

부유체의 상하동요 고유진동수 예측

김기범¹·이승준^{2,†}
삼성중공업 선박해양연구소¹
충남대학교 선박해양공학과²

Prediction of Heave Natural Frequency for Floating Bodies

Ki-Bum Kim¹·Seung-Joon Lee^{2,†}
Ship and Offshore Research Center, Samsung Heavy Industries¹
Dept. Naval Architecture & Ocean Engineering, Chungnam National University²

This is an Open-Access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution Non-Commercial License(<http://creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0>) which permits unrestricted non-commercial use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.

As the motion response of heave for floating bodies on the water surface is relatively large near the natural frequency, it is necessary to predict its value accurately from the stage of initial design. Bodies accelerating in fluid experience force acted upon by the fluid, and this force is quantified by using the concept of added mass. For predicting the natural frequency of heave we need to know the added mass, which is given as a function of frequency, and hence the natural frequency can be obtained through only by iteration process, as was pointed out by Lee (2008). His method was applied to circular cylinders, and two dimensional cylinders of Lewis form by making use of the Ursell-Tasai method in the previous works, Lee and Lee (2013), Kim and Lee (2013), and Song and Lee (2015). In this work, a similar algorithm employing the concept of strip method is adopted for predicting the heave natural frequency of KCS(KRISO Container Ship), and the obtained computational result was compared with other existing experimental data, and the agreement seems reasonable. Furthermore, through the error analysis, it is shown that why the frequency corresponding to the local minimum of the added mass and the natural frequency are very close. And it seems probable that we can predict the heave natural frequency if we know only the local minimum of added mass and the corresponding frequency under a condition, which holds for ship-like bodies in general.

Keywords : Heave(상하동요), Natural frequency(고유진동수), Added mass(부가질량), Floating bodies(부유체), KRISO Container Ship(KCS, KRISO 컨테이너선), Error analysis(오차해석), Local minimum(국부 최소값)

1. 서론

수면 상에서 상하동요하는 부유체의 운동 응답 $y(t)$ 는 고유진동수 부근에서 상당히 큰 값을 보이므로, 초기 설계 단계부터 비교적 정확하게 예측할 수 있어야 한다. 고유진동수를 구하는 방법은 여러 가지 방법이 있을 수 있지만, 가장 간단한 방법은 다음과 같은 주파수 영역(frequency domain)에서의 자유동요에 대한 운동 방정식을 사용하는 것이다.

$$\{m + m_a(\omega)\}\ddot{y} + b(\omega)\dot{y} + cy = 0 \quad (1)$$

여기서 m 은 부유체의 질량, m_a 는 부가질량, b 는 조파감쇠, c

는 복원계수이며, y 위의 점은 미분을 나타내고, ω 는 진동수를 뜻한다. SNAME (1989)에 따르면 고유진동수 ω_n 은 다음과 같이 정의하는 것으로 알려져 있으나,

$$\omega_n = \sqrt{\frac{c}{m + m_a}} \quad (2)$$

이때 문제는 m_a 가 ω 의 함수이므로, 위 식을 사용하여 ω_n 을 계산하기 위해서는 ω_n 의 값을 미리 알아야 한다는 점이다. 이와 같은 문제를 피하기 위해 Lee (2008)는 식 (2)를 다음과 같은 반복자(iterator)로 사용하여 고유진동수 ω_n 을 구하는 방법을 제안하였다.

$$\omega_{j+1} = \sqrt{\frac{c}{m + m_a(\omega_j)}}, \quad j = 0, 1, \dots \quad (3)$$

여기서 $\omega_a = \lim_{j \rightarrow \infty} \omega_j$ 이며, ω_0 는 다음과 같이 정의되는 원고유진동수(pre-natural frequency)이다.

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m}}. \quad (4)$$

한편, 위의 식들을 사용하여 얻는 ω_a 를 ω_0 를 사용하여 무차원량 Ω_a 로 나타내면 다음을 얻으며,

$$\Omega_a = \frac{\omega_a}{\omega_0} = \frac{1}{\sqrt{1 + C_a(\Omega_a)}} \quad (5)$$

$$\Omega_{j+1} = \frac{1}{\sqrt{1 + C_a(\Omega_j)}}, \quad j = 0, 1, \dots \quad (6)$$

여기서 $\Omega_0 = 1$, $\Omega_a = \lim_{j \rightarrow \infty} \Omega_j$ 이고, $C_a = m_a/m$ 으로 부가질량 계수이다. Lee (2008)는 원주에 대해 Ursell (1949)의 해를 2항 근사한 결과를 이용하여 $\Omega_a = 0.785$ 를 얻었다.

2장에서는 원주와 Lewis 단면의 주상체에 대한 기존의 연구 결과를 간략히 소개하고, 3장에서는 오차해석을 통해 부가질량계수의 국부 최소값과 고유진동수 사이의 관계를 밝히고자 하였으며, 4장에서는 KCS(KRISO Container Ship)에 대한 계산 결과를 소개하는데, 기존의 실험 결과와 비교하여 본 연구의 결과가 꽤 만족스러운 것을 보인 뒤, 5장에서 결론을 요약하기로 한다.

2. 2차원 문제

Lee and Lee (2013)는 Ursell (1949)의 부가질량 및 감쇠조파에 대한 해를 공치법(collocation method)을 적용하여 매우 정확하게 구하였으며, Fig. 1에 $C_a(\Omega)$ 를 보였다.

그림에서 ρ 는 유체의 밀도, g 는 중력가속도, a 는 원의 반경이라고 하면, 원주의 원고유진동수는 다음과 같으며,

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m}} = \sqrt{\frac{2\rho g a}{\rho \pi a^2/2}} = \sqrt{\frac{4g}{\pi a}} = \frac{3.532}{\sqrt{a}} \quad (7)$$

$\Omega = \frac{\omega}{\omega_0}$ 인 무차원 진동수이다. 이 결과를 이용하고 식 (5), (6)

을 사용하여 원주의 상하동요에 대한 무차원 고유진동수 $\Omega_a = 0.7919$ 를 얻었다). 그들은 또한 주파수 영역에서 강제동

1) 차후의 보다 정확한 계산에 의해 0.7916을 얻었다.

요에 대한 운동 응답도 구하여 복소진동수응답의 크기(Modulus of Complex Frequency Response, MCFR)가 국부 최대값을 가지는 진동수 $\Omega_1 = 0.7970$ 을 얻었으며, 따라서 식 (5), (6)을 사용하여 얻은 고유진동수가 그 간편성을 고려할 때 충분히 사용할 만한 것임을 보였다.

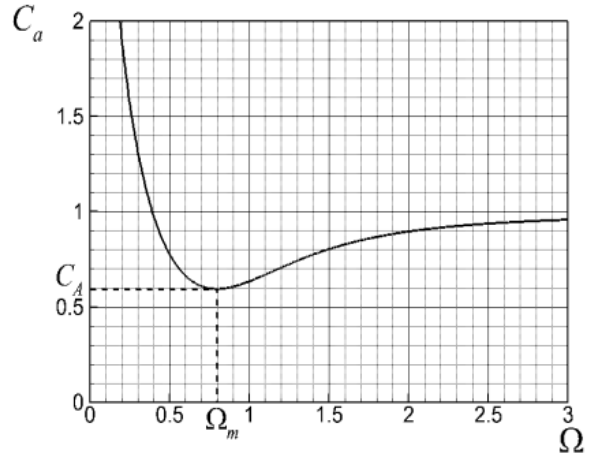


Fig. 1 Added mass coefficient $C_a(\Omega)$ for circular cylinder, Lee and Lee (2013)

한편, Kim and Lee (2013)는 원주에 대해 시간 영역(time domain)에 대한 해석을 수행하고 실험을 병행하여 상하동요의 무차원 고유진동수에 대해 실험으로부터는 0.7985, 수치해석으로부터는 0.8155를 얻었으며, Fig. 2에 그들이 얻은 MCFR, $R(\Omega)$ 을 보였으며, 점선은 부가질량과 조파감쇠를 Ω 의 함수가 아닌, Ω_1 에서의 값으로 사용하여 얻은 MCFR R_0 이다.

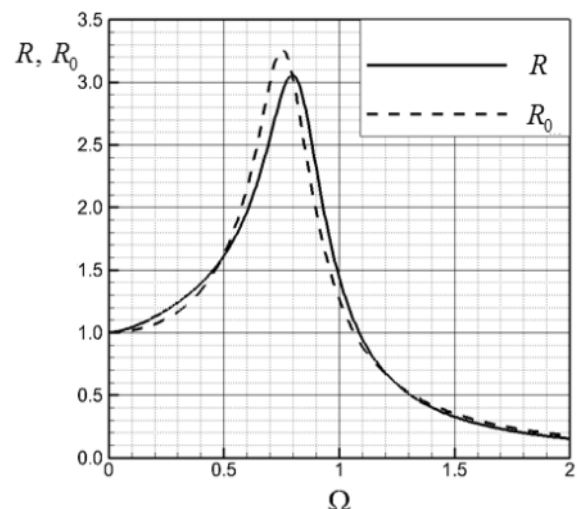


Fig. 2 MCFR for circular cylinder, Kim and Lee (2013)

Song and Lee (2015)는 다음과 같이 쓸 수 있는 Lewis 변환(Lewis transform)을 사용하는 Tasai (1959) 방법을 이용하였는데,

$$z = M_f \left(\zeta + \frac{a_1}{\zeta} + \frac{a_3}{\zeta^3} \right) \quad (8)$$

여기서 z 는 주상체의 횡단면을 얻는 물리적 복소평면이며, ζ 는 원주가 주어진 수학적 복소평면이고, M_f 는 배율계수, a_1, a_3 는 횡단면의 기하학적 특성인 폭-높이 비 H , 횡단면적계수 σ 의 함수로 주어지는 변환 계수이다. 2차원 주상체에 대해 공치법을 적용, 부가질량계수를 구하였으며, 이 값을 이용하고 식 (5), (6)을 사용하여 Ω_a 를 구하였는데, Fig. 3에 보인 바와 같이 선박의 횡단면에 상응하는 매우 광범위한 H, σ 의 값에 대해 부가질량계수 C_a 가 국부 최소값을 가지는 진동수 Ω_m 과 상당히 가까운 값을 가짐에 주목하였다.

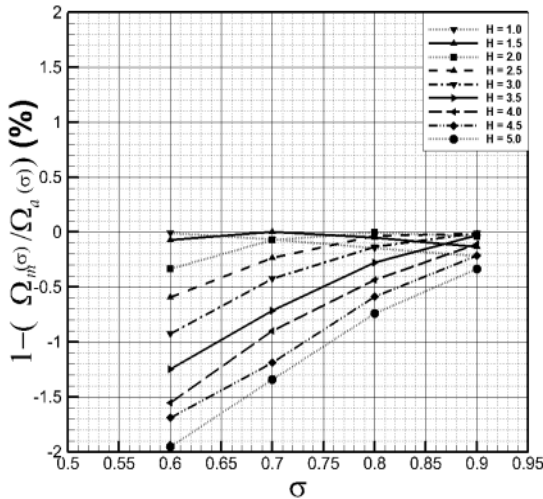


Fig. 3 Difference in % between Ω_a and Ω_m , Song and Lee (2015)

원주의 경우 $\Omega_m = 0.7962$ 로, Ω_a 와 매우 비슷한 값을 가지므로, 이와 같은 사실은 Lee, et al. (2013)에 의해서도 주목된 바 있는데, Fig. 3에서 보는 바와 같이 Ω_a 와 Ω_m 의 차이가 대부분의 Lewis 단면에 대해 1.5% 미만인 것은 3차원 선박에 대해서도 거의 비슷한 현상이 발생할 것이라는 가설을 세울 수 있게 하며, 이에 대한 보다 기본적인 연구의 필요성이 제기되었다. Fig. 3에서 $\Omega_m > \Omega_a$ 인 점에 유의한다.

3. 오차해석

식 (6)과 관련하여 오차 $\epsilon_j = \Omega_a - \Omega_j$ 로 정의하고, 또 C_a 가 국부 최소값을 가지는 진동수 Ω_m 부근에서 C_a 는 다음과 같이 근사할 수 있다.

$$C_a(\Omega) \simeq C_A + \beta(\Omega - \Omega_m)^2 \quad (9)$$

여기서, $C_A = C_a(\Omega_m)$ 으로 부가질량계수의 국부 최소값이며, $\beta > 0$ 는 주어진 상수이다. 식 (5)에서 식 (6)을 빼면 다음을 얻는데,

$$\begin{aligned} \epsilon_{j+1} &\simeq \frac{\beta}{2(1+C_A)^{3/2}} \{(\Omega_j - \Omega_m)^2 - (\Omega_a - \Omega_m)^2\} \\ &= B\{(\epsilon_j + \Delta)^2 - \Delta^2\}, B = \frac{\beta}{2(1+C_A)^{3/2}} \end{aligned} \quad (10)$$

여기서 $\Delta = \Omega_m - \Omega_a$ 이고, $B > 0$ 임에 유의한다. 식 (10)으로부터 다음을 얻는데,

$$\epsilon_{j+1} \simeq B(2\Delta + \epsilon_j)\epsilon_j \quad (11)$$

충분히 큰 j 에 대해서는 위 식 우변의 ϵ_j^2 항은 무시할 수 있으므로, 결국 다음을 얻는다.

$$\epsilon_{j+1} \simeq 2B\Delta \epsilon_j \quad (12)$$

따라서 식 (6)으로부터 $j \rightarrow \infty$ 일 때, 수렴하는 결과를 얻을 조건을 다음과 같이 얻는다.

$$|2B\Delta| < 1, \therefore |\Delta| < (1+C_A)^{3/2}/\beta \quad (13)$$

예를 들어 원주에 대해 위의 조건을 적용하면, $\beta = 2.161$, $C_A = 0.597$ 을 대입하여, $|\Delta| < 0.934$ 를 얻으며, Fig. 3의 종축이 $-\Delta/\Omega_a$ 이고 $\Omega_a \sim 1$ 이므로, 위 조건은 Lewis 단면에 대해서는 모든 경우에 대해 만족됨을 알 수 있다. 물론 수렴조건이 Ω_a 를 포함하고 있어, 반복법을 사용하기 전에 이를 적용하여 수렴 여부를 판정할 수는 없지만, 수치적으로 얻어진 수렴치들이 위 조건과 일관된 결과를 보여준다는 점에서 위 식의 의미를 인정할 수 있다.

다음으로는 $\epsilon_j = \Omega_j - \Omega_m$ 으로 정의하고, $\Omega_a = \lim_{j \rightarrow \infty} \Omega_j$ 와 Ω_m 사이의 관계에 대해 생각해보기로 한다. Ω_m 부근에서 C_a 는 식 (9)와 같이 근사할 수 있으므로, 식 (6)으로부터 다음을 얻으며,

$$\begin{aligned} \Omega_m + \epsilon_{j+1} &\simeq \frac{1}{\sqrt{1+C_A}} \left\{ 1 - \frac{\beta}{2(1+C_A)} \epsilon_j^2 \right\} \\ \therefore \epsilon_{j+1} &\simeq A - B\epsilon_j^2, A = \frac{1}{\sqrt{1+C_A}} - \Omega_m \end{aligned} \quad (14)$$

여기서 예를 들어 원주에 대해서는 $A = -0.00489$ 을 얻는데, 아래에서 보게 될 바와 같이 $\Omega_a \simeq \Omega_m$ 이 성립하는 이유는 바로 $|A| \ll 1$ 인 것으로 보인다. 식 (14)에 포함된 A, B 의 크기를 고려하여 다음을 가정하고,

$$A = O(\epsilon), B = O(\sqrt{\epsilon}), \epsilon_0 = O(1), |\epsilon| \ll 1, \quad (15)$$

이들을 식 (14)에 적용하여 $\epsilon_1 \simeq -B\epsilon_0^2$, $\epsilon_2 \simeq A$ 를 얻으며, 따라서 ϵ_{N+1} 에 대해 다음을 얻는다.

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \epsilon_{N+1} = A \quad (16)$$

이 식에 따르면 다음 결과를 얻는다.

$$\Omega_a = \lim_{j \rightarrow \infty} \Omega_j = \Omega_m + A \quad (17)$$

예를 들어 원주에 대해 $\Omega_m = 0.7962$, $A = -0.00489$ 이므로, $\Omega_a = 0.7913$ 을 얻는데, 이는 Lee and Lee (2013)가 얻은 $\Omega_a = 0.7916$ 과 매우 가까우며, 그 차이는 오차해석 시 고차 항을 무시한 것과, 수치 계산 시의 오차에 기인하는 것으로 볼 수 있다.

위에서 얻은 결과는 부가질량계수에 대한 계산을 수행한 후, $|A| \ll 1$ 을 확인할 수 있는 경우에 대해서는, 식 (3) 또는 식 (6)의 반복자를 사용하지 않더라도 상하동요의 고유진동수를 비교적 정확하게 예측할 수 있는 가능성을 시사하고 있다.

4. KCS에 대한 계산

3차원 부유체 또는 선박에 대해 식 (3) 또는 식 (6)에 의한 상하동요의 고유진동수 예측이 어떠한 결과를 주는지 또 3장에서 의 해석 결과가 유효한지를 가늠해 보기 위해 실선으로 KCS(KRISO Container Ship)를 택하여 계산을 수행하였으며 KCS의 주요제원은 Table 1에, 또 정면도와 선수미의 측면 형상은 Fig. 4에 보였다 (Kim, et al., 2001).

Table 1 Principal particulars of KCS

Item	Magnitude
LPP	230 m
B, Moulded	32.2 m
T, Moulded	10.8 m
LWL	232.5 m
Wetted surface area	9424.0 m ²
Displacement volume	52030.0 m ³
Block coeff. C_B	0.6505
Load waterline coeff. C_W	0.8314
Midship section coeff. C_M	0.9849
Prismatic coeff. C_P	0.6605
LPP/B	7.1429
LPP/T	21.2963
B/T	2.9815



Fig. 4 Body Plan & Side Profile of KCS

가능한 한 간단한 문제를 다루기 위해 선박 또는 부유체는 전진속도가 없는 것으로 가정하며, 주파수 영역에서 자유동요 문제를 다루되 상하동요에 대한 운동 방정식은 식 (1)로 주어지는 것으로 가정한다. 또 3차원 물체를 다수의 스트립(strip)의 합으로 보며, 각 스트립 사이에는 상호 작용이 없는 것으로 가정하여 각 스트립의 부가질량의 합이 3차원 물체의 부가질량과 같은 것으로 간주한다.

후부수선(After Perpendicular, AP)을 0 번 스테이션(station), 전부수선(Fore Perpendicular, FP)을 20 번 스테이션이라고 할 때, 선미부의 AP부터 4 번 스테이션까지, 선수부의 17 번 스테이션부터 FP까지 반(half) 스테이션을 고려하였고, 선수부의 급격한 형상 변화를 고려하기 위해 19.75 스테이션을 사용하여, 도합 29 스테이션의 횡단면에 대한 자료를 이용하였다. 각 스트립의 횡단면에 대해 폭·흘수 비 H , 횡단면적계수 σ 를 구한 뒤, 이들로부터 식 (8)의 변환 계수 M_f , a_1 , a_3 를 구할 수 있다. 단 선수 및 선미부의 몇 단면에 대해서는 이렇게 구한 a_1 , a_3 가 Ursell-Tasai 방법을 사용할 때 고려해야 하는 수렴 범위에 속하지 않으며, 이 수렴 범위는 Fig. 5에 마름모꼴로 보였다.

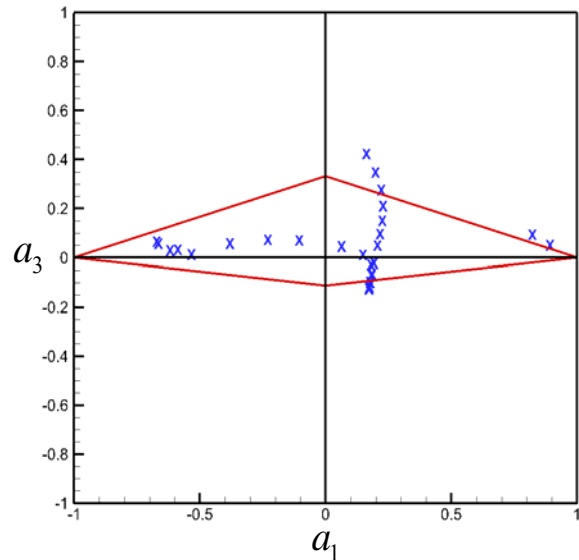


Fig. 5 Range of a_1 , a_3 before correction

이 마름모꼴에 속하지 않는 단면에 대해서는 반폭과 횡단면적은 유지한 채 흘수를 조절하는 방법으로 수정된 단면을 작성, 사용하였으며, Fig. 6.에 보인 바와 같이 수정된 횡단면에 대한 a_1 , a_3 는 모두 수렴 범위에 속하는 것을 확인하였다. 이와 같은

수정은 Ursell-Tasai 방법을 사용함에 있어 수렴된 결과를 얻기 위한 것이며, 특이점 분포 등의 방법을 사용하여 주어진 단면에 대한 수동역학적 계수를 정확하게 구한다고 하더라도, 이와 같은 수정이 고려된 스트립의 체적이 전체 체적에서 차지하는 비율이 그리 크지 않으므로, 최종적인 계산 결과에는 큰 영향을 미치지 않을 것으로 가정할 수 있다.

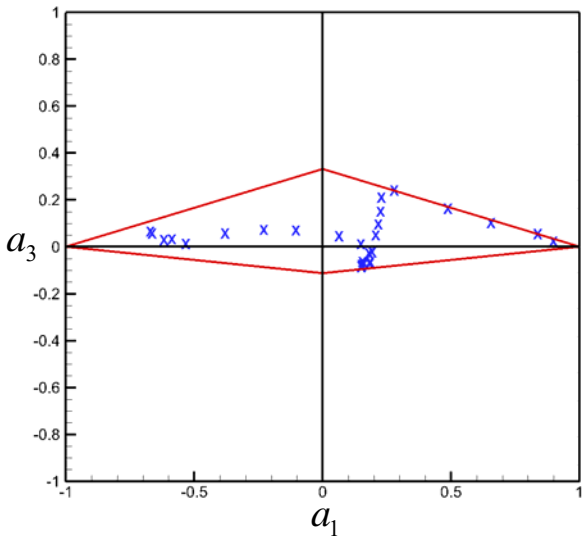


Fig. 6 Range of a_1 , a_3 after correction

위에서 설명한 방법에 의해 얻어진 a_1 , a_3 를 사용하여 각 스트립에 대한 수동역학적 계산을 수행하였으며, 대표적으로 2.5, 10, 18 번의 세 스테이션에 대한 부가질량을 Fig. 7에 보였다. 선박과 같은 3차원 물체에 대한 원고유진동수 ω_0 는 식 (4)로부터 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned} \omega_0 &= \sqrt{\frac{c}{m}} = \sqrt{\frac{\rho g A_W}{\rho V}} \\ &= \sqrt{\frac{g L B C_W}{L B T C_B}} = \sqrt{\frac{g C_W}{T C_B}} \end{aligned} \quad (18)$$

여기서 A_W 는 수선면적, V 는 배수량이며, Table 1에 보인 KCS에 대한 값들을 대입하여 $\omega_0 = 1.077 \text{ rad/s}$ 를 얻는다.

수평축이 위에서 얻은 ω_0 로 무차원화한 진동수 Ω 인 Fig. 7로부터 중앙 횡단면인 10 번 스테이션에서의 부가질량이 Ω 의 전 범위에 걸쳐 가장 큰 값을 가지며, 또 국부 최소값도 가장 현저하게 나타남을 확인할 수 있고, 다른 스테이션에 대한 계산 결과로부터도 기대했던 바와 같이 $\Omega \in [0.5, 1.0]$ 에서 국부 최소값을 가짐을 확인할 수 있다.

각 스트립에 대한 결과를 이용하여 KCS에 대한 부가질량을 구할 수 있고, 그 결과를 $C_a(\Omega)$ 의 형태로 Fig. 8에 보였다. 계산 결과로부터 $\Omega_m = 0.7336$, $C_A = 0.9880$ 을 얻으며, 식 (14)

로부터 $A = -0.02436$ 을 얻으므로, 오차해석으로부터 얻은 식 (17)에 의하면 $\Omega_a = 0.7092$ 를 얻는다. 한편, 식 (6)의 반복자를 사용하면, $\Omega_a = 0.7090$ 을 얻어 2장, 3장에서 얻은 2차원 문제에 대한 결과, 즉 Ω_m 과 Ω_a 사이의 관계, 오차 해석의 결과 등이 3차원 선박에 대해서도 그대로 성립하는 것을 확인할 수 있다.

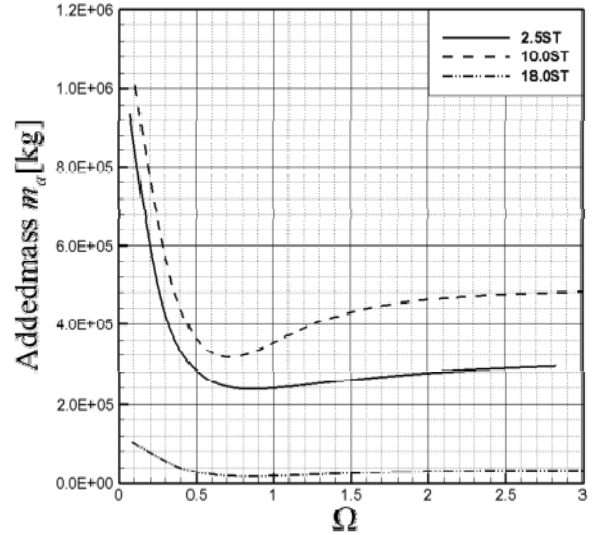


Fig. 7 Added mass of strips at typical stations

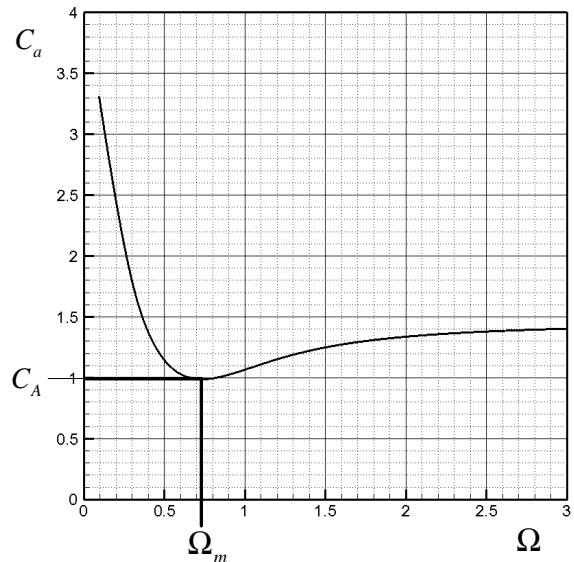


Fig. 8 Added mass of KCS

Simonsen, et al. (2013)은 축척비 52.667의 모형선을 사용하여 실험을 수행하였는데, 앞파도의 규칙파 중에서 푸르드 수 (Froude number), $Fn = U/\sqrt{gL} = 0.26$, $\lambda = 1.33L$ 일 때, 상하동요의 전달함수(transfer function)가 국부 최대값을 가지는 것을 보였으며, 여기서 U 는 전진속도, λ 는 입사파의 파장이다. 이에 상응하는 조우진동수(encounter frequency) ω_e 는 다음과 같으며,

$$\begin{aligned} \omega_e &= \omega + 2\pi \frac{U}{\lambda} \\ &= \sqrt{\frac{2\pi g}{1.33L}} + 2\pi Fn \frac{\sqrt{gL}}{1.33L} = 0.7022 \end{aligned} \quad (19)$$

위에서 구한 ω_0 를 이용하여 무차원화하면, 전달함수가 국부 최대값을 가지는 무차원 진동수 $\Omega_t = 0.6520$ 을 얻는다. 앞에서 보인 반복자를 사용하여 얻은 무차원 고유진동수 $\Omega_a = 0.7090$ 와의 차이는 8% 정도인데, 이 차이에 대한 이유로, 1차적으로는 전진속도에 따른 영향을 들 수 있으며, 이는 Simonsen, et al. (2013)의 실험 결과에서 높은 Fn 에 대한 전달함수의 국부 최대값에 상응하는 진동수가 점차 증가하는 것으로부터도 뒷받침된다. 또한 그들의 실험은 λ/L 가 1.15, 1.33, 1.5인 경우에 대해 수행되었으므로, 국부 최대값에 상응하는 진동수를 정확하게 추정하는 데는 약간의 오차가 포함될 수밖에 없음도 이유로 들 수 있다.

5. 결론

2차원 주상체에 대한 Ursell-Tasai 방법과 스트립 근사를 이용하여 KCS의 상하동요 고유진동수를 예측하기 위해 수행된 해석 및 계산 결과와 관련된 지금까지의 논의를 통해 다음과 같은 결론을 얻을 수 있다.

1) 식 (5)로 부유체의 상하동요 고유진동수를 정확하게 정의하였다.

2) 오차해석을 통해 반복자인 식 (6)을 사용하여 부유체의 고유진동수를 구할 수 있는 수렴조건이 식 (13)과 같이 주어지는 것을 보였고, 이 조건이 Lewis 변환에 의해 생성되는 선형 횡단면에 대해서는 일반적으로 만족됨을 확인하였다.

3) 식 (14)로 정의된 A 가 $|A| \ll 1$ 의 조건을 만족하면, 식 (17)의 근사를 사용하여 고유진동수를 구할 수 있으며, 이렇게 구한 값은 반복자를 사용하여 구한 고유진동수와 매우 가까운 것을 확인하였다.

4) 식 (5)로 정의되고, 식 (6)을 사용하여 구한 고유진동수는 Simonsen, et al. (2013)의 실험 결과와 비교하여도 비교적 정확한 결과를 주고 있음을 확인하였다.

5) 이상으로부터 3차원 선박 및 부유체에 대해 부가질량계수 $C_a(\Omega)$ 를 구하여, 식 (14)로 정의된 A 에 대해 $|A| \ll 1$ 이 성립하면, 그 국부 최소값에 대한 정보, 즉 부가질량계수의 국부 최소값 C_A , 그에 상응하는 Ω_m 을 알면 식 (17)로부터 Ω_a 를 구할 수 있음을 보였다.

후 기

이 연구는 2014년도 충남대학교 학술연구비에 의해 지원된 연구의 결과입니다.

References

- Kim, K.B. & Lee, S.J., 2013. Natural frequency of 2-dimensional heaving circular cylinder; time-domain analysis. *Journal of the Society of Naval Architects of Korea*, 50(4), pp.224-231.
- Kim, W.J. Van, S.H., & Kim, D.H., 2001. Measurement of flows around modern commercial ship models. *Experiments in Fluids*, 31, pp.567-578.
- Lee, D.Y. & Lee, S.J., 2013. Natural frequency of 2-dimensional heaving circular cylinder; frequency-domain analysis. *Journal of the Society of Naval Architects of Korea*, 50(2), pp.111-119.
- Lee, S.J., 2008. Natural frequency of 2-dimensional heaving circular cylinder. *Journal of the Society of Naval Architects of Korea*, 45(4), pp.389-395.
- Lee, S.J. Kim, K.B. & Lee, D.Y., 2013. Natural frequency of heaving circular cylinder in the free surface. *8th International Workshop on Ship Hydrodynamics*, Seoul, Republic of Korea, 23-25 September 2013.
- Simonsen, C.D. Otzen, J.F. Joncquez, S. & Stern, F., 2013. EFD and CFD for KCS heaving and pitching in regular head waves. *Journal of Marine Science and Technology*, 18-4, pp.435-459.
- SNAME, 1989. *Principles of naval architecture*. SNAME: Jersey City, NJ.
- Song, J.H. & Lee, S.J., 2015. Natural frequency of 2-dimensional cylinders in heaving; frequency-domain analysis. *Journal of the Society of Naval Architects of Korea*, 52(1), pp.25-33.
- Tasai, F., 1959. On the damping force and added mass of ships heaving and pitching. *Journal of the Society of Naval Architects of Japan*, 105, pp.47-56.
- Ursell, F., 1949. On the heaving motion of circular cylinder on the surface of a fluid. *Quarterly Journal of Mechanics & Applied Mathematics*, 2(2), pp.218-231.

