다. 근접 이중 모드를 설명하기 위해서 석탑의 층간 마찰면을 가상의 휨과 전단 자유도가 고려된 전단 보로 모델링하였고, 마찰에 의한 자가진동 모델을 제안한다. 제안 모델의 검증을 위하여 실험실 규모의 석탑 모형으로부터 획득된 동특성과 비교 검증하였다.

## 2. 석탑의 미소 진동 모델

### 2.1 마찰층의 모델링

기존 문헌연구를 통해서 알 수 있듯이 석탑 구조의 가장 간단한 모델은 외팔보인 휨 모델과 이산형 전단 모델을 들 수 있다. 그러나 이러한 단순 모델은 앞서 언급한 근접 이중 모드를 설명할 수 없다. 적층형 석탑 형식의 고유 특성인 근접 이중 모드를 설명하기 위해서는 다양한 가설을 세울 수 있지만, 본 연구에서는 석재 층간 마찰에 의한 자가진동 모드가 석탑 고유모드에 근접해서 발생한다고 가정한다.

Fig. 1과 같이 적층식 석탑의 개별층은 통석으로 구성되어 있다. 석재 층간 마찰 변형의 크기는 통석자체의 미소 변형보다 매우 크다. 그러므로, 수치해석의 간결성을 위해서 통석은 변형체보다는 강체로 모델링한다. 석재의 층간 마찰면은 매끄럽지 않고 다수의 불규칙한 돌기로 구성되어 있으며, 슬립과 회전에 대해서 일정한 강성을 가지고 있다. 그러므로 석재 층간 마찰층은 전단과 휨이 가능한 Timoshenko 보로 모델링 한다. 다만 석재의 마구리 특성에 따라서 마찰층의 돌기 상태가 다르므로 전단 보의 전단강성, 휨강성 및 길이는 시스템의 변수로 가정한다. 또한 마찰면의 질량은 충진된 석재 통석층 보다 현저히 작으므로 마찰층의 질량은 무시한다.

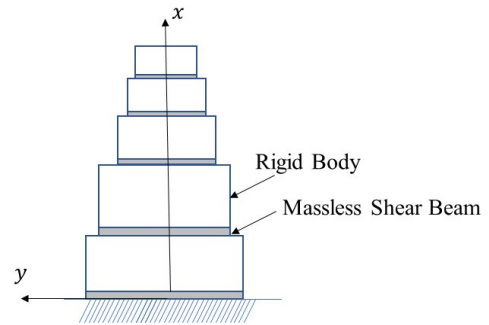


Fig. 1. Structural model for stacked stones

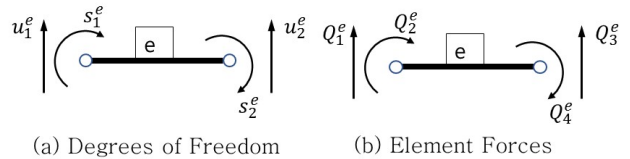


Fig. 2. Element for friction layer

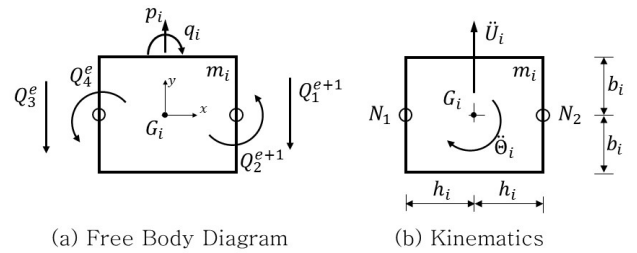


Fig. 3. The rigid body for the  $i$ th stone

Fig. 2는  $e$ 번째 Timoshenko 보요소의 자유도와 내력을 보여준다. 여기서,  $u_1^e$ 와  $u_2^e$ 는 요소 축 직각변위를 나타내고,  $s_1^e$ 와  $s_2^e$ 는 전단비틀림이 포함된 단부의 회전변위를 나타낸다. 그리고  $Q_1^e$ 와  $Q_3^e$ 는 요소축 직각방향 전단 내력을 나타내고,  $Q_2^e$ 와  $Q_4^e$ 는 모멘트 내력을 나타낸다. Timoshenko 보의 전단잠금(Shear locking)현상을 해결하기 위해 Reddy[13]가 제안한 RIE(Reduced Integration Element)가 식 (1)에 보인다. 식 (1)은 석탑 층간 마찰층에 대한 전단보의 요소 강성 행렬을 나타낸다. 여기서, 상수  $E, G, I, A, K$ , 및  $l$ 은 각각 휨강성, 전단강성, 단면모멘트, 단면적, 전단계수 및 보 요소 길이를 나타낸다.

$$\begin{bmatrix} \frac{GAK_s}{l} & -\frac{1}{2}GAK_s & -\frac{GAK_s}{l} & -\frac{1}{2}GAK_s \\ -\frac{1}{2}GAK_s & \frac{1}{4}GAK_s + \frac{EI}{l} & \frac{1}{2}GAK_s & \frac{1}{4}GAK_s - \frac{EI}{l} \\ -\frac{GAK_s}{l} & \frac{1}{2}GAK_s & \frac{GAK_s}{l} & \frac{1}{2}GAK_s \\ -\frac{1}{2}GAK_s & \frac{1}{4}GAK_s - \frac{EI}{l} & \frac{1}{2}GAK_s & \frac{1}{4}GAK_s + \frac{EI}{l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^e \\ s_1^e \\ u_2^e \\ s_2^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1^e \\ 0 \\ f_2^e \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Q_1^e \\ Q_2^e \\ Q_3^e \\ Q_4^e \end{bmatrix} \quad (1)$$

Fig. 3은  $i$ 번째 층 통석을 모델링한 강체의 물체자유도와 전체 좌표계의 운동자유도(Kinematics)를 보여준다. 여기서,  $m_i$ 와  $G_i$ 는 각각  $i$ 번째 층 통석의 질량과 무게중심을 나타내고,  $2b_i$ 와  $2h_i$ 는 각각  $i$ 번째 통석의 폭과 높이를 나타낸다. 그리고  $\ddot{U}_i$ 와  $\ddot{\theta}_i$ 는 각각  $i$ 번째 강체의  $y$ 방향 가속도와 각가

속도를 전체 좌표계로 나타낸 것이다.  $p_i$ 와  $q_i$ 는 각각  $i$  번째 강체에  $y$ 방향과 회전방향으로 작용하는 외력을 나타낸다. Fig. 3a에 대해서 뉴턴 제2 법칙을 적용하면, 다음과 같은 미분 방정식을 얻을 수 있다.

$$\Sigma F_y = p_i - Q_3^e - Q_1^e = m_i \ddot{U}_i \quad (2)$$

$$\Sigma M_{G_i} = q_i - Q_4^e - Q_2^{e+1} - h_i Q_3^e + h_i Q_1^{e+1} = I_i \ddot{\theta}_i \quad (3)$$

Fig. 3b에서 강체와 전단보가 만나는 절점의 위치를  $N_1$ 과  $N_2$ 로 표시하였다.  $N_1$ 과  $N_2$ 에서의  $y$  방향 변위와 회전각을 강체 무게중심의 변위와 회전각의 향으로 표기하면 다음과 같다.

$$U_{N_1} = U_i + h_i \theta_i \quad (4)$$

$$\theta_{N_1} = \theta_i \quad (5)$$

$$U_{N_2} = U_i - h_i \theta_i \quad (6)$$

$$\theta_{N_2} = \theta_i \quad (7)$$

식(1)에 정의된 내력들을 식(2)와 식(3)에 대입하고, 국부 좌표계로 되어 있는 보요소 단부의 기본변수들(Primary variables;  $u_1^e, u_2^e, s_1^e, s_2^e$ )을 식(4)에서 식(7)에 보이는 강체 중심의 운동자유도로 대치 하면 다음과 같은 미분방정식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} m_i \ddot{U}_i + k_{31}^e U_{i-1} + (-k_{31}^e h_{i-1} + k_{32}^e) \theta_{i-1} + (k_{33}^e + k_{11}^{e+1}) U_i \\ + (k_{33}^e h_i + k_{34}^e - k_{11}^{e+1} h_i + k_{12}^{e+1}) \theta_i + k_{13}^{e+1} U_{i+1} \\ + (k_{13}^{e+1} h_{i+1} + k_{14}^{e+1}) \theta_{i+1} = p_i \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} I_i \ddot{\theta}_i + (k_{41}^e + k_{31}^e h_i) U_{i-1} + (-k_{41}^e h_{i-1} + k_{42}^e - k_{31}^e h_{i-1} h_i + k_{32}^e h_i) \theta_{i-1} \\ + (k_{43}^e + k_{33}^e h_i + k_{21}^{e+1} - k_{11}^{e+1} h_i) U_i + (k_{43}^e h_i + k_{44}^e + k_{33}^e h_i h_i + k_{34}^e h_i \\ - k_{21}^{e+1} h_i + k_{22}^{e+1} + k_{11}^{e+1} h_i h_i - k_{12}^{e+1} h_i) \theta_i + (k_{23}^{e+1} - k_{13}^{e+1} h_i) U_{i+1} \\ + (k_{23}^{e+1} h_{i+1} + k_{24}^{e+1} - k_{13}^{e+1} h_{i+1} h_i - k_{14}^{e+1} h_i) \theta_{i+1} = q_i \end{aligned} \quad (9)$$

여기서,  $k_{ij}^e$ 는 식(1)에 보이는  $e$ 번째 요소 강성행렬에서  $i$ 번째 행과  $j$ 번째 열의 강성항을 나타낸다.  $n$ 층 석탑에 대하여,  $i=1, \dots, n$ 이며,  $i < 0$  거나  $i > n$ 인 경우에  $U_i = \theta_i = 0$ 이다. 석탑을 이루는 통석에 대하여 식(8)과 식(9)를 연속적으로 적용하고, 지반의 경계조건을 적용하면 다음과 같은 연립 미분방정식을 얻을 수 있다.

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{z}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{z}} + \mathbf{K}\mathbf{z} = \mathbf{f} \quad (10)$$

여기서, 행렬  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{K}$ 는 각각 질량, 감쇠, 강성을 나타내는 전체 시스템 행렬이다. 그리고 Rayleigh 감쇠 행렬은 다음과 같다.

$$\mathbf{C} = \alpha \mathbf{M} + \beta \mathbf{K} \quad (11)$$

그리고,  $n$ 층 석탑에 대한 변위벡터  $\mathbf{z}$ 와 외력벡터  $\mathbf{f}$ 는 다음과 같다.

$$\mathbf{z} = [U_1 \ \theta_1 \ \dots \ U_i \ \theta_i \ \dots \ U_n \ \theta_n]^T, \quad (12)$$

$$\mathbf{f} = [p_1 \ q_1 \ \dots \ p_i \ q_i \ \dots \ p_n \ q_n]^T, \quad (13)$$

## 2.2 수치 시뮬레이션

식(10)은 휨과 전단이 고려된 수치모델이다. 본 연구에서는 적층식 석탑 구조체의 지배거동은 로킹보다는 슬라이딩으로 본다. 이는 국내 대부분의 적층식 석탑의 개별 층에 대한 폭 대비 높이의 비율이 마찰면 정지마찰 계수보다 크기 때문이다( $b/h > \mu_s$ ). 그리고 근접 이중 모드는 층간 마찰에 의한 자가가진(Self excitation) 때문에 발생 되는 것으로 가정한다.

식(10)의 일반해는 다음 식으로 기술 할 수 있다

$$\mathbf{z} = \mathbf{z}_s + \mathbf{z}_f \quad (14)$$

여기서,  $\mathbf{z}_s$ 와  $\mathbf{z}_f$ 는 각각 제차해(Homogeneous solution)와 비제차해(Nonhomogeneous solution)를 나타내고 상응하는 지배방정식은 다음과 같이 기술할 수 있다.

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{z}}_s + \mathbf{C}\dot{\mathbf{z}}_s + \mathbf{K}\mathbf{z}_s = \mathbf{0} \quad (15)$$

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{z}}_f + \mathbf{C}\dot{\mathbf{z}}_f + \mathbf{K}\mathbf{z}_f = \mathbf{f}_f \quad (16)$$

마찰에 의한 자가가진을 다음과 같이 선형으로 정의하자.

$$\mathbf{f}_f = \mathbf{f} - \Delta \mathbf{C}\dot{\mathbf{z}}_f - \Delta \mathbf{K}\mathbf{z}_f \quad (17)$$

식(17)을 식(16)에 대입하면, 질량행렬은 공유하지만, 강성과 감쇠행렬이 다른 시스템을 이룬다.

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{z}}_f + \mathbf{C}_f \dot{\mathbf{z}}_f + \mathbf{K}_f \mathbf{z}_f = \mathbf{f} \quad (18)$$

여기서,

$$\mathbf{C}_f = \mathbf{C} + \Delta \mathbf{C} \quad (19)$$

$$\mathbf{K}_f = \mathbf{K} + \Delta \mathbf{K} \quad (20)$$

식(15)와 식(18)에 보이는 두 개의 시스템은 다음과 같이 하나의 시스

템의로 구성 할 수 있다.

$$M_t \ddot{z}_t + C_t \dot{z}_t + K_t z_t = f_t \quad (21)$$

여기서,

$$M_t = \begin{bmatrix} M & O \\ O & M \end{bmatrix}, C_t = \begin{bmatrix} C_f & O \\ O & C \end{bmatrix}, K_t = \begin{bmatrix} K_f & O \\ O & K \end{bmatrix}, f_t = \begin{bmatrix} f \\ 0 \end{bmatrix}, z_t = \begin{bmatrix} z_f \\ z_s \end{bmatrix} \quad (22)$$

식 (21)의 시뮬레이션은 수치적분으로 얻을 수 있는데, 기존 문헌에 다양한 방법들이 제안되어 있다. 일반적으로 미분 차수가 낮을수록 수렴 안정성이 높으므로 식 (21)에 보이는 2계 상미분 연립방정식을 변수치환을 이용하여 1계 상미분 연립방정식으로 치환한다. 치환된 시스템은 상태공간 표현(State space representation) 방식으로 알려져 있으며, 다음과 같다.

$$\dot{v} = Av + Bf \quad (23)$$

$$y = C_d v + Df \quad (24)$$

여기서,

$$v = \begin{bmatrix} \dot{z}_t \\ z_t \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -M_t^{-1}K_t & -M_t^{-1}C_t \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ M_t^{-1} \end{bmatrix}, \quad (25)$$

$$C_d = \begin{bmatrix} -EM_t^{-1}K_t \\ -EM_t^{-1}C_t \end{bmatrix}^T, D = [EM_t^{-1}]$$

여기서 행렬 **E**는 특정 상태변수만 출력하고자 하는 경우에 설정하는 행렬을 나타낸다.

### 3. 석탑의 동특성 추출

#### 3.1 실험개요

Fig. 4와 같이 5층 석탑 모형에 대하여 동특성 실험이 수행 되었다. 석탑의

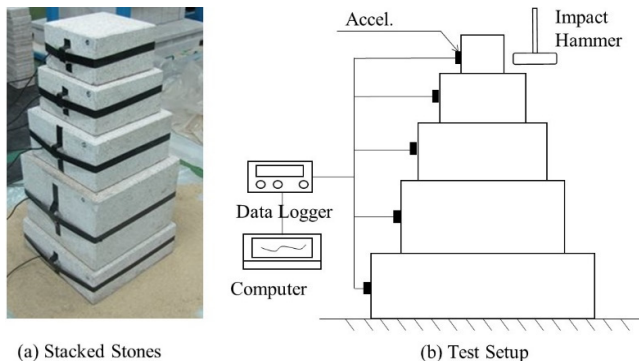


Fig. 4. Modal testing setup

Table 1. Measured mass and dimensions

Story No.	Mass, $m_i$ (Ns <sup>2</sup> /m)	Width/2, $b_i$ (m)	Height/2, $h_i$ (m)
1	20.84	0.1385	0.0530
2	35.29	0.1290	0.1040
3	14.50	0.1085	0.0585
4	8.20	0.0895	0.0490
5	5.62	0.0755	0.0470

제원은 Table 1에 보인다. 충격망치를 이용하여 5층 석탑 통석의 수평 모드가 가진 되었다. 샘플링 주파수는 2000 Hz이고, NI (National Instrument)사의 데이터로거와 Labview Software 가 사용되었다. 석탑의 각 층별 수평 가속도 응답신호가 각 층에 부착된 가속도계에서 수집되었다.

Fig. 5는 계측된 가속도의 시간이력과 스펙트럼을 보여준다. 시간이력을 살펴 보면 최대 가속도는 충격이 가해진 5층에서 발생하였다. 또한, 가속도 시작점을 자세히 관찰해보면 층별 응력파의 전단지연이 관찰된다. 스펙트럼을 살펴보면 충격망치에 의해서 저차모드 4개 정도가 가진된 것을 알 수 있다.

#### 3.2 동특성 추출

계측된 가속도 시간이력에 대해서 TDD (Time Domain Decomposition) 기법[14, 15]이 적용되었다. 추출된 고유진동수와 감쇠비는 Table 2에 보이고, 추출된 모드형상은 Fig. 6에 보인다. 김병화 등[12]의 선행연구에서 관찰된 근접 이중 모드가 관찰 된다. 1차모드와 2차모드는 거의 동일하고, 2차모드와 4차모드가 매우 유사하다. 계측된 1,2차 모드는 일반 연속체 모델인 외팔보 모델이나 이산형 전단 모델의 1차 모드형상과 동일하다. 그리고 계측된 3, 4차모드는 외팔보의 전형적인 2차모드 형상임을 알 수 있다.

### 4. 시스템인식

#### 4.1 목적함수

시스템인식은 계측된 고유진동수와 모드형상이 제안된 수치모델의 고유진동수와 모드형상이 일치하도록 수치모델의 시스템 변수를 찾는 것이다. 석탑 진동 모델의 시스템인식을 위하여, 민감도 기반 시스템인식기법 [16]이 확장 적용되었다. 기존의 민감도 기반 시스템인식기법은 목적함수로서 고유진동수만을 다루었으나, 본 연구에서는 모드형상도 목적함수로 추가하는 방안을 제시한다.

인식하고자 하는 시스템의 목적함수  $\beta$ 는 다음과 같이 정의한다.

$$\beta = [f_1 \dots f_{n_f} \ 1 \dots 1]^T \quad (26)$$

여기서  $f_i$ 는  $i$ 번째 고유진동수를 나타내며, 아래 첨자  $n_f$ 는 시스템 인식에 쓰이는 고유진동수의 개수를 나타낸다. 고유진동수는 스칼라 값(Scalar value) 이라서 최적화를 위한 목적함수로 쉽게 적용이 가능하지만, 모드형상과 같은 벡터는 목적함수로 사용하기 어렵다. 이러한 문제를 해결하기 위

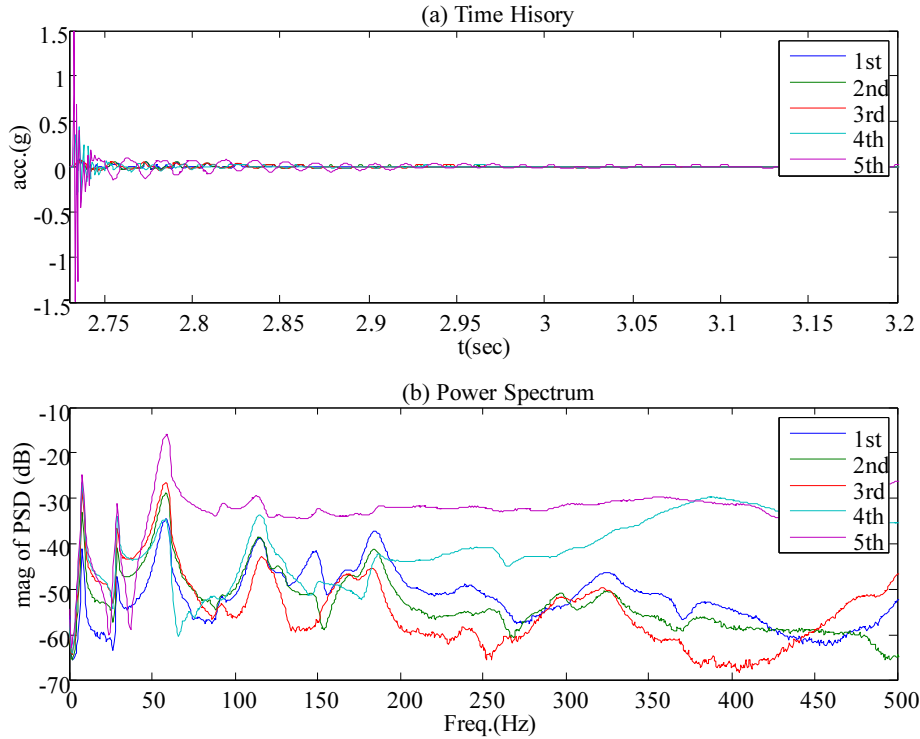


Fig. 5. Measured time histories and spectrum

Table 2. Comparison of modal data

Mode No.	Measurement		Simulation	
	Damping (%)	Freq. (Hz)	Freq. (Hz)	MAC Mode shape
1	0.0192	8.3008	8.1526	0.9974
2	0.0077	29.2969	29.3126	0.9945
3	0.0307	58.5938	57.9477	0.9952
4	0.1575	58.5938	114.4313	0.8842

$$MAC = \frac{|\phi_i^T \phi_j|^2}{|\phi_i^T \phi_i| |\phi_j^T \phi_j|} \quad (27)$$

MAC 값은 벡터  $\phi_i$  와 벡터  $\phi_j$  가 얼마나 닮았는가를 정량적으로 나타내는 상호상관의 일종으로서 ‘1’에 가까울 수록 두 벡터는 닮았다고 할 수 있다. 그러므로 석탑 모형으로부터 계측된 모드형상과 제안 수치모델의 모드형상 사이의 MAC값이 일치하도록 식 (19)에 보이는 시스템 목적함수에 단위 숫자 ‘1’를 도입하였다. 시스템 인식에 사용하는 모드형상의 개수가  $n_s$  인 경우에 목적함수로 사용하는 총 개수는  $n_t = n_f + n_s$  라고 하자.

### 4.2 시스템 변수

고유진동수와 MAC 값으로 이루어진 목적함수에 영향을 미치는 변수들은 다양하다. 각 층별 전단보의 휨강성  $\left(\frac{EI}{l}\right)$  과 전단강성  $\left(\frac{GAK_s}{l}\right)$  그리고 전단보의 길이( $l$ )는 명백히 미지수이다. 반면, 강체의 질량, 폭, 높이 등은 계측 가능하다고 가정한다. 시스템 인식 변수벡터  $\tau$ 는 다음과 같이 정의한다.

$$\tau = \left[ \left(\frac{GAK_s}{l}\right)_1, \left(\frac{EI}{l}\right)_1, l_1, \dots, \left(\frac{GAK_s}{l}\right)_n, \left(\frac{EI}{l}\right)_n, l_n \right]^T \quad (28)$$

여기서, 각 항목의 아래 첨자는 석탑의 층수를 나타낸다. 그러므로 총  $n$ 층 석탑은 마찰층마다 3개의 미지수가 있으므로 식 (21)에 보이는 인식벡터의 길이는  $n_v = 3n$  이 된다. 식 (19)에 보이는 목적함수 벡터는 식 (22)에 보이는

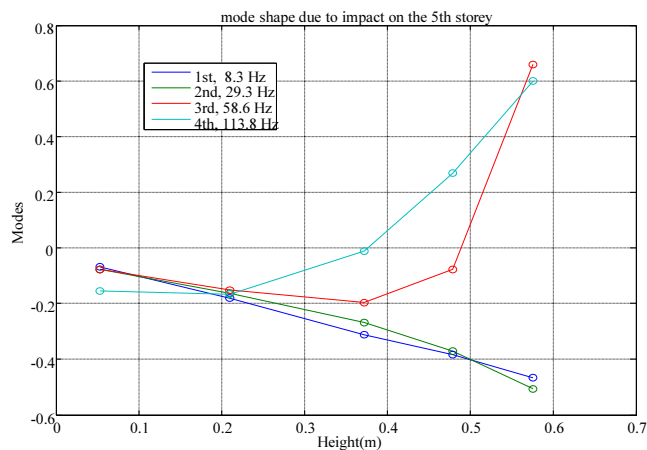


Fig. 6. Mode shapes from extracted measured data

하여 다음 식에 보이는 모드형상의 MAC (Modal Assurance Criterion)값을 이용한다.

인식변수 벡터의 함수이다. 그러므로 인식변수벡터의 단위 변화율에 대한 목적함수벡터의 변화율은 다음과 같은 민감도 방정식으로 기술할 수 있다.

$$\mathbf{g} = \mathbf{F}\boldsymbol{\eta} \tag{29}$$

여기서, 벡터  $\mathbf{g}$ 와  $\boldsymbol{\eta}$ 는 각각 목적함수와 인식변수의 변화율을 나타내고 다음과 같이 정의 된다.

$$\mathbf{g} = \begin{bmatrix} \delta\beta_1 & \dots & \delta\beta_{n_i} \\ \beta_1 & \dots & \beta_{n_i} \end{bmatrix}^T \tag{30}$$

$$\boldsymbol{\eta} = \begin{bmatrix} \delta\tau_1 & \dots & \delta\tau_{n_e} \\ \tau_1 & \dots & \tau_{n_e} \end{bmatrix}^T \tag{31}$$

여기서,  $\beta_i$ 는 식 (19)에 보이는 목적함수벡터의  $i$ 번째 항목을 나타내며,  $\tau_i$ 는 식 (28)에 보이는 인식변수벡터의  $i$ 번째 항목을 나타낸다. 그리고 식 (29)에 보이는 민감도 행렬  $\mathbf{F}$ 는 다음과 같다.

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \frac{\partial\beta_1}{\partial\tau_1} & \tau_1 & \dots & \frac{\partial\beta_1}{\partial\tau_{n_e}} & \tau_{n_e} \\ \beta_1 & & & \beta_1 & \\ \vdots & \ddots & & \vdots & \\ \frac{\partial\beta_{n_i}}{\partial\tau_1} & \tau_1 & \dots & \frac{\partial\beta_{n_i}}{\partial\tau_{n_e}} & \tau_{n_e} \\ \beta_{n_i} & & & \beta_{n_i} & \end{bmatrix} \tag{32}$$

민감도 방정식(29)는 Kim 등[17]이 제시된 반복 해법에 의해서 시스템 변수를 산정 할 수 있다. 반복법의 다음 여섯 가지 절차를 따른다. 첫째, 식 (28)에 보이는 인식벡터의 초기치를 가정한다. 둘째 식 (32)의 민감도 행렬을 변분법(Theory of variation)을 이용하여 산정한다. 셋째, 민감도 벡터의 의사역행렬(Pseudo inverse matrix)을 다음 식으로 산정한다. 여기서  $\epsilon$ 는 수렴 속도를 결정 짓는 임의 상수행렬이다.

$$\mathbf{F}^{-1} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} [\mathbf{F}^T \mathbf{F} + \epsilon]^{-1} \mathbf{F}^T \tag{33}$$

넷째, 식 (30)을 이용하여 목적함수 벡터의 변분을 산정한다. 다섯째, 다음 식을 이용하여 인식변수 변화율 벡터를 산정한다.

$$\boldsymbol{\eta} = \mathbf{F}^{-1} \mathbf{g} \tag{34}$$

마지막으로 인식변수 벡터를 다음 식을 이용하여 개선한다.

$$\tau_i^{j+1} = (1 + \eta_i) \tau_i^j \tag{35}$$

여기서 위 첨자는 반복 횟수를 나타내고,  $\eta_i$ 는 식(34)에서 산정된 인식변수 변화율 벡터의  $i$ 항목을 나타낸다. 상기 여섯 가지 절차를 인식변수변화율이 영으로 수렴 할 때까지 반복한다.

**Table 3.** Converged identification variables

Story	Identified Variables					
	$\frac{GAK_s}{l} \times 10^6 \text{ N/m}$		$\frac{EI}{l} \times 10^5 \text{ Nm}$		$l \times 10^{-3} \text{ m}$	
	Natural mode	Self-excited	Natural mode	Self-excited	Natural mode	Self-excited
1	1.0000	0.9069	0.2221	2.9331	0.1000	0.1128
2	1.0002	0.9975	2.1331	756.6066	0.0999	0.1033
3	1.0000	0.9917	9.6843	1.4828	0.1000	0.1002
4	1.0003	1.0019	0.3101	152.1539	0.0999	0.0977
5	0.9999	1.0007	0.0512	15.0703	0.1002	0.0987

### 4.3 시스템인식 결과

계측된 4개의 모드 중에서 1차와 3차 모드는 고유모드로 가정하고, 식 (15)에 보이는 제차 시스템을 구성한다. 그리고, 2차모드와 4차모드는 자가 가진 모드로 식 (18)에 보이는 비제차 시스템을 구성한다. 여기서, 응답 스펙트럼으로부터 관찰되는 근접 이중 모드로부터 고유모드와 자가 가진 모드의 구분은 불가하다. 다만, 여러가지 조합을 가정하여 시스템인식 절차를 반복 수행하고, 각각의 인식수렴도를 확인함으로써 고유모드와 자가 가진 모드의 구분이 가능하다.

두 시스템들은 질량행렬은 공유하지만 강성행렬에 일정한 차이가 있다. 두 개의 시스템에 대하여 앞서 서술된 민감도 기반 시스템인식 절차를 각각 적용 하였다. 이때 전단강성, 휨강성 및 요소길이의 초기치는 각각  $1 \times 10^6 \text{ N/m}$ ,  $1 \times 10^5 \text{ Nm}$  및  $1 \times 10^{-4} \text{ m}$ 로 설정하였다. 여기서, 초기치의 설정은 1차 고유진동수만을 목적함수로 하는 3개의 인식변수가 모두 수렴되는 값의 일정 범위에서 임의로 특정하여 선정하였다.

Table 2는 계측된 고유진동수와 목적함수의 수렴치 비교를 보여준다. 수렴된 고유진동수와 모드형상의 MAC 값이 계측치와 잘 일치하고 있다. Table 3은 인식변수 벡터의 수렴 값을 보여준다.

### 4.4 시뮬레이션 결과

Table 3에 보이는 시스템변수를 이용하여 식 (21)에 보이는 전체 거동 시스템을 구성하였다. 5층 수평 가진 임펄스(Impulse)에 대하여 식(23)과 식(24)에 보이는 상태공간 방정식을 구성하고 4차 Runge-Kutak 수치 적분이 수행 되었다. 가속도가 부착된 위치에서 시뮬레이션된 가속도응답의 시간이력과 스펙트럼이 Fig. 7에 보인다. Fig. 5에 보이는 계측치와의 비교할 때 매우 잘 일치한다.

시뮬레이션된 시간이력 데이터에 대하여 TDD 기법을 이용하여 동특성이 추출 되었다. 추출된 고유진동수와 모드형상이 Fig. 8에 보인다. Fig. 6에 보이는 계측치와 비교할 때 모드형상이 정성적으로 매우 잘 일치한다. 모드형상의 상호일치성에 대한 정량적 평가는 Table 3에 보이는 MAC 값으로 가능하다. 계측 모드형상과 시뮬레이션된 모드형상 사이의 MAC 값이 1,2,3차모드는 1에 매우 가깝다. 그러나 4차모드는 0.9보다 작은데 이는 4차모드의 가진이 충분하지 못하여 추출된 4차 모드형상의 1층 값의 계측오차 때문인 것으로 판단 된다.

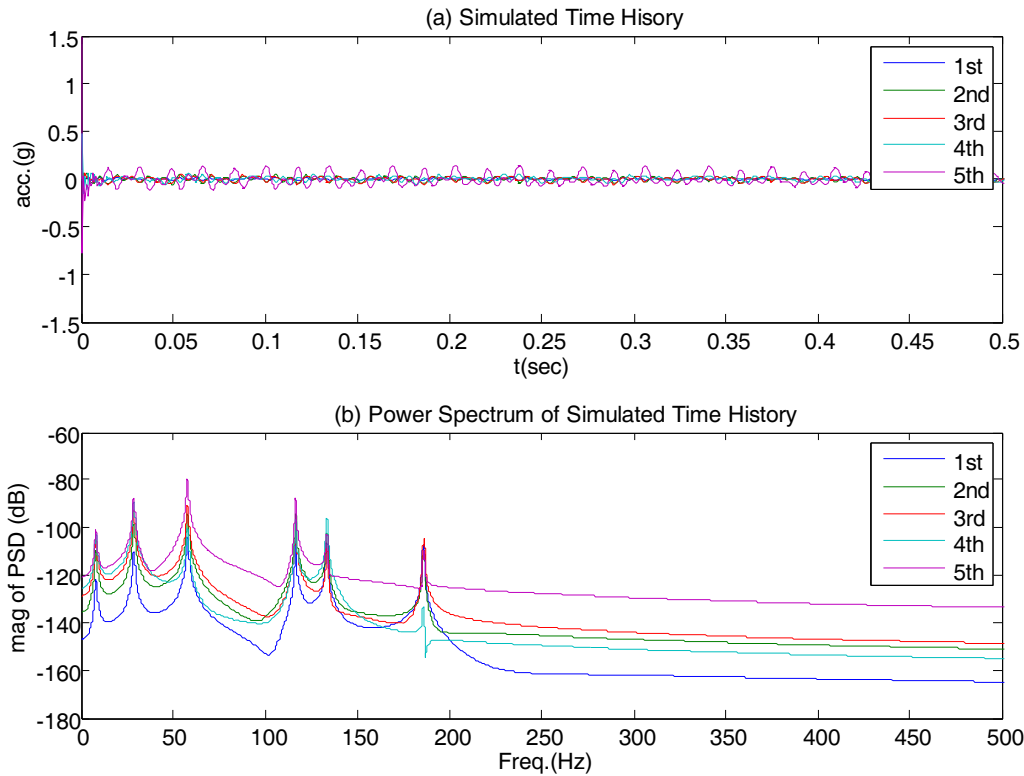


Fig. 7. Simulated time histories and spectrum

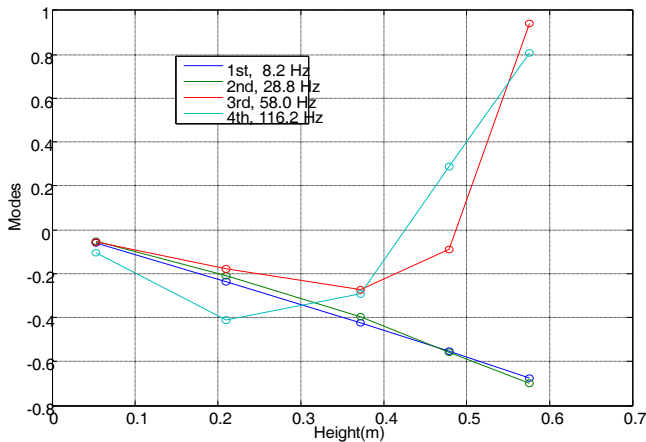


Fig. 8. Mode shapes extracted from simulated data

## 5. 요약과 결론

적층식 석탑의 미소 진동 거동에서 관찰되는 근접 이중 모드를 설명하기 위한 수치모델이 제안되었다. 제안 모델은 석탑의 층간 마찰면을 전단과 휨이 가능한 Timoshenko 보로 모델링하고, 각 층의 통석은 강체로 모델링한다. 근접 이중 모드는 석탑의 고유모드와 층간 마찰에 의한 자가가진 모드의 선형 조합으로 이루어진다는 가정하에 수치 시뮬레이션을 위한 상태공간 시스템이 구성되었다. 제안된 수치모델의 유효성 검증하기 위하여 5층으로 구성된 적층식 석탑 모형에 대하여 동특성 추출 실험이 수행되었고 고유진동수와 모드형상이 추출되었다. 민감도기반 시스템인식기법을 확장 적

용하여 계측된 동특성과 제안된 수치모델의 동특성치가 일치하게 만드는 시스템변수를 인식하였다. 인식된 시스템변수를 이용한 제안 모델의 미소 진동 거동은 실측치와 잘 일치하였다.

본 연구의 실험 및 수치연구 결과로 적어도 다음 세 가지 결론에 이른다. 첫째, 석재와 석재사이의 마찰면은 전단과 휨거동이 모두 가능한 Timoshenko 보요소로 모델링하는 것은 유효하다. 둘째, 적층식 석탑의 근접 이중모드는 석탑의 고유모드와 층간 마찰에 의한 자가가진 모드의 선형조합으로 표현될 수 있다. 셋째, 민감도 기반 시스템인식기법의 적용시, 모드형상과 같은 벡터량을 목적함수로 활용할 경우에, 벡터의 상호상관 스칼라 값을 이용하여도 수렴된다.

### / 감사의 글 /

이 논문은 2015년도 정부의 재원으로 한국연구재단의 지원을 받아 수행된 기초연구사업입(No. NRF-2015R1D1A1A01059055).

### / REFERENCES /

1. Kim JK, Ryu H, Seismic test of a full-scale model of a five-storey stone pagoda, Earthquake Engng Struct. Dyn, 2003 Jan;32:731-750.
2. Lee S, Park H, Kim S, Lee S, Change of dynamic characteristics of stone masonry structures according to number of layers of granite brick, J. Archit. Inst. Korea, 2001 Jun;17(6):3-10.
3. Lee SM, Son HW, Lee SG, Stiffness and natural frequency of stone

masonry pagoda, J. Korea Inst. Struct. Maint. Insp. 2004 Jul;8(3): 263-270.

4. Lee SM, Lee KH, Park SW, Suh MC, Lee CH. Computational modelling method by using the natural frequencies of five-story pagoda in Chongnimsa site, J. Korean Assoc. Spat. Struct. 2008 Oct;8(5):67-74.
5. ITASCA Consulting Group Inc. Dimensional Distinct Element Code User's Guide, c2003.
6. Hong SI, Kim HI. Analysis method for masonry stone pagoda using discrete element method, J. Archit. Inst. Korea. 2007 Feb;23(2): 43-50.
7. Kim HS, Hong SI, Shin HB. Structural characteristic evaluation of stone pagoda structure considering reinforcement types of stylobate and roof stone, J. Archit. Inst. Korea. 2008 Mar;24(3):79-86.
8. Kim HS, Choi HL, Park YS, Jung SJ, Kim S.M, Bae BS. Structural modelling and analysis of three-story stone pagoda in Goseon-sa temple site considering stylobate types, J. Archit. Inst. Korea. 2009 Dec;25(12):73-80.
9. Hong SI, Shin HB, Kim DM, Kim HS. Structural behavior evaluation according to roughness of discontinuum surface of stone pagoda, J. Archit. Inst. Korea. 2011 Oct;27(10):63-70.
10. Kim HS. Dynamic Behavior Characteristic evaluation of stone pagoda structure according to earthquake return period, J. Archit. Inst. Korea. 2013 Jul;29(7):43-50.
11. Kim HS, Hong SI, Yoo J, Joung HB. Seismic performance evaluation according to construction and configuration types of stone pagoda structure, J. Archit. Inst. Korea. 2016 Sep;32(9):19-50.
12. Kim BH, Moon DJ, Lee DH. Extracting modal parameters of layered stone pagoda using TDD technique, J. Earthq. Eng. Soc. Korea. 2015 May;19(3):103-108.
13. Reddy JN. On locking-free shear deformable beam finite elements, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 1997 Oct;149:113-132.
14. Kim BH, Park T, Stubbs N. A new method to extract modal parameters using output-only responses, J. Sound Vib. 2005 Apr;282:215-230.
15. Kim BH, Lee J, Lee DH. Extracting modal parameters of high-speed railway bridge using the TDD technique, Mech. Syst. Signal Pr. 2010 Apr;24:707-720.
16. Stubbs N. A general theory of non-destructive damage detection in structures, in H.H.H. Leipholtz (Ed.) Proceedings of the Second International Symposium on Structural Control, University of Waterloo, Ontario, Martinus Nijhoff Publishers, Dordrecht, Netherlands, 1985, p.694-713.
17. Kim BH, Park T. Estimation of cable tension force using the frequency-based system identification method, J. Sound Vib. 2007 Jul;304:660-676.