

회로망 기반의 시간응답 해석에 따른 고전제어와 현대제어의 비교 연구

민용기*

Comparative Study on Classical Control and Modern Control via Analysis of Circuit-based Time Response

Yong-Ki Min*

요 약

제어시스템의 시간응답을 해석하기 위해 전기회로망을 제안한다. 전달함수와 상태방정식을 이용해 시스템의 시간응답을 계산함으로써 고전제어와 현대제어의 연계성을 분석한다. 상태전이방정식의 복잡한 적분과정을 생략하고, 상태전이행렬과 전달함수의 조합만으로도 시간응답의 해석이 가능함을 제시한다. 단위계단함수와 정현과입력에 따른 전압-전류의 출력응답을 표현하기 위해 프로그램을 코딩하였다. 단위계단입력에서는 과도응답을 해석하였으며, 정현과입력에서는 전압과 전류의 위상차를 해석하였다. 제안된 내용을 과도응답이나 상태공간에 기술함으로써 제어공학의 이해도와 설계능력을 높인다.

ABSTRACT

It is suggested the circuit network to analyze the time response of control system. And it is analyzed the interrelation for classical control and modern control by the transfer function and the state equation. Without complicated integration of state transition equation, it is suggested to possible time response by combining the state transition matrix and the transfer function. A source program is coded to display the time response according to the unit-step and the sinusoidal input. Transient response is analyzed in the unit-step input and phase difference between current and voltage is analyzed in sinusoidal input. As writing the suggested contents in transient response or state-space analysis, it is improved the understanding for control engineering and ability for system design.

키워드

Transfer Function, State Equation, State Transient Equation, Time Response
전달 함수, 상태 방정식, 상태 전이 방정식, 시간 응답

1. 서론

일반적으로 제어는 칼만의 상태방정식을 전후해 고전제어와 현대제어로 분류한다. 고전제어란 입력에 따른 출력응답의 비를 전달함수로서 해석하며, 단일 입

출력 시스템의 해석에 유리하다. 하지만 초기조건이 존재하거나 다중 입출력 시스템에 대해서는 출력응답을 얻기가 어렵다는 단점이 있다[1-2]. 현대제어란 시스템의 내부 상태를 상태공간에 기초하여 해석하는 방법이다. 그에 따라 초기조건이 존재하거나 다중 입

* 교신저자 : 광주대학교 전기공학부

• 접수일 : 2017. 05. 30

• 수정완료일 : 2017. 07. 13

• 게재확정일 : 2017. 08. 01

• Received : May 30, 2017, Revised : July 13, 2017, Accepted : Aug 01, 2017

* Corresponding Author : Yong-Ki Min

School of Electrical Engineering, Gwangju University

E-mail : yongmin@gwangju.ac.kr

출력을 갖는 시스템의 출력응답 해석에는 유리하지만, 계산이 복잡해진다는 단점이 있다[3-7].

제어시스템의 설계는 전달함수와 상태공간의 이해로부터 시작한다. 더불어 설계능력 향상을 위해서는 전달함수와 상태방정식은 물론, 연계성까지도 이해할 수 있어야 한다. 자동제어 문헌에서는 전달함수와 상태방정식의 장단점 및 연계성 등을 기술하고 있으나, 내용에 다소의 차이가 있다. 일부 문헌은 전달함수는 기술하되, 상태공간의 동적방정식만을 기술함으로써 초기조건 문제를 여전히 안고 있다[8-13]. 일부는 상태천이행렬과 초기조건으로써 상태방정식의 제차미분방정식 해를 제시하고 있으나, 전달함수와 연계성을 보여주는데 한계가 있다[14-15].

다수의 문헌이 상태천이방정식을 이용해 상태방정식의 해를 정의함으로써 초기조건까지 포함된 출력응답을 기술하고 있다. 그러나 상태공간만의 해석으로 인해 전달함수와의 구체적인 연계성을 제시하는데 한계가 있다[14-20]. 또한 상태방정식을 라플라스 변환하여 전달함수를 정의하고 있으나, 전달함수와 상태천이방정식의 출력응답이 어떻게 연관되는지를 제어시스템으로써 해석하지는 않는다. 따라서 제어시스템을 모델링하고, 전달함수와 상태방정식을 이용해 출력응답을 해석함으로써, 그 연계성을 분석해 보는 것이 필요하다[21-25].

본 논문에서는 전달함수와 상태방정식이 갖는 장단점 및 연계성을 분석하기 위해 전기회로망을 제안한다. 전달함수에서는 단위계단입력에 따른 시스템의 과도응답과, 정현파입력에 따른 전압과 전류의 위상차를 해석한다. 상태방정식에서는 입력이 0인 제차미분방정식의 해를 상태천이행렬로 정의해 초기조건이 출력응답에 미치는 영향을 분석한다. 또한 제안된 시스템을 상태천이방정식으로 해석하여 전달함수와의 차이점을 분석하고, 자동제어 문헌이 기술하지 않는 상호연계성을 구체적으로 제시한다. 상태방정식에서도 단위계단입력과 정현파입력에 따른 출력응답을 제시함으로써 시스템 해석의 범위를 정현파까지 확장한다.

II. 전달함수에 의한 시간응답 해석

전달함수와 상태방정식을 이용하여 제어시스템의

시간응답을 해석하기 위해 그림 1과 같은 RLC 회로망을 제안한다. 입력 $v(t)$ 에는 단위계단함수나 정현파 전압이 인가되며, 커패시턴스에 0.5[V]의 초기전압이 존재하는 것으로 가정한다. 출력으로 정의될 수 있는 변수는 전류 $i(t)$, 인덕턴스 전압 $v_L(t)$, 커패시턴스 전압 $v_C(t)$ 가 된다.

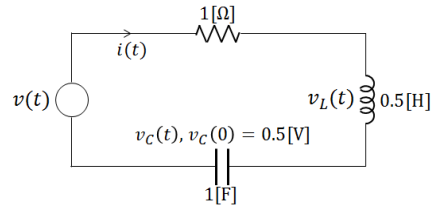


그림 1. 시스템 모델링을 위한 회로망
Fig. 1 Circuit network for system modeling

2.1 단위계단입력에 따른 시간응답

단위계단입력에 대해 전류를 출력응답으로 하는 회로방정식을 정의한다.

$$v(t) = i(t) + 0.5 \frac{di(t)}{dt} + \int_0^t i(t) dt \quad (1)$$

회로방정식을 라플라스 변환하여 입력전압에 대한 전류의 비를 전달함수로서 정의한다. 이때에 초기조건은 반영되지 않는다.

$$\frac{I(s)}{V(s)} = \frac{1}{1 + 0.5s + 1/s} \quad (2)$$

입력이 단위계단함수로 정의된 직류전압이다. 따라서 출력응답인 전류 $I(s)$ 가 s -축에서의 변위를 갖도록 정현파로 정의한다.

$$I(s) = \frac{2s}{s(s^2 + 2s + 2)} = \frac{2}{(s+1)^2 + 1} \quad (3)$$

따라서 시간영역의 전류 $i(t)$ 는 지수감쇠를 갖는 정현파가 된다.

$$i(t) = 2e^{-t} \sin t \quad (4)$$

출력응답에서 직류전압이 인가된 회로망의 전류는 0으로 수렴하나, 0.707의 제동비에 의해 미세한 오버슈트가 존재한다. 해석된 응답파형을 표현하기 위해 VS-2008 소프트웨어를 이용하였으며, 그림 2에 전류의 응답파형을 도시하였다.

회로방정식에서 단위계단입력에 대한 커패시턴스 전압의 비를 전달함수로서 정의한다.

$$\frac{V_C(s)}{V(s)} = \frac{2}{s^2 + 2s + 2} \quad (5)$$

입력이 단위계단함수로 정의된 직류전압이므로 커패시턴스 전압 $V_C(s)$ 는 부분분수로 전개할 수 있으며, 미정계수법을 이용해 매개변수를 계산한다.

$$\begin{aligned} V_C(s) &= \frac{2}{s(s^2 + 2s + 2)} \\ &= \frac{1}{s} + \frac{-s-2}{(s+1)^2 + 1} \end{aligned} \quad (6)$$

커패시턴스 전압을 s -축에서의 변위를 갖는 정현파로 정의한다.

$$V_C(s) = \frac{1}{s} - \frac{s+1}{(s+1)^2 + 1} - \frac{1}{(s+1)^2 + 1} \quad (7)$$

시간영역의 커패시턴스 전압 $v_C(t)$ 는 지수감쇠를 갖는 정현파가 된다.

$$v_C(t) = 1 - 1.41e^{-t} \sin(t + 45) \quad (8)$$

출력응답에서 직류전압이 인가된 커패시턴스 전압은 1로 수렴하며, 응답파형을 그림 2에 도시하였다.

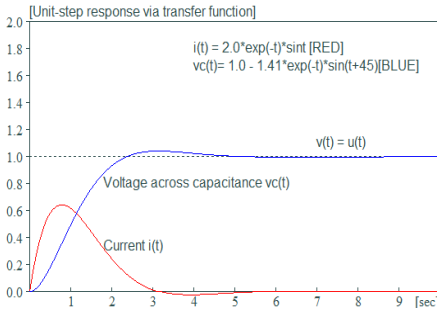


그림 2. 전달함수를 통한 단위계단응답
Fig. 2 Unit-step response via transfer function

전달함수를 이용한 시스템의 출력응답 해석에서는 초기조건이 무시되었다. 그림 2에서 보면 커패시턴스의 초기전압 $v_C(0) = 0.5[V]$ 가 출력응답에 반영되지 않고 있으며, 그에 따라 응답파형은 0부터 시작한다. 또한 커패시턴스에 전압 충전이 완료될 때까지는 전류가 흐르지만, 충전이 완료된 이후는 더 이상 전류가 흐르지 않는다.

2.2 정현파입력에 따른 시간응답

회로방정식의 라플라스 변환으로부터 정현파입력에 대한 전류의 비를 전달함수로써 해석한다. 식 (2)로부

터 정리된 전류 $I(s)$ 는 부분분수로 표현된다.

$$\begin{aligned} I(s) &= \frac{2s}{(s^2 + 2s + 2)(s^2 + 1)} \\ &= \frac{(2s+4)/5}{s^2 + 1} + \frac{(-2s-8)/5}{s^2 + 2s + 2} \end{aligned} \quad (9)$$

전류 $I(s)$ 를 정현파와 s -축에서의 변위를 갖는 정현파로 정의한다.

$$I(s) = \frac{2}{5} \left\{ \frac{s+2}{s^2 + 1} - \frac{s+1+3}{(s+1)^2 + 1} \right\} \quad (10)$$

시간영역의 전류 $i(t)$ 는 정현파와 지수감쇠를 갖는 정현파의 조합으로 구성된다.

$$\begin{aligned} i(t) &= 0.89 \sin(t + 26.57) \\ &\quad - 1.26e^{-t} \sin(t + 18.26) \end{aligned} \quad (11)$$

정현파입력에서는 입력과 출력의 위상차가 존재한다. 출력응답에서 지수감쇠를 갖는 정현파 전류는 0으로 수렴하지만, 정현파 성분만의 전류는 입력보다 26.57°만큼 앞선 위상을 갖는다. 정현파입력에 따른 전류의 응답파형을 그림 3에 도시하였다.

식 (5)로부터 정현파입력에 따른 커패시턴스 전압 $V_C(s)$ 를 출력으로 설정하고, 그에 따른 전달함수를 정의한다.

$$\begin{aligned} V_C(s) &= \frac{2}{(s^2 + 2s + 2)(s^2 + 1)} \\ &= \frac{(-4s+2)/5}{s^2 + 1} + \frac{(4s+6)/5}{s^2 + 2s + 2} \end{aligned} \quad (12)$$

커패시턴스 전압을 정현파와 s -축에서의 변위를 갖는 정현파의 조합으로 정리한다.

$$V_C(s) = \frac{4}{5} \left\{ \frac{-s+0.5}{s^2 + 1} - \frac{s+1+0.5}{(s+1)^2 + 1} \right\} \quad (13)$$

시간영역의 커패시턴스 전압 $v_C(t)$ 는 정현파와 지수감쇠를 갖는 정현파의 조합으로 구성된다.

$$\begin{aligned} v_C(t) &= 0.89 \sin(t - 63.43) \\ &\quad + 0.89e^{-t} \sin(t + 63.43) \end{aligned} \quad (14)$$

출력응답에서 지수감쇠를 갖는 커패시턴스 전압은 0으로 수렴하지만, 정현파 성분만의 커패시턴스 전압은 입력에 비해 63.43°만큼 뒤진 위상을 갖는다. 정현파입력에 따른 커패시턴스 전압의 응답파형을 그림 3에 도시하였다

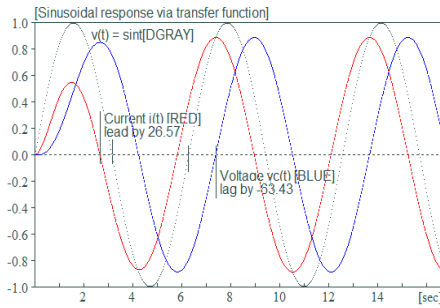


그림 3. 전달함수를 통한 정현파응답
Fig. 3 Sinusoidal response via transfer function

정현파입력에 따른 출력응답도 초기조건이 반영되지 않아 응답파형은 0부터 시작한다. 초기 응답파형은 인과관계에 의해 모든 위상이 입력보다 뒤진다. 그러나 시간이 경과함에 따라 전류는 입력전압보다 26.57°만큼 앞선 위상을 가지며, 커패시턴스 전압은 입력전압에 비해 63.43°만큼 뒤진 위상을 갖는다. 따라서 전압과 전류의 위상차는 정확하게 90°가 된다.

III. 상태방정식에 의한 시간응답 해석

전달함수를 이용한 시스템 해석에서는 초기조건을 출력응답에 반영할 수 없었다. 따라서 초기조건 문제를 해결하는 방안으로써 상태방정식이 제안되었다. 제안된 전기회로망을 상태방정식으로 표현하기 위해 2개의 상태변수를 정의한다.

$$x_1(t) = v_C(t) = \int_0^t i(t) dt \quad (15)$$

$$x_2(t) = \dot{x}_1(t) = i(t) \quad (16)$$

정의된 상태변수를 식 (1)의 회로방정식과 연계시켜 상태방정식으로 표현한다.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} v(t) \quad (17)$$

초기조건으로써 커패시턴스 초기전압을 0.5[V]로 정의하였으며, 정리된 상태방정식은 벡터행렬이 조합된 미분방정식으로 표현된다.

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (18)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}, u(t) = v(t)$$

상태방정식의 해 $x(t)$ 를 얻기 위해 입력을 0으로

가정한 제차미분방정식의 일반해와, 초기조건을 0으로 가정한 비제차미분방정식의 특해를 계산하여 출력응답을 해석한다.

3.1 상태천이행렬과 상태천이방정식

상태방정식의 입력을 $u(t) = 0$ 으로 가정한 제차미분방정식의 해는 초기조건만으로 결정된다.

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{(sI - A)^{-1}\}x(0) = \phi(t)x(0) \quad (19)$$

여기서 $\phi(t)$ 는 상태천이행렬이라고 한다. 제안된 회로망의 상태천이행렬을 얻기 위해 역행렬을 계산한다.

$$(sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{s+2}{s^2+2s+2} & \frac{1}{s^2+2s+2} \\ -2 & s \end{bmatrix} \quad (20)$$

분모가 s -축에서의 변위를 갖도록 변경한 다음에, 상태천이행렬을 계산한다.

$$\phi(t) = e^{-t} \begin{bmatrix} \cos t + \sin t & \sin t \\ -2\sin t & \cos t - \sin t \end{bmatrix} \quad (21)$$

초기조건과 입력이 모두 반영된 해를 얻기 위하여 상태방정식을 라플라스 변환한다.

$$X(s) = (sI - A)^{-1}x(0) + (sI - A)^{-1}B U(s) \quad (22)$$

시간영역에 대한 상태방정식의 해 $x(t)$ 는 초기조건과 상태천이행렬의 조합 및 합성적분으로 구성되며, 이를 상태천이방정식이라 한다.

$$x(t) = \phi(t)x(0) + \int_0^t \phi(t-\tau)B u(\tau) d\tau = x_H(t) + x_P(t) \quad (23)$$

여기서 $x_H(t)$ 는 입력이 0인 제차미분방정식의 일반해이며, $x_P(t)$ 는 초기조건이 0인 비제차미분방정식의 특해이다.

3.2 단위계단입력에 따른 시간응답

식 (17)로부터 커패시턴스 전압을 상태변수1로, 전류를 상태변수2로 정의해 상태방정식을 정리한다.

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_C(t) \\ \dot{i}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_C(t) \\ i(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} v(t) \quad (24)$$

제안된 회로망의 상태천이행렬과 초기조건을 결합하여 제차미분방정식의 해를 정리한다.

$$\begin{bmatrix} v_{CH}(t) \\ i_H(t) \end{bmatrix} = e^{-t} \begin{bmatrix} \cos t + \sin t & \sin t \\ -2\sin t & \cos t - \sin t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (25)$$

여기서 $v_{CH}(t)$ 와 $i_H(t)$ 는 초기조건만으로 정의된 제차미분방정식의 일반해로써 커패시턴스 전압과 전류이다.

$$\begin{aligned} v_{CH}(t) &= 0.5e^{-t}(\cos t + \sin t) \\ i_H(t) &= -e^{-t}\sin t \end{aligned} \quad (26)$$

초기조건만으로 해석된 커패시턴스 전압과 전류의 출력응답은 0으로 수렴한다. 이때 전류는 커패시턴스의 초기전압이 저항으로 방전되면서 흐르는 것이므로 전압원의 방향과 반대방향이 된다. 초기조건에 의한 커패시턴스 전압과 전류의 응답파형을 그림 4에 도시하였다.

식 (23)의 상태천이방정식으로부터 초기조건을 0으로 가정한 비제차미분방정식의 특해를 정의한다.

$$\begin{bmatrix} v_{CP}(t) \\ i_P(t) \end{bmatrix} = \int_0^t \begin{bmatrix} 2e^{-(t-\tau)} \sin(t-\tau) \\ 2e^{-(t-\tau)} \{\cos(t-\tau) - \sin(t-\tau)\} \end{bmatrix} d\tau \quad (27)$$

여기서 $v_{CP}(t)$ 와 $i_P(t)$ 는 단위계단입력에 따른 커패시턴스 전압과 전류의 특해이다.

3.2.1 상태변수1 : 커패시턴스 전압

식 (27)로부터 단위계단입력에 따른 커패시턴스 전압의 특해 $v_{CP}(t)$ 를 정리한다.

$$\begin{aligned} v_{CP}(t) &= \int_0^t 2e^{-(t-\tau)} \sin(t-\tau) d\tau \\ &= 2e^{-t} \sin t \int_0^t e^{\tau} \cos \tau d\tau \\ &\quad - 2e^{-t} \cos t \int_0^t e^{\tau} \sin \tau d\tau \end{aligned} \quad (28)$$

특해에 포함된 적분들을 결과 중심으로 제시한다.

$$\int_0^t e^{\tau} \cos \tau d\tau = \frac{1}{2}(-1 + e^t \sin t + e^t \cos t) \quad (29a)$$

$$\int_0^t e^{\tau} \sin \tau d\tau = \frac{1}{2}(1 + e^t \sin t - e^t \cos t) \quad (29b)$$

식 (29a), (29b)를 식 (28)에 대입하여 직류입력에 따른 커패시턴스 전압 $v_{CP}(t)$ 를 계산한다.

$$v_{CP}(t) = 1 - 1.41e^{-t}\sin(t+45) \quad (30)$$

상태변수1로 정의된 커패시턴스 전압 $v_C(t)$ 는 초기조건만으로 동작되는 식 (26)과, 입력만으로 동작되는 식 (30)의 합으로 표현된다.

$$\begin{aligned} v_C(t) &= 0.5e^{-t}(\cos t + \sin t) \\ &\quad + 1 - 1.41e^{-t}\sin(t+45) \end{aligned} \quad (31)$$

시간영역의 커패시턴스 전압 $v_C(t)$ 는 초기조건에 의해 $t=0$ 에서 0.5[V]가 되며, 정현파의 지수감쇠에 따라 1로 수렴한다. 단위계단입력을 인가하고 상태천이방정식으로 해석한 커패시턴스 전압의 응답파형을 그림 4에 도시하였다.

3.2.2 상태변수2 : 전류

식 (27)로부터 단위계단입력에 따른 전류의 특해 $i_P(t)$ 를 정리한다.

$$\begin{aligned} i_P(t) &= \int_0^t 2e^{-(t-\tau)} \cos(t-\tau) d\tau - v_{CP}(t) \\ &= 2e^{-t} \left\{ \cos t \int_0^t e^{\tau} \cos \tau d\tau \right\} \\ &\quad + 2e^{-t} \left\{ \sin t \int_0^t e^{\tau} \sin \tau d\tau \right\} - v_{CP}(t) \end{aligned} \quad (32)$$

전류의 특해에는 커패시턴스 전압의 특해에서 계산되었던 적분들이 포함되어 있다. 따라서 커패시턴스 전압과 중복되지 않은 적분만을 제시한다.

$$\int_0^t e^{\tau} \cos \tau d\tau = \frac{1}{2}(-1 + e^t \sin t + e^t \cos t) \quad (33a)$$

$$\int_0^t e^{\tau} \sin \tau d\tau = \frac{1}{2}(1 + e^t \sin t - e^t \cos t) \quad (33b)$$

식 (33a), (33b)를 식 (32)에 대입하여 전류의 특해 $i_P(t)$ 를 계산한다.

$$i_P(t) = 2e^{-t} \sin t \quad (34)$$

상태변수2로 정의된 전류 $i(t)$ 는 초기조건으로 동작되는 식 (26)과, 입력으로 동작되는 식 (34)의 합으로 표현된다.

$$i(t) = -e^{-t} \sin t + 2e^{-t} \sin t \quad (35)$$

시간영역의 출력응답인 전류 $i(t)$ 는 지수감쇠 성분에 의해 0으로 수렴한다. 단위계단입력을 인가하고 상태천이방정식으로 해석한 전류의 응답파형을 그림 4에 도시하였다.

초기조건에 의해 동작되는 커패시턴스 전압과 전류는 0으로 수렴한다. 이는 커패시턴스에 충전되어 있던 초기전압이 저항을 통해 방전되기 때문이며, 전류는 반대방향이 된다. 상태천이방정식으로 해석된 커패시턴스 전압은 $t=0$ 에서 0.5[V]가 되며, 단위계단입력으로 수렴하게 된다. 또한 초기조건을 입력전압의 1/2

로 정의함에 따라 커패시턴스 전압과 전류는 대칭적으로 표현된다.

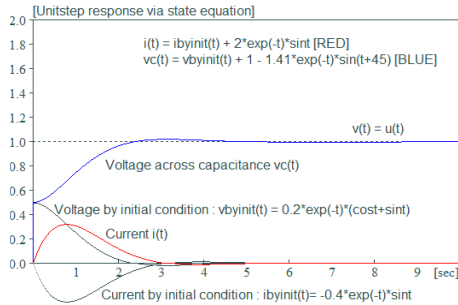


그림 4. 상태방정식을 통한 단위계단응답
Fig. 4 Unit-step response via state equation

3.3 정현파입력에 따른 시간응답

상태천이방정식에서 제차미분방정식의 일반해는 단위계단입력과 동일하다. 따라서 초기조건을 0으로 가정한 비제차미분방정식의 특해만을 정리한다.

$$\begin{bmatrix} v_{CP}(t) \\ i_P(t) \end{bmatrix} = \int_0^t \begin{bmatrix} 2e^{-(t-\tau)} \sin(t-\tau) \\ 2e^{-(t-\tau)} \{ \cos(t-\tau) - \sin(t-\tau) \} \end{bmatrix} \sin \tau d\tau \quad (36)$$

여기서 $v_{CP}(t)$ 와 $i_P(t)$ 는 정현파입력에 따른 커패시턴스 전압과 전류의 특해이다.

3.3.1 상태변수1 : 커패시턴스 전압

식 (36)으로부터 정현파입력에 따른 커패시턴스 전압의 특해 $v_{CP}(t)$ 를 정리한다.

$$\begin{aligned} v_{CP}(t) &= \int_0^t 2e^{-(t-\tau)} \sin(t-\tau) \sin \tau d\tau \quad (37) \\ &= e^{-t} \sin t \int_0^t e^{\tau} \sin 2\tau d\tau - e^{-t} \cos t \int_0^t e^{\tau} d\tau \\ &\quad + e^{-t} \cos t \int_0^t e^{\tau} \cos 2\tau d\tau \end{aligned}$$

특해에 포함된 적분들을 제시한다.

$$\int_0^t e^{\tau} \sin 2\tau d\tau = \frac{2}{5} + \frac{1}{5} e^t \sin 2t - \frac{2}{5} e^t \cos 2t \quad (38a)$$

$$\int_0^t e^{\tau} \cos 2\tau d\tau = -\frac{1}{5} + \frac{2}{5} e^t \sin 2t + \frac{1}{5} e^t \cos 2t \quad (38b)$$

식 (38a), (38b)를 식 (37)에 대입하여 커패시턴스 전압의 특해 $v_{CP}(t)$ 를 계산한다.

$$v_{CP}(t) = 0.89 \sin(t - 63.43) + 0.89 e^{-t} \sin(t + 63.43) \quad (39)$$

상태변수1로 정의된 커패시턴스 전압 $v_C(t)$ 는 초기조건에 의한 식 (26)과, 입력에 따른 식 (39)의 합으로써 표현된다.

$$v_C(t) = 0.5(e^{-t} \cos t + e^{-t} \sin t) + 0.89 \sin(t - 63.43) + 0.89 e^{-t} \sin(t + 63.43) \quad (40)$$

시간영역의 커패시턴스 전압 $v_C(t)$ 는 $t=0$ 에서 0.5[V]가 되며, 입력전압에 비해 63.43°만큼 뒤진 위상을 갖는다. 정현파입력에 대한 커패시턴스 전압의 응답파형을 그림 5에 도시하였다.

3.3.2 상태변수2 : 전류

식 (36)으로부터 정현파입력에 따른 전류의 특해 $i_P(t)$ 를 정리한다.

$$\begin{aligned} i_P(t) &= \int_0^t 2e^{-(t-\tau)} \{ \cos(t-\tau) - \sin(t-\tau) \} \sin \tau d\tau \quad (41) \\ &= e^{-t} \cos t \left(\int_0^t e^{\tau} \sin 2\tau d\tau + \int_0^t e^{\tau} d\tau - \int_0^t e^{\tau} \cos 2\tau d\tau \right) \\ &\quad + e^{-t} \sin t \left(\int_0^t e^{\tau} d\tau - \int_0^t e^{\tau} \cos 2\tau d\tau - \int_0^t e^{\tau} \sin 2\tau d\tau \right) \end{aligned}$$

전류의 특해에 포함된 적분은 커패시턴스 특해에서 계산했던 적분형태와 같다. 따라서 식 (38)을 이용해 전류의 특해 $i_P(t)$ 를 계산한다.

$$i_P(t) = 0.89 \sin(t + 25.67) - 1.26 e^{-t} \sin(t + 18.26) \quad (42)$$

상태변수2로 정의된 전류 $i(t)$ 는 식 (26)과 (42)의 합으로써 표현된다.

$$i(t) = 0.5(e^{-t} \cos t + e^{-t} \sin t) + 0.89 \sin(t + 25.67) - 1.26 e^{-t} \sin(t + 18.26) \quad (43)$$

출력응답인 전류 $i(t)$ 는 $t=0$ 에서 0.5[A]가 되며, 입력전압에 비해 26.57°만큼 앞선 위상을 갖는다. 정현파입력에 대해 상태천이방정식으로 해석된 전류의 응답파형 $i(t)$ 를 그림 5에 도시하였다.

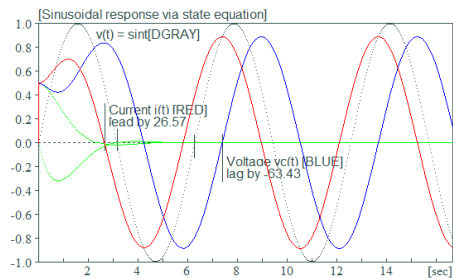


그림 5. 상태방정식을 통한 정현파응답
Fig. 5 Sinusoidal response via state equation

정현파입력에 따른 커패시턴스 전압과 전류는 초기 조건에 의해 $t=0$ 에서 $0.5[V]$ 와 $0.5[A]$ 가 된다. 그러나 시간이 경과하면 전류는 전압보다 26.57° 만큼 앞선 위상을 가지며, 커패시턴스 전압은 입력에 비해 63.43° 만큼 뒤진 위상을 갖는다. 따라서 시간응답 해석에 따른 전압과 전류의 위상차는 90° 가 된다.

IV. 전달함수와 상태방정식의 비교

고전제어와 현대제어의 연계성을 분석할 목적으로 전기회로망을 제안하였다. 단위계단함수와 정현파를 회로망에 입력하여 전류와 커패시턴스 전압을 전달함수와 상태천이방정식으로 해석하였다. 또한 초기조건과 인가되는 입력에 따른 출력응답의 결과를 표현하기 위해 VS-2008 소프트웨어를 이용하였다.

식 (2)와 (5)로 정의된 전달함수 해석에서는 초기조건을 시스템의 시간응답에 반영하지 못하는 단점이 있다. 그러나 전달함수의 특성방정식을 s -축에서의 변위를 갖는 정현파 형태로 변경하면, 보다 쉽게 시간영역의 출력응답을 얻을 수 있다는 장점이 있다.

상태방정식은 시스템의 초기조건까지 반영하여 시간응답을 해석할 수 있다는 장점이 있다. 식 (23)에 제시한 상태천이방정식은 초기조건과 상태천이행렬에 의한 제차미분방정식의 일반해와, 입력에 따른 비제차미분방정식의 특해가 합해진 것으로써 전달함수가 갖는 문제점을 해결한다.

식 (25)에 초기조건과 상태천이행렬이 조합된 제차미분방정식의 일반해를 제시하였으며, 이는 단위계단 입력이나 정현파입력을 구분하지 않는다. 그리고 그림 4와 5에서 초기조건만으로 동작되는 회로망의 응답파형이 동일하다는 것을 확인하였다.

전달함수의 출력응답과 상태천이방정식의 특해를 비교하여 연계성을 분석하였다. 단위계단입력에 따른 커패시턴스 전압을 비교하면, 전달함수로 해석된 식 (8)과 상태천이방정식의 특해로 해석된 식 (30)이 일치한다. 또한 전류도 전달함수로 해석된 식 (4)와 상태천이방정식의 특해로 해석된 식 (34)가 일치한다. 정현파입력에 대해서도 전달함수의 출력응답과 상태천이방정식의 특해를 비교하면, 커패시턴스 전압은 식 (14)와 (39)가, 그리고 전류는 식 (11)과 (42)가 일치

한다는 것을 제시하였다.

전달함수와 상태방정식을 이용하여 전류와 커패시턴스 전압을 시간영역에서 해석하였다. 출력응답을 얻는 과정을 보면 전달함수가 상태방정식에 비해 계산은 용이하지만, 초기조건을 반영하지 못한다는 단점이 있었다. 반면에 상태방정식은 초기조건까지 반영하여 시스템의 시간응답을 얻을 수 있으나, 적분과정이 복잡하다는 단점이 있다. 따라서 초기조건을 반영하지 않아도 되는 시스템의 해석은 전달함수가 유리하다. 그러나 초기조건까지 반영한 시스템 해석에서는 초기조건과 상태천이행렬을 조합한 제차미분방정식의 일반해와, 상태천이방정식의 특해 대신에 전달함수를 사용함으로써 보다 쉽게 시간영역의 출력응답을 해석할 수가 있다.

V. 결론

고전제어와 현대제어의 비교 분석을 목적으로 자동제어 문헌들을 조사하였다. 전달함수와 달리 상태방정식에서는 초기조건을 해석하기 위해 상태천이행렬을 기술하거나, 또는 상태천이방정식을 정의해 상태방정식의 해를 해석하고 있다. 그렇지만 전달함수와 상태공간을 독립적으로 해석함에 따라 출력응답이 갖는 연계성을 보여주는에는 한계가 있다고 분석되었다.

시스템의 시간응답을 해석할 목적으로 전기회로망을 제안하였다. 상태천이방정식을 이용해 시스템의 시간응답을 계산하고, 전달함수와 상태방정식의 연계성을 분석하였다. 상태천이방정식은 초기조건과 상태천이행렬이 조합된 제차미분방정식의 일반해와, 입력에 따른 비제차미분방정식의 특해로 구성되었다. 그리고 상태천이방정식의 특해가 전달함수를 이용한 출력응답과 완벽하게 일치한다는 사실을 확인하였다. 따라서 상태천이방정식의 복잡한 적분과정을 거치지 않고서도, 상태천이행렬과 전달함수를 활용함으로써 초기조건을 갖는 시스템의 해석이 가능하다는 것을 제시하였다.

단위계단함수와 정현파입력에 따른 전압-전류의 응답파형을 표현하기 위해 VS-2008 소프트웨어를 활용하였다. 응답파형에서는 전류와 커패시턴스 전압을 동

시에 표현함으로써 시스템의 초기상태 변화와 전압-전류 비교가 가능하도록 하였다.

단위계단입력에 대해서는 시스템의 과도응답을 해석하였다. 커패시턴스 전압으로 정의된 출력응답을 보면 0.707의 제동비에 따라 미세하게 오버슈트가 존재한다. 이는 커패시턴스에 충전되는 전압이 일시적으로 과충전이 되나, 궁극적으로는 단위계단입력으로 수렴하게 된다. 정현과입력에서는 전류가 입력전압보다 26.57°만큼 앞선 위상을 가지며, 커패시턴스 전압은 입력전압에 비해 63.43°만큼 뒤진 위상을 갖는다는 사실을 확인하였다.

본 논문에서는 하나의 전기회로망을 모델로 설정하여 전달함수와 특성방정식을 해석하였다. 그리고 해석된 결과를 중심으로 전달함수와 상태방정식의 연계성을 명확하게 제시하였다. 본문에 제시된 내용을 자동 제어 문헌의 과도응답이나, 또는 상태공간해석의 전달함수와 상태방정식의 상호변환에 기술함으로써 제어 공학의 이해도를 높인다.

감사의 글

이 연구는 2017년도 광주대학교 대학 연구비 지원을 받아 수행되었음.

References

- [1] Y. Min and Y. Wi, "Understanding for Classical Control System by Analysis of Program-based Time Response," *J. of the Korea Institute of Electronic Communication Sciences*, vol. 11, no. 9, Sept. 2016, pp. 893- 900.
- [2] Y. Wi and Y. Min, "Weekly Peak Load Forecasting Using Weather Stochastic Model and Weather Sensitivity," *J. of the Korean Institute of Illuminating and Electrical Installation Engineers*, vol. 30, no. 5, May 2016, pp. 59-65.
- [3] C. Gook, M. Seo, and H. Han, *Classical Automatic Control*. Seoul: Edupd Publishing, 2015.
- [4] Y. Choi, *Modern Control Engineering: Understanding of the State-Space Representation*. Seoul: Hongrungs, 2012.
- [5] D. Han, G. Gwak, J. Kim, M. Park, B. Seo, S. Yang, J. Lee, B. Cho, and G. Hong, *Automatic Control for Dynamic Systems*. Seoul: Hanteemedia, 2016.
- [6] Y. Jeon, "Speed Control of the BLDC Motor using the Disturbance Observer," *J. of the Korea Institute of Electronic Communication Sciences*, vol. 11, no. 10, Oct. 2016, pp. 955-961.
- [7] J. Jang, K. Lee, and Y. Kim, "Design and Implementation of Standby Power Control Module based on Low Power Active RFID," *J. of the Korea Institute of Electronic Communication Sciences*, vol. 10, no. 4, Apr. 2015, pp. 491-498.
- [8] J. Park and S. Jin, *Automatic Control: Learning with C Language*. Seoul: Bogdoo, 2016.
- [9] G. Park, *Automatic Control: the new Edition*. Seoul: Dongilbook, 2015.
- [10] S. Kim, B. Song, S. Oh, and S. Yoo, *Automatic Control: the newest Edition*. Seoul: Bookshill, 2013.
- [11] J. Yang, M. Soh, B. Jeong, S. Jeong, and Y. Kim. *Automatic Control for Design of Control Systems*. Seoul: Dooyangsa, 2013.
- [12] W. Kwon and O. Kwon, *Automatic Control Engineering: the newest Edition*. Seoul: Cheongmoongak Publishing, 2015.
- [13] J. Lee, D. Kim, S. Park, J. Baik, G. Shim, C. Lee, M. Jeong, and S. Han, *Automatic Control*. Seoul: Green, 2011.
- [14] S. Kim, *Automatic Control*. Seoul: Hanbit Academy, 2014.
- [15] S. Han, Y. Lee, B. Kwon. O. Kwon, and W. Kwon, *Automatic Control*. Seoul: Hanbit Academy, 2013.
- [16] S. Kim and D. Kim, *Automatic Control*. Seoul: Munundang, 2011.
- [17] S. Kim and S. Hong, *Automatic Control System for Engineers*. Paju Kyungkido: Woongbo Publishing, 2014.
- [18] S. Lee, M. Cho, and C. Lee, *Automatic Control: the newest Edition*. Seoul: Bookshill, 2010.
- [19] C. Kim, S. Kim, S. Kim, T. Kim, Y. Yoo, J. Lee, H. Lee, G. Lee, and Y. Choi, *Automatic Control: Easy to Understand*. Seoul: Munundang, 2013.
- [20] S. Kim, *Analysis for Control System*. Seoul:

- Bogdoo Publishing, 2013.
- [21] H. Lee, D. Kim, W. Min, S. Lee, and J. Choi, *Automatic Control: the newest Edition*. Seoul: Bogdoo Publishing, 2015.
- [22] J. Park, G. Lee, J. Lee, J. Jeong, and M. Joo, *Control System Engineering: 6th Edition*. Seoul: Hongrung, 2013.
- [23] H. Yang, D. Kim, J. Park, T. Song, G. Jeong, and W. Heo, *Automatic Control of KUO: 9th Edition*. Seoul: Firstbook, 2010.
- [24] Y. Kim, *Automatic Control: the newest Edition*. Seoul: Taiyoungmunwhasa, 2016.
- [25] Y. Lim, J. Bai, and H. Jeong, *Automatic Control System*. Seoul: Munundang, 2014.

저자 소개



민용기(Yong-Ki Min)

1982년 전남대학교 제어계측공학과
졸업(공학사)

1986년 연세대학교 대학원 전자공
학과 졸업(공학석사)

1992년 전남대학교 대학원 전기공학과 졸업(공학박사)

1992년 ~ 현재 광주대학교 전기공학부 교수

※ 관심분야: 디지털제어

