

베이지안 방법론을 적용한 154 kV 송전용 자기애자의 수명 평가 개발

최인혁¹, 김태균¹, 윤용범¹, 이준신², 김성욱^{3,a}

¹ 한국전력 전력연구원

² 성균관대학교 정보통신대학

³ 한양대학교 응용수학과

Lifetime Assessments on 154 kV Transmission Porcelain Insulators with a Bayesian Approach

In-Hyuk Choi¹, Tae-Kyun Kim¹, Yong-Beum Yoon¹, Junsin Yi², and Seong Wook Kim^{3,a}

¹ KEPCO Research Institute, Daejeon 34056, Korea

² College of Information and Communication Engineering, Sungkyunkwan University, Suwon 16419, Korea

³ Department of Applied Mathematics, Hanyang University, Ansan 15588, Korea

(Received July 6, 2017; Revised July 22, 2017; Accepted July 25, 2017)

Abstract: It is extremely important to improve methodologies for the lifetime assessment of porcelain insulators. While there has been a considerable amount of work regarding the phenomena of lifetime distributions, most of the studies assume that aging distributions follow the Weibull distribution. However, the true underlying distribution is unknown, giving rise to unrealistic inferences, such as parameter estimations. In this article, we review several distributions that are commonly used in reliability and survival analysis, such as the exponential, Weibull, log-normal, and gamma distributions. Some properties, including the characteristics of failure rates of these distributions, are presented. We use a Bayesian approach for model selection and parameter estimation procedures. A well-known measure, called the Bayes factor, is used to find the most plausible model among several contending models. The posterior mean can be used as a parameter estimate for unknown parameters, once a model with the highest posterior probability is selected. Extensive simulation studies are performed to demonstrate our methodologies.

Keywords: Bayes factor, Cumulative distribution, Model selection, Porcelain insulator, Posterior probability

1. 서론

오늘날 산업의 발달로 인해 전력수요가 꾸준히 증가하는 동시에 안정적인 공급을 원하는 구조로 인하여 전력 기자재의 신뢰성이 중요하게 여겨지고 있다. 현재

국내에 설치되어 운영 중인 대용량에너지의 장거리 송전에 사용되는 송전선로는 주로 154 kV, 345 kV이며, 송전 선로에 필요한 기자재는 철탑, 전선 금구류 및 애자 등이 있다. 이 중 한국전력공사의 송전설비 고장 분석 및 대책 자료에 따르면 전선 다음으로 애자의 고장 사례가 높게 나타나 있다. 애자는 전력용 도체의 지지 및 전기적 절연 책무에 있어서 최상의 수준을 유지해야 한다. 그런데 현재 국산화 개발된 애자 중 1995년에 제조되어 설치된 애자의 사고가 빈번하게 발생하고 있다. 송전용 자기애자의 수명 평가 및 예측의

a. Corresponding author; seong@hanyang.ac.kr

선행연구 결과는 다음과 같은 것이 있다. [1]은 품질지수와 균일도의 상관성을 고려한 통계모형을 이용하여 애자의 불량률을 예측하였다. 애자에 사용된 주원료의 하나인 알루미늄 첨가량 변화에 따른 애자의 물리적 특성변화를 연구하여 성능향상을 확인한 연구는 [2]와 [3]에서 확인할 수 있다. 한편, [4]는 송전용 폴리머 애자의 국내 환경으로의 적합성 여부, 장기 신뢰성 및 보수점검을 위한 열화진단기술 관련한 연구를 수행하였다. [5]는 애자의 물리적 특성을 분석하기 위하여 와이블 분포함수를 이용하여 품질지수, 균일지수 등을 유도하였다.

국내에 설치되어 운영 중에 있는 송전선로자기애자 중 점유율이 가장 높은 154 kV 송전용자기애자의 화학성분과 미세구조, 그리고 상대밀도, 탄성률, 표면경도, 파괴인성 등의 기계적 특성 등의 분석이 완료되면 각각의 특성들이 자기애자의 수명에 영향을 주는 예후인자로 간주하여 신뢰성 분석을 실시하게 된다. 본 논문에서는 열화된 자기 애자의 물리적 특성 분석 후 시행하게 될 신뢰성 분석과 관련하여 자주 이용되는 통계적 모형들에 대하여 설명하고, 모형 선택결과 모수 추정 문제도 함께 다룬다. 특별히, 우도함수에만 의거하여 추론하는 고전적방법이 아니라 사전정보를 가정하는 베이지안 방법을 적용하고자 한다.

2. 실험 방법

2.1 생존 분석의 이해

생존 분석은 연구자가 관심이 있는 어떤 사건(event, 본 연구에서는 자기애자의 수명을 말함)이 발생할 때까지의 시간으로 자료가 주어진 경우 이를 분석하는 통계적 방법으로서 어떤 사건이 발생할 때까지의 시간구간 데이터에 관심이 있다. 예를 들어 이식된 신장은 얼마 동안이나 기능을 계속할 수 있을까? 공장에서 제조된 전구의 수명은 얼마나 될까? 실업자들의 구직까지의 실업기간은 얼마나 될까? 등과 같이 의학계, 산업계, 사회과학 등의 분야에서 생존 분석기법을 활용하고 있다. 앞의 예에서 관찰 기간(time)은 신장 이식, 전구 제조, 실업 등의 초기 사건(initial event)이 이식 신장의 기능 상실, 전구의 기능 상실, 구직과 같은 부수 사건(subsequent event)에 의해서 종료되는데 이 기간을 생존 시간(survival time)이라고 한다. 그리고 이런 생존 시간에 영향을 미치는 변수를 예후 인자(prognostic factor)라고 한다.

이제 X 를 음이 아닌 값만을 갖는 연속형 확률변수라 하고 X 의 확률밀도함수(probability density function)를 $f(x)$, 누적확률분포함수(cumulative distribution function)를 $F(x)$ 라 하자. 신뢰성 혹은 생존 분석에서 중요한 개념 중의 하나가 위험 함수(hazard function)인데, 위험률함수(failure rate function)라고 부르기도 하며 $\rho(x)$ 로 나타내자. x 시점에서의 위험 함수는 x 시점까지 생존한 사람이 x 시점 바로 직후 순간적으로 사망할 조건부 확률로써 정의된다. 따라서 위험 함수는 아래 식 (1)로 정의된다.

$$\begin{aligned}\rho(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{hS(x)} \\ &= \frac{f(x)}{S(x)} \\ &= \frac{d}{dx} [-\ln S(x)]\end{aligned}\quad (1)$$

여기서 $S(x) = 1 - F(x)$ 이고, $S(x)$ 를 시간 x 에서의 생존함수(survival function) 혹은 신뢰함수(reliability function)이라고 한다. 따라서 위험 함수는 생존함수로부터 도출됨을 알 수 있다. 마찬가지로 $S(0) = 1$ 이라는 사실로부터

$$S(x) = \exp\left(-\int_0^x \rho(u) du\right)\quad (2)$$

임을 알 수 있다. 위험 함수의 값이 커질수록 생존 시간은 대체로 작아진다. 전형적인 위험 함수는 그림 1에서 보듯이 욕조곡선(bathtub curve)의 모양으로 그려진다.

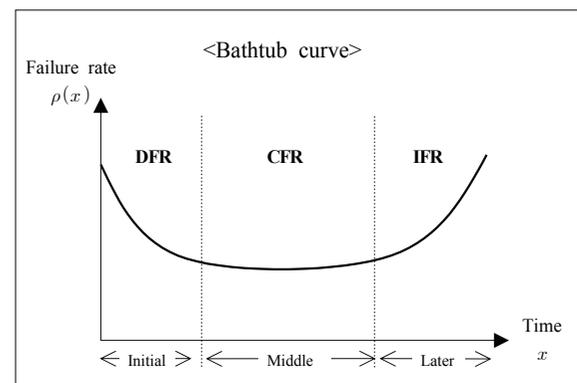


Fig. 1. Bathtub curve.

즉, 어떤 물리적 시스템은 초기 혹은 유아기적(infant mortality) 시기에는 위험 함수가 감소하는(decreasing failure rate, DFR) 경향이 있고, 그 이 후에는 상수형태(constant failure rate, CFR)를 보인다. 마지막으로 시스템이 오래되는 경우 위험 함수는 증가하는(increasing failure rate, IFR) 형태를 띠게 된다. 따라서 각 상태(phase)에 대응하여 IFR, CFR, 혹은 DFR를 갖는 분포에 관심이 있을 수 있으며, 시간구간별로 위험 함수의 형태가 변하는 분포에 관심이 있을 수도 있을 것이다.

2.2 생존 분석 모형

생존 분석에서 생존함수의 추정방법의 시초는 [6]이 제안한 곱-극한(product limit) 추정량이다. 이 방법은 비모수적 방법에 의거하여 제안된 방법으로 경험적분포(empirical distribution)를 통하여 계산된다. 신뢰성이론과 생존 분석에 관한 통계적 추론에 관한 방법론은 [7]에 잘 기술되어 있다. 본 연구는 생존 분석과 신뢰성이론에서 자주 사용하는 모형들의 모수를 추정하는 모수적 접근방법을 이용하려고 한다. 모수적 모형은 생존함수 F 에 관한 모형을 미리 설정해 놓고 관측된 자료를 이용하여 그 모형의 모수를 추정하여 F 의 모양을 확정짓는 방법이다. 생존 분석 자료에서 생존 시간이 특정한 분포에 따르는 것으로 간주하여 각 모형에 대응하는 모수를 추정하는 방법이다. 신뢰성과 생존 분석에 자주 사용되는 모형들은 아래와 같으며 그 특성은 다음에서 간략히 기술하고자 한다.

2.2.1 지수분포

생존 분석에서 사용되는 모형 중에서 가장 단순한 분포는 아마도 지수분포일 것이다. 지수분포의 확률밀도함수는 $f(x;\theta) = \theta e^{-\theta x}$, $x > 0$, $\theta > 0$ 이고 생존함수는 $S(x) = e^{-\theta x}$ 이므로 위험 함수는 $\rho(x) = \theta$, 즉 시간이 지나도 변하지 않는 고정 위험률을 갖는다. 지수분포를 쉽게 이해하기 위해 몇 가지 사례를 들어보면 다음과 같다. 전자제품이나 기계는 시간이 지날수록 고장 나지 않을 확률이 작아진다. 시간이 지날수록 휴대폰 배터리가 남아 있을 확률은 작아진다. 사람은 나이를 먹을수록 살아 있을 확률이 감소한다.

2.2.2 와이블 분포

지수분포의 일반화된 형태로 생존 분석에서 가장 많

이 활용되고 있는 분포이다. 위험률이 생존 시간의 승(power)에 비례한다. 누적 생존률의 계산은 지수모델과 비슷하나 관찰시간에 따라 사망률이 달라지므로 좀 더 유동성 있는 자료의 분석이 가능하다.

생존 시간에 대해 지수분포를 사용하는 것은 위험률(hazard rate)이 시간에 관계없이 일정하다고 가정하는 것인데 와이블 분포를 사용하면 시간에 따라 일정하지 않고 변하는 경우도 모형화할 수 있다. 와이블 분포의 확률밀도함수는 아래 식 (3)과 같다.

$$f(x;\gamma,\theta) = \frac{\gamma}{\theta} \left(\frac{x}{\theta}\right)^{\gamma-1} \exp\left\{-\left(\frac{x}{\theta}\right)^\gamma\right\}, \quad x > 0, \gamma > 0, \theta > 0 \quad (3)$$

한편, 위험 함수는 $\rho(x) = (\gamma/\theta)(x/\theta)^{\gamma-1}$ 로 주어지는데, $\gamma > 1$ 일 때, 위험 함수는 IFR이 되고 $\gamma < 1$ 일 때, DFR이 된다.

2.2.3 로그 정규 분포

생존기간의 분포가 대수정규분포, 대수선형정규분포를 따른다는 가정 하에서 사용한다. 어떤 확률변수에 자연로그(natural logarithm)를 취하면 정규분포가 되는 경우이다. 로그 정규 분포를 사용해 어떤 사건의 위험도가 급격히 증가했다가 급격히 낮아지는 것을 모형화할 수 있다. 예를 들어, 자동차를 구입하거나 이사(moving)를 가거나 하는 사건은 한 번 발생하고 나면 발생확률이 급격히 낮아질 것이다. 로그 정규 분포의 확률밀도함수는 아래 식 (4)와 같다.

$$f(x;\mu,\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\log x - \mu}{\sigma}\right)^2\right\}, \quad x > 0, -\infty < \mu < \infty, \sigma > 0 \quad (4)$$

로그 정규 분포의 위험 함수는 닫혀진 형태(closed form)로 표현되지는 않지만, 곡선의 형태는 굴곡진 모양(bump shape)을 갖는다.

2.2.4 감마분포

와이블 분포와 마찬가지로 지수분포의 일반화된 형태이다. 감마분포의 확률밀도함수는 아래 식 (5)와 같다.

$$f(x;\gamma,\lambda) = \frac{\lambda^\gamma}{\Gamma(\gamma)} x^{\gamma-1} e^{-\lambda x}, \quad x > 0, \gamma > 0, \lambda > 0 \quad (5)$$

즉, 지수분포는 감마분포에서 $\gamma=1$ 일 때의 특별한 경우가 된다. 또한, 위험 함수는 $\gamma>1$ 일 때, IFR이 되고 $\gamma<1$ 일 때, DFR이 된다.

2.3 베이지안 추론 방법

2.3.1 베이지안 모형 선택(bayesian model selection)

일반적인 고전적인 추론 방법은 우도함수에 의거하여서만 진행된다. 하지만 1990년을 기점으로 베이지안 접근방법으로의 추론문제는 많은 주목을 이끌어 왔다. 특별히 베이지안 검정법이나 모형 선택론은 [8]이 제안한 논문 이후로 많은 연구가 활발히 진행되고 있다. [9]는 두 개의 지수분포의 평균검정 세팅 하에서 [8]이 제안한 내재적 사전 분포(intrinsic prior)를 토출하였다. [10]은 내재적 사전 분포를 이용하여 여러 형태의 다중검정(multiple test) 문제를 다루었다. [11]은 진보적 중도 절단(progressive censoring)을 가정하여 와이블 분포에 대한 추론문제를 다루었다. 최근에 [12]는 육조곡선을 포함하여 유연한 형태를 갖는 일반화 와이블의 추론문제를 다루었다.

본 절에서는 베이지안 모형 선택의 방법론을 설명하고자 한다. q 개의 서로 다른 모형을 M_1, \dots, M_q 라 하자. 이 q 개의 모형 중에서 데이터가 가장 잘 적합되는 모형을 찾고자 한다. 이제 M_i 모형 하에서의 확률밀도함수를 $f_i(\mathbf{x}|\theta_i)$ 라 하고 여기서 θ_i 는 모수이다. 베이지안 세팅 하에서는 모수가 확률변수이므로 어떤 분포를 가지는데, 이 분포를 사전 분포(prior distribution)라 하고 밀도함수를 $\pi_i(\theta_i)$ 라 하자. 한편 자료를 관측하기 전에 각 모형들이 사실이라고 믿는 확률을 사전모형확률(prior model probability)라 하고 $p(M_i)$ 로 나타내자. 모형 M_i 가 사실이라고 여길 수 있는 사후모형확률(posterior model probability)이라 하고 아래 식 (6)으로 표현된다.

$$P(M_i|\mathbf{x}) = \left[\sum_{j=1}^q \frac{p(M_j)}{p(M_i)} B_{ji}(\mathbf{x}) \right]^{-1} \quad (6)$$

여기서 $B_{ji}(\mathbf{x})$ 를 베이즈요인(Bayes factor)이라 하고

$$B_{ji}(\mathbf{x}) = \frac{\int f_j(\mathbf{x}|\theta_j)\pi_j(\theta_j)d\theta_j}{\int f_i(\mathbf{x}|\theta_i)\pi_i(\theta_i)d\theta_i} \quad (7)$$

으로 정의된다. 따라서 식 (6)에 있는 사후모형확률이 가장 큰 모형을 가장 그럴듯한(most plausible) 모형이라고 확정할 수 있다.

2.3.2 베이지안 추정(bayesian estimation)

우도함수(likelihood function)를 $L(\theta)$ 라 하면 사후 분포(posterior distribution)는

$$p(\theta|\mathbf{x}) = \frac{L(\theta)\pi(\theta)}{\int L(\theta)\pi(\theta)d\theta} \propto L(\theta)\pi(\theta). \quad (8)$$

일반적으로 베이즈 추정량(Bayes estimator)은 사후 평균(posterior mean)을 이용하는데, 사후분포의 기댓값이 된다. 즉,

$$\hat{\theta} = E[\theta|\mathbf{x}] = \frac{\int \theta L(\theta)\pi(\theta)d\theta}{\int L(\theta)\pi(\theta)d\theta}. \quad (9)$$

3. 결과 및 고찰

3.1 모의실험을 통한 모형 선택 비교

그림 2는 2.2절에서 설명한 4개의 모형들에 대하여 위험 함수를 그린 것이다. 지수분포의 위험 함수는 시간에 상관없이 일정한 상수값을 갖고 와이블 분포의 경우 형태모수가 0.8, 감마분포의 경우 2의 값을 주어 각각 DFR과 IFR의 형태를 띠고 있음을 알 수 있다. 한편 로그 정규 분포의 경우 앞쪽에서 굴곡이 있는 형태를 가짐을 볼 수 있다.

본 절에서는 4개의 분포에서 표본수가 40인 랜덤변량을 추출하여 실제모형을 얼마나 채택하는지 여부를 계산하였다. 총 200회를 반복하여 그 중에 실제모형을 선택하는 횟수를 계산하였다. 모형 선택의 기준으로는 2.3.1절에서 설명한 베이즈요인을 이용하여 계산하였다. 베이즈요인을 계산하기 위해서는 사전 분포를 가정하여야 하는데, 본 논문에서는 [13]이 제안한 제프리의 사전 분포를 이용하였다. 즉, 지수분포의 경우 $\pi(\theta) = 1/\theta$, $\theta > 0$, 와이블 분포의 경우 $\pi(\gamma, \theta) = 1/(\gamma\theta)$, $\gamma > 0$, $\theta > 0$ 를 이용하였다. 감마분포의 경우 계산상의 편의를 위하여 형태모수인 γ 를 2로 고정하였다. 따라서 사전 분포는

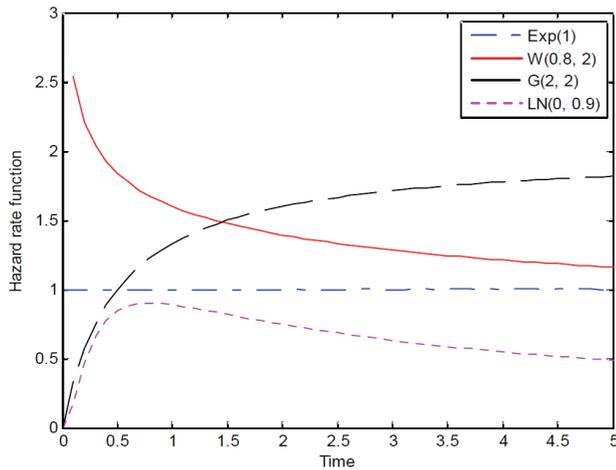


Fig. 2. Plots for hazard functions.

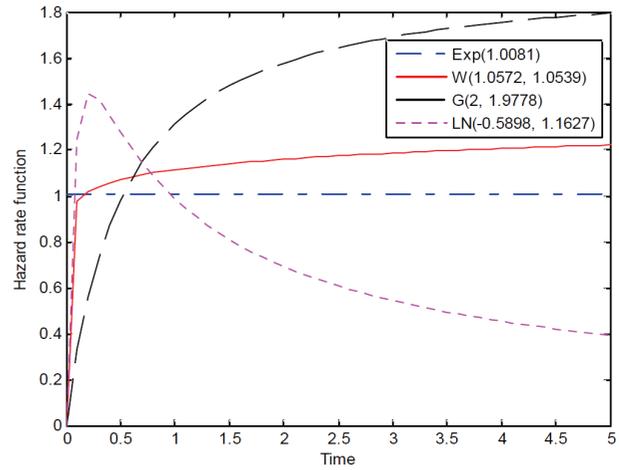


Fig. 3. Plots for hazard functions based on the bayes estimates.

Table 1. The samples are generated from an exponential distribution with $\theta=1$.

	Number of counts	Bayes estimate (posterior mean)
Exponential distribution	157	$\hat{\theta}=1.0081$
Weibull distribution	22	$\hat{\gamma}=1.0572, \hat{\theta}=1.0539$
Gamma distribution	3	$\hat{\lambda}=1.9778$
Lognormal distribution	18	$\hat{\mu}=-0.5898, \hat{\sigma}=1.1627$

Table 2. The samples are generated from a weibull distribution with $\gamma=0.8, \theta=2$.

	Number of counts	Bayes estimate (posterior mean)
Exponential distribution	56	$\hat{\theta}=2.2483$
Weibull distribution	102	$\hat{\gamma}=0.7540, \hat{\theta}=1.9919$
Gamma distribution	0	N/A
Lognormal distribution	42	$\hat{\mu}=-1.5671, \hat{\sigma}=1.4337$

$\pi_3(\lambda) = 1/\lambda, \lambda > 0$ 이 된다. 마지막으로 로그 정규 분포의 사전 분포는 $\pi_4(\mu, \sigma) = 1/\sigma, -\infty < \mu < \infty, \sigma > 0$ 를 이용하였다.

표 1은 $\theta=1$ 인 지수분포에서 생성된 모의 자료의 결과를 나타낸 것이다. 채택률은 78.5%로 나타났고, 베이스 추정량의 평균은 실제 값과 매우 가까운 것을 알 수 있다. 그림 3은 각 모형의 평균 베이스 추정량을 이용하여 위험 함수를 그린 것이다. 와이블 분포를 실제 분포로 가정하여 모의실험한 결과는 표 2에 나타나 있다. 이 결과는 와이블 분포에서 $\gamma=0.8, \theta=2$ 인 경우이다. 지수분포와 달리 채택률이 조금 떨어지는 결과를 얻었다. 이유는 형태모수의 영향으로 인하여 랜덤변량이 지수분포에서 생성되는 경우가 발생한 것에 기인한 것으로 생각된다. 하지만, 102번을 기준으로 한 평균 베이스 추정량은 실제 값과 비슷해짐을 알 수 있다. 한편, 감마분포를 채택하는 경우가 한 번도 없는 것이 조금 이채롭다. 아마도 와이블 분포와 감마분포는

전혀 중첩되지 않는(nonnested) 형태를 갖고 있는데, 이것에 기인한 것으로 추측된다. 감마분포를 가정하고 생성된 자료의 결과는 표 3에 정리되어 있다. 채택률은 68% 정도로 나왔고, 모수의 평균추정량의 값도 실제값과 매우 가까운 것으로 나타났다. 나머지 분포를 선택하는 경우는 다양하게 나타났으나 한 쪽으로 편향된 형태를 보이고 있지는 않다. 마지막으로 표 4는 로그 정규 분포에서 추출된 모의 자료의 결과를 보여준다. 와이블 분포를 선택하는 경우는 한 번도 없었다. 하지만 지수분포를 선택하는 경우가 상당히 높을 것을 알 수 있다. 그림 6에서 볼 수 있듯이 로그 정규 분포의 경우 작은 x 값에 해당하는 위험 함수의 값은 약간의 굴곡을 보이다가 그 이후로는 일정한 값의 형태를 띠는 것이 지수함수의 위험 함수 형태와 같아짐을 볼 수 있다. 이러한 이유로 채택률이 다른 경우와는 달리 상당히 낮게 나온 이유로 생각된다. 하지만, 베이스 추정량은 실제값과 큰 차이를 보이지 않았다.

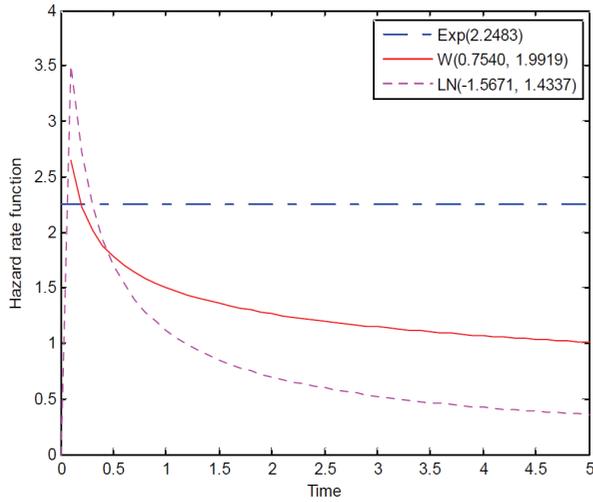


Fig. 4. Plots for hazard functions based on the bayes estimates.

Table 3. The samples are generated from a gamma distribution with $\lambda = 2$.

	Number of counts	Bayes estimate (posterior mean)
Exponential distribution	5	$\hat{\theta} = 0.9887$
Weibull distribution	32	$\hat{\gamma} = 1.7172, \hat{\theta} = 0.8841$
Gamma distribution	136	$\hat{\lambda} = 2.0279$
Lognormal distribution	27	$\hat{\mu} = -0.2644, \hat{\sigma} = 0.7168$

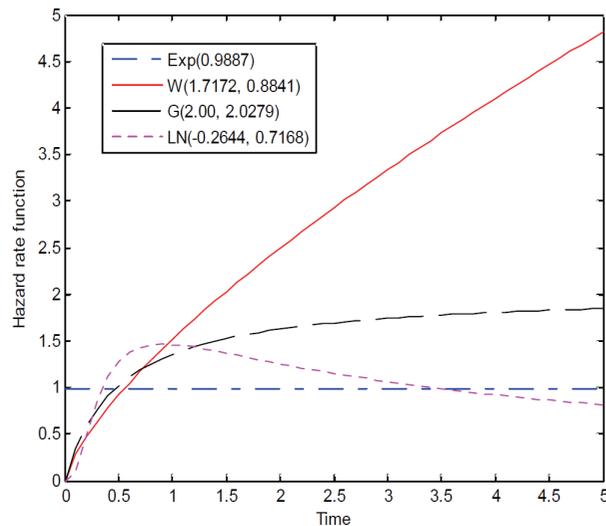


Fig. 5. Plots for hazard functions based on the Bayes estimates.

Table 4. The samples are generated from a log-normal distribution with $\mu = 0, \sigma = 0.9$.

	Number of counts	Bayes estimate (posterior mean)
Exponential distribution	90	$\hat{\theta} = 0.6270$
Weibull distribution	0	N/A
Gamma distribution	11	$\hat{\lambda} = 1.7415$
Lognormal distribution	99	$\hat{\mu} = -0.1113, \hat{\sigma} = 0.9076$

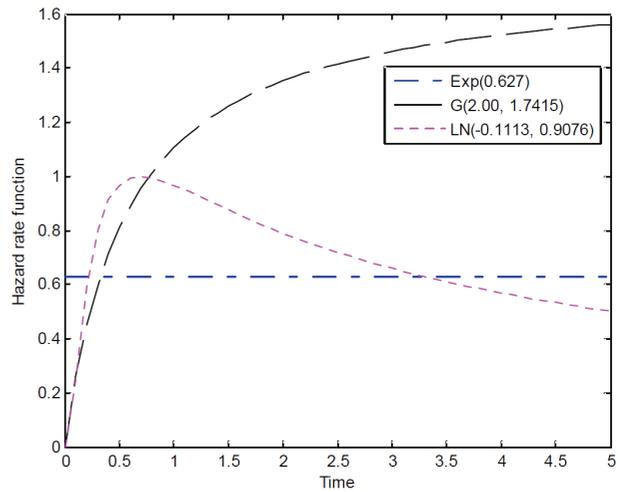


Fig. 6. Plots for hazard functions based on the Bayes estimates.

4. 결론

본 연구에서는 기존의 자기애자 수명 평가의 모형으로 가장 많이 쓰였던 와이블 분포와 신뢰성과 생존 분석에 자주 쓰이는 몇 가지 다른 모형들에 대한 이론적 성질과 위험 함수의 형태를 고찰하였다. 실제 자료가 어떤 분포를 따르는지 알 수가 없기 때문에 다양한 모의실험을 통하여 각 분포들의 적절성을 타진하였다. 기존 고전적 방법이 아닌 베이지안 방법론을 적용하여 모형 선택론과 모수 추정 문제를 다루었다. 본 논문에서 언급한 방법론은 열화된 자기 애자의 물리적 특성 분석 후 얻을 수 있는 실자료 분석에 유용하게 이용될 수 있을 것으로 생각된다. 본 논문에서는 생존 분석이나 신뢰성 자료에서 나타날 수 있는 중도 절단은 가정하지 않고 완전 표본에 의거한 결과들만 보여주고 있

다. 중도 절단 자료에 대한 분석 방법론은 추후 연구 과제로 남기고자 한다.

REFERENCES

- [1] J. H. Park, B. K. Kang, I. H. Choi, D. I. Lee, H. K. Bang, and J. I. Hwang, *Proc. the KIEE 38th Summer Annual Conference* (KIEE, Yongpyong, 2007) p. 729.
- [2] I. N. Choi, J. H. Choi, T. W. Sin, and D. L. Lee, *Proc. the KIEE Spring Annual Conference* (KIEE, 2005) p. 65.
- [3] I. H. Choi, J. H. Choi, D. I. Lee, Y. G. Choi, H. G. Cho, S. W. Han, and Y. C. Park, *J. Korean Inst. Electr. Electron. Mater. Eng.*, **18**, 96 (2005).
- [4] H. G. Cho, D. H. Han, and I. H. Choi, *Bull. of the Korean Inst. of Electr. and Electron. Mater. Eng.*, **17**, 32 (2004).
- [5] W. K. Lee, I. H. Choi, K. C. Hwang, and H. Y. Choi, *Proc. the KIEE 39th Summer Annual Conference 2008* (KIEE, Yongpyeong, 2008) p. 462.
- [6] E. L. Kaplan and P. Meier, *J. American Stat. Soc.*, **53**, 457 (1958).
- [7] J. P. Klein and M. L. Moeschberger, *Survival Analysis* (Springer, New York, 2003).
- [8] J. O. Berger and L. R. Pericchi, *J. American Stat. Soc.*, **91**, 109 (1996).
- [9] S. W. Kim, *Stat. and Prob. Letters*, **46**, 195 (2000). [DOI: [https://doi.org/10.1016/S0167-7152\(99\)00106-6](https://doi.org/10.1016/S0167-7152(99)00106-6)]
- [10] S. W. Kim and D. Sun, *Lifetime Data Anal.*, **6**, 251 (2000). [DOI: <https://doi.org/10.1023/A:1009641709382>]
- [11] D. Kundu, *Technometrics*, **50**, 144 (2008). [DOI: <http://dx.doi.org/10.1198/004017008000000217>]
- [12] S. G. Park and J. H. Park, *Commun. stat., Theory Methods* (2016). [DOI: <http://dx.doi.org/10.1080/03610926.2015.1118509>]
- [13] H. Jeffreys, *The Theory of Probability* (OUP Oxford, UK, 1998).