

금융시계열자료를 이용한 원주율값 π 의 추정[†]

장대홍¹ · 엄태웅² · 이성백³

¹²³부경대학교 통계학과

접수 2017년 6월 27일, 수정 2017년 7월 13일, 게재확정 2017년 7월 17일

요약

원주율 π 는 임의의 원의 지름에 대한 둘레의 비로 정의되며 상수값을 갖는다. 이 값은 무리수이며 초월수로서 고대로부터 좀 더 정확한 값을 구하기 위한 수많은 노력이 있어왔다. 특히 확률분야에서는 18세기 Buffon의 바늘문제를 기점으로 확률실험을 통하여 π 값을 계산하려는 많은 노력이 있어왔다. 통계분야에서 Chong (2008)은 서로 독립인 이변량표준정규확률분포와 단변량 확률보행과정의 차분이 독립인 정규분포를 따른다는 전제조건하에서 π 값을 유도하였다. 본 연구에서는 Buffon의 바늘문제와 정사각형에 내접하는 원의 문제에서 유도된 π 값을 확률실험을 통하여 근사값을 구해보며 이 값이 실험횟수와 어떤 관계가 있는지 알아본다. 더불어 Chong이 유도한 단변량확률보행과정의 차분에 근거한 π 의 일치추정량을 모의실험을 통하여 검증해본다. 나아가 국내외 금융자료를 사용하여 제시된 방법에 의해 계산된 추정값의 수렴여부와 수렴할 경우 극한값과 π 의 오차정도를 살펴보고 이를 통하여 효율적시장가설에 대한 설명을 시도한다.

주요용어: Buffon의 바늘실험, π , 확률보행과정.

1. 서론

문헌에 의하면 원의 지름에 대한 원둘레의 비인 원주율이 원의 크기와 상관없이 항상 동일한 상수 값을 갖는다는 사실은 기원전 2천년경 알려져 있었다. 이 원주율이 영어 알파벳 p 에 해당되는 그리스문자 π 로 표기된 것은 18세기 들어서야 가능했다.

Beckmann (1971)에 의하면 기원전 2천년 쯤 바벨로니아인들과 이집트인들은 π 의 존재와 중요성을 이미 인식하여 원주율의 어림값으로 바벨로니아인들은 대략 $3\frac{1}{8}$ 로 이집트인들은 $4(8/9)^2$ 으로 각각 계산하였다. 1936년 바벨로니아로부터 200마일 떨어진 곳에서 발견된 점토판에는 원에 내접한 정육각형 둘레 길이의 외접원의 둘레 (C)의 비가 $57/60 + 36/(60)^2$ 이라고 적혀있다. 바벨로니아인들은 물론 정육각형의 둘레가 외접원의 반지름 (r)의 6배와 정확히 일치한다는 사실을 알고 있었으므로 $\pi = C/2r$ 이라는 관계로부터 $\pi = 3\frac{1}{8}$ 이라는 값이 유도되었다고 짐작해 볼 수 있다. 이집트인들의 경우 피라미드를 건설하는 과정에서 지름이 9인 원의 면적이 한변이 8인 정사각형의 면적과 같다는 사실을 발견하였다고 한다. 이 사실에 근거하면 원의 면적 (A)이 $A = \pi r^2$ 을 이용하면 $\pi(9/2)^2 = 8^2$ 으로부터 $\pi = 4 \times (8/9)^2$ 이 나옴을 알 수 있다.

아시아지역의 경우 중국에서는 기원후 130년경 $\pi = 3.1622$ 로 사용하였고 기원후 400년경 인도에서 출판된 천문학관련 서적에 의하면 원주율의 값으로 $\pi = 3(177/1250) = 3.1416$ 의 값을 사용하였다. 특

[†] 이 논문은 부경대학교 자율창의학술연구비(2016년)에 의하여 연구되었음.

¹ (48513) 부산광역시 남구 용소로 45, 부경대학교통계학과, 교수

² (48513) 부산광역시 남구 용소로 45, 부경대학교 통계학과, 박사과정

³ 교신저자: (48513) 부산광역시 남구 용소로 45, 부경대학교 통계학과, 교수, Email: sbyi0108@gmail.com

히 기원후 264년 중국의 Liu Hui는 아르키메데스의 원에 내접한 다각형을 응용하여 3072면을 가진 다각형의 경우로부터 π 의 근사값으로 3.14159를 계산하였다 (Volkov, 1994). 특히 5세기 Tsu Chung-Chin과 그의 아들 Tsu Keng-Chih는 $3.1415926 < \pi < 3.1415927$ 임을 발견하였는데 유럽에서는 이 정도의 정확성을 16세기가 되어서야 유지할 수 있었다 (Lam과 Ang, 1986). 또한 구약성경 (열왕기상 7:23과 역대기하4:2)에 의하면 원주율의 정의에 의한 근사값이 $\pi = 30/10 = 3$ 임을 알 수 있다.

원주율 π 는 일반적으로 소수의 형태인 3.14로 표기하지만 1767년 Lambert에 의해 무리수 (irrational number)로 1882년 Linderbamm에 의해 초월수 (transcendental number)임이 각각 증명되었다. 즉 π 는 소숫점 자리의 숫자들이 반복되지 않는 무한의 자리수를 가지며 정수다항식의 근이 될 수 없다. 참고로 파이값을 소숫점 18째까지 표현하면 3.141592653589793238이다. 컴퓨터의 발명과 발전은 π 값 계산의 정확도를 크게 개선시켰다. 미국 육군에서는 1949년 소숫점 2035자리까지 계산하였으며 2000년 현재 파이값은 소숫점 2060억자리까지 정확하게 계산되어있다. 확률론에서 π 값이 출현한 것은 18세기 Buffon의 바늘문제에서 처음으로 시도되었으며 Chong (2008)은 서로 독립인 결합정규분포를 따르는 확률표본과 차분이 독립인 정규분포를 따르는 확률보행과정에 회귀모형을 적용시켜 회귀계수의 함수로 π 값의 일치추정량을 유도하였다.

본 논문에서는 확률분야에서 대표적인 Buffon의 바늘문제와 정사각형에 내접하는 원의 확률실험을 통하여 추정된 π 값의 일치성을 몬테칼로실험을 통해 확인하고 Chong (2008)이 이론적으로 제시한 단변량시계열자료를 통한 π 값의 일치추정량을 역시 모의실험을 통하여 검증하며 이를 한국과 세계금융자료를 이용하여 실증적 분석을 시도해 본다. 이를 위해 2장에서는 몬테칼로 모의실험결과를 제시하며 3장에서는 실제자료에 적용한 결과를 제시하고 마지막으로 4장에서는 본 연구 결과 및 향후 연구과제 등을 논한다.

2. 확률과 통계분야에서 π 값의 계산

2.1. 확률실험을 이용한 π 값의 계산

확률론에서 π 값이 출현한 것은 1777년 Buffon이 제시한 바늘문제를 통해서 처음으로 시도되었다. 이에 대한 자세한 설명은 Beckman (1971), Ripley (1986) 또는 Ramaley (1969) 등을 참조하기 바란다. 간격이 d 만큼 떨어져 있는 평행선이 그어진 평면 위로 길이가 $L(L \leq d)$ 인 바늘이 임의로 던져질 때 바늘이 평행선 중 어느 하나에 걸쳐질 확률 (P)은 $P = 2L/\pi d$ 이다. 이 관계로부터 Laplace는 $\pi = 2L/dP$ 이라는 사실을 확인하고 바늘을 종이 위에 반복해서 던질 때 바늘이 평행선 중 어느 한 선에 걸쳐진 횟수를 기록하는 실험을 통하여 π 값을 계산하였다. 또한 한 번의 길이가 $2R$ 인 정사각형에 내접하는 원의 면적과 정사각형 면적의 비는 $\pi R^2/(2R)^2 = \pi/4$ 이다. 이 사실에 근거하여 바늘을 정사각형 위에 떨어뜨렸을 때 바늘이 원의 내부에 떨어지는 확률을 이용하여 π 값을 추정할 수 있다.

Figure 2.1은 위의 문제를 표본크기를 100씩 늘려가면서 Monte Carlo 방법을 통하여 추정한 π 값의 표본크기에 대한 추이와 오차에 대한 상자그림이며 Table 2.1은 그 중 주요 표본크기에 대한 두 방법에 의해 추정된 π 값의 결과를 요약한 것이다. 이 확률실험결과에 의하면 두 경우 모두 바늘을 던진 횟수가 많아진다고해서 반드시 π 값이 더 정확하게 추정되는 것은 아니며 Buffon방법보다는 정사각형의 내접원을 이용하여 π 를 추정한 경우 비록 극값들이 존재하였지만 오차가 더 작은 경우가 많음을 알 수 있다. 물론 이 경우에도 던진 횟수를 고정시키고 반복해서 추정량을 계산한 후 몬테칼로 추정량과 분산을 계산하면 결과가 달라나타날 수도 있을 것이다.

Table 2.1 Approximation of π by Monte Carlo simulation

No. throw	Buffon Problem	Inscribed Circle
500	3.194888	3.128000
1500	3.099174	3.136000
2500	3.126954	3.148800
3500	3.144654	3.163429
4500	3.122831	3.158222
5500	3.133903	3.156364
6500	3.080569	3.144000
7500	3.113971	3.139733
8500	3.174603	3.140235
9500	3.154050	3.164211
10500	3.142772	3.116190
11500	3.157172	3.154783

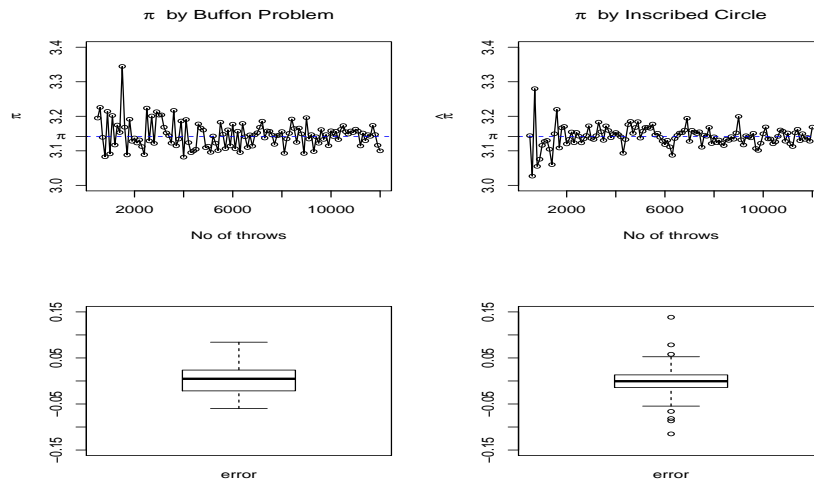


Figure 2.1 Approximation of π by Buffon needle problem and inscribed circle

2.2. 시계열자료를 이용한 π 값의 유도

경제 및 금융자료에는 사소한 경제활동들이 누적된 총체적인 정보가 내포되어 있다. 주가가격의 움직임에 수 많은 매도인과 매수인들의 행동이 총체적으로 관련되어 있다는 것이 한 좋은 예가 될 수 있다. 주식시장에서 투자자들은 매도와 매입의 위치를 랜덤하게 취하기 때문에 이러한 총체적 행동은 중심극한정리로 설명이 가능하며 이러한 이유에 근거하여 파이값의 이론적 도출이 가능하다.

Chong (2008)은 확률보행과정의 차분인 오차항이 독립인 정규분포를 따른다는 가정하에 이웃한 오차항들의 최대값과 최소값을 이용하여 회귀모형을 구하고 회귀계수의 함수로 π 값의 일치추정량을 유도하였다. 특히 확률보행과정의 일차 차분인 오차항이 가우시안 백색잡음일 경우 효율적시장가설에 의하면 주가가격의 로그수익률이 확률보행과정을 따른다고 알려져 있기 때문에 금융시계열자료를 도출된 이론에 적용해 볼 수 있다.

보조정리 (Chong, 2008) 확률보행 (random walk)을 따르는 시계열자료 $\{X_t\}$ 의 차분시계열자료 $\{W_t\}_{t=1}^N$ 가 $N(0, \sigma^2)$ 을 따른다고 가정하고 $\max\{W_{t-1}, W_t\}$ 를 $\min\{W_{t-1}, W_t\}$ 에 회귀시킨 다음과 같

은 회귀모형을 고려하자.

$$\max\{W_{t-1}, W_t\} = \beta_0 + \beta_1 \min\{W_{t-1}, W_t\} + \epsilon_t, \quad (t = 1, \dots, N), \quad (2.1)$$

여기서 ϵ_t 는 가우시안 백색잡음과정, 즉, 서로 독립인 $N(0, \sigma^2)$ 을 따른다. 최소제곱법에 의해 구해진 회귀계수 β_1 의 추정량 $\hat{\beta}_1$ 은 다음 성질을 갖는다.

$$\frac{\hat{\beta}_1 + 1}{\hat{\beta}_1} \xrightarrow{p} \pi \quad \text{as } N \rightarrow \infty. \quad (2.2)$$

이제 확률보행과정을 따르는 단변량시계열자료를 생성한 후 일차 차분을 이용하여 회귀모형 (2.1)을 적합시키고 추정된 회귀계수의 함수로 π 값을 근사시키는 모의실험을 실시하였다. Table 2.2는 오차가 $N(0, \sigma^2)$ 인 확률보행과정을 표본크기를 달리하며 1000회 반복실험하여 계산된 π 의 추정값들을 요약한 것이다. 계산된 π 값들은 표본크기가 1000일 때부터 소숫점 둘째자리까지 일치하는 경향을 보이며 $n = 10^5$ 일 때부터는 소숫점 셋째자리까지 일치하는 것을 알 수 있다. 또한 이런 양상은 오차의 표준편차와 상관없이 동일하게 나타나고 있다.

Table 2.2 Summary statistics for estimates of π from random walk with 1000 repetition

	n	mean	median	st.dev
$\sigma = 0.1$	10^2	3.2358276	3.1494283	0.54492
	10^3	3.1425746	3.1283245	0.14646
	10^4	3.1418837	3.1402456	0.04539
	10^5	3.1417369	3.1413647	0.01496
	10^6	3.1416738	3.1418890	0.00463
$\sigma = 0.25$	10^2	3.2605742	3.1600267	0.56532
	10^3	3.1561365	3.1506746	0.15239
	10^4	3.1443292	3.1437143	0.04710
	10^5	3.1417715	3.1424187	0.01470
	10^6	3.1416441	3.1415825	0.00456
$\sigma = 0.5$	10^2	3.2665222	3.1353566	0.67335
	10^3	3.1480999	3.1305404	0.15158
	10^4	3.1439939	3.1406842	0.04527
	10^5	3.1410831	3.1415556	0.01436
	10^6	3.1416974	3.1417600	0.00461
$\sigma = 1.0$	10^2	3.2544398	3.1401363	0.58313
	10^3	3.1522445	3.1444086	0.14516
	10^4	3.1405318	3.1424860	0.04607
	10^5	3.1414463	3.1416241	0.01490
	10^6	3.1415321	3.1415169	0.00468

3. 실제자료의 적용

3.1. 한국금융시계열자료

이 절에서는 확률보행과정을 따르는 단변량시계열자료를 이용하여 π 값을 계산하는 정리를 실제 금융시계열자료에 적용하여 본다.

우선 몇 가지 용어의 정의를 살펴보자. 시점 t 에서 금융자산가격을 P_t 라고 할 때 시점 $t-1$ 에서 t 까지 한 기간 보유함으로써 나타난 자산가격변화인 수익은 $P_t - P_{t-1}$ 이 된다. 이 수익 (revenue)을 초기 자산가격에 대하여 상대적으로 표현한 것을 순수이익 (net return)이라 하고 R_t 로 표기한다. 즉, 순수

익을 R_t 는 다음과 같다.

$$R_t = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}} = \frac{P_t}{P_{t-1}} - 1. \tag{3.1}$$

또한 연속복리수익을 (continuously compounded return)을 의미하는 로그수익을 (log return) r_t 는 다음과 같이 정의된다.

$$r_t = \log(1 + R_t) = \log P_t - \log P_{t-1}. \tag{3.2}$$

이 때 자산가격 P_t 가 기하확률보행과정 (geometric random walk)을 따르면 로그수익률 r_t 는 서로 독립적이고 동일한 평균과 분산을 갖는 정규분포를 따른다 (Ruppert (2004) 제3장). 즉, 로그수익률은 자산가격의 로그값을 일차차분한 것으로써 만일 로그수익률이 가우시안 백색잡음과정을 따르게 되면 자산가격의 로그값은 확률보행과정을 따르게 된다. 따라서 금융자산가격의 로그값으로 구성된 시계열자료로부터 일차차분을 구하고 이 차분시계열을 모형 (2.1)에 적용하여 π 값을 추정할 수 있다.

우선 한국의 대표적인 주가지수 (stock index)인 KOSPI의 2007년부터 2016년까지 최근 10년간의 일별 증가자료를 이용하여 π 값을 추정하였다. Figure 3.1은 주어진 기간에 걸친 KOSPI자료의 다양한 시계열산포도로써, 원자료, 로그변환자료, 절대수익률, 로그수익률 등의 시계열자료에 대한 시점도 (time plot)을 나타내고 있다.

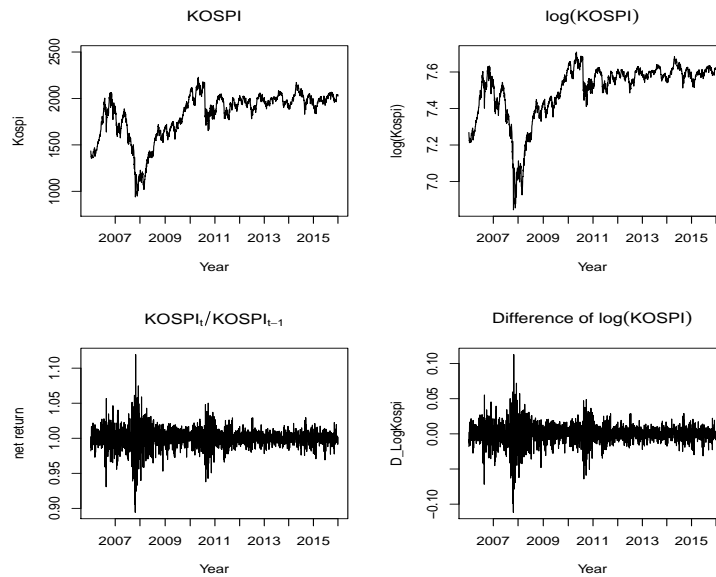


Figure 3.1 Plots of KOSPI from 2007 till 2016

π 의 추정은 해당 기간 동안 로그코스피의 일별자료가 가우시안 확률보행과정을 따른다는 전제조건에서 그 차분인 로그수익률을 모형 (2.1)에 적용하여 회귀모형을 적합시킨 후 회귀계수를 추정하고 식 (2.2)를 이용하여 계산하였다. 2007년 한 해의 자료를 사용하였을 때 관측값의 갯수는 $N = 246$ 이며 π 의 추정값은 3.928372이고 $N = 10$ 에서 $N = 246$ 까지 걸쳐 계산된 π 의 추정값들의 평균 (cum(mean))과 표준편차 (cum(std.dev))는 각각 3.542716과 0.6195643이다.

Table 3.1은 자료의 크기를 일년 단위로 계속 증가시키면서 동일한 절차를 수행한 결과들을 요약한 것이다. 2007년부터 2016년까지 10년에 걸친 코스피자료를 이용하였을 때 총 관측값의 크기는 $N =$

2480이었으며 계산된 π 값은 3.765093, $N = 10$ 에서 $N = 2480$ 까지 걸쳐 계산된 π 의 추정값들의 평균과 표준편차는 각각 3.765093과 0.2213169이다. Table 3.1과 Figure 3.2는 이 기간동안 표본크기를 1년 단위로 증가시켜가면서 계산된 π 의 추정값들과 표본이 증가할 때 추정값의 누적적인 변화를 보기 위하여 계산된 π 추정값들의 누적평균과 누적표준편차를 나타내고 있다.

해당 표와 그림을 종합하여 볼 때 비록 추정된 값들이 참값으로부터 벗어나 있기는 하지만 표본크기가 커질수록 일정한 값으로 수렴하는 모습을 보이며 또한 계산된 추정값들의 변동 또한 줄어들음을 알 수 있다. 여기서 추정값들이 표본의 크기를 증가시키더라도 참값이 아닌 다른 값으로 수렴되는 현상을 보이는 것은 관측된 시계열자료가 하나의 표본경로 (sample path)이기 때문에 충분히 예측될 수 있는 상황이다.

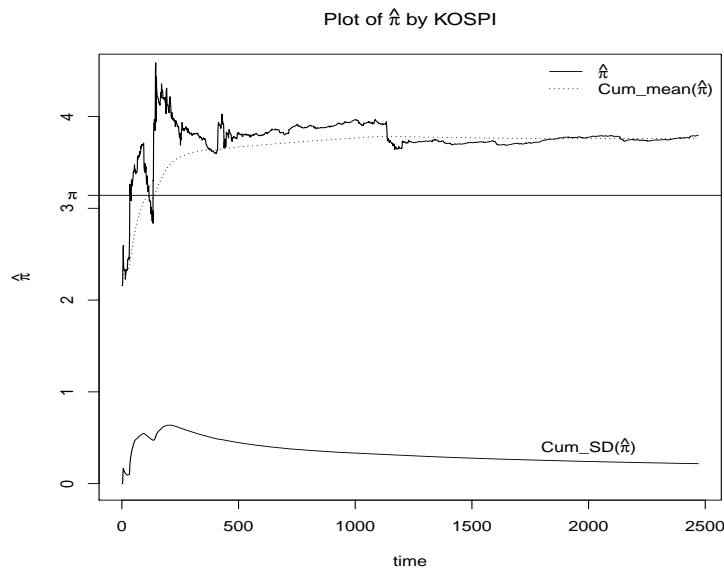


Figure 3.2 Plots of $\hat{\pi}$ by KOSPI

Table 3.1 The estimates of π using KOSPI from 2007 till 2016

year	N (year)	cum (N)	$\hat{\pi}$	cum (mean)	cum (std.dev)
2007	246	246	3.928372	3.542716	0.6195643
2008	248	494	3.772088	3.662417	0.4581667
2009	253	747	3.856937	3.713511	0.3795783
2010	251	998	3.94015	3.758788	0.3376543
2011	248	1246	3.649743	3.781361	0.3093839
2012	248	1494	3.699522	3.771387	0.2835037
2013	247	1741	3.698847	3.762685	0.2635536
2014	245	1986	3.775512	3.758946	0.2471260
2015	248	2234	3.749238	3.761207	0.2331139
2016	246	2480	3.765093	3.759616	0.2213169

다음은 환경비즈니스와 NICE평가정보가 시가총액, 매출액 (개별 재무제표 기준), 당기순이익 (개별 재무제표 기준) 등 3가지 요소를 기준으로 선정한 국내 10대 기업 중 2007년부터 2016년까지 최근 10년간의 주가기록자료가 있는 6개 기업을 대상으로 π 값을 추정하였다.

본 절차가 적용되기 위해서는 로그변환된 자료가 정규확률보행과정을 따른다는 전제조건이 성립되어야 하기 때문에 로그변환된 자료에 대하여 단위근 검정과 정규성 검정을 실시하였다. 실제 시계열자료의 단위근 검정을 다루는 다양한 예제가 있지만 (Lee, 2015; Ha 등, 2015) 여기서는 단위근 검정방법으로 ADF (Augmented Dickey-Fuller) 검정을 실시하였고 정규분포를 따르는지 보기 위해서는 JB (Jarque-Bera) 검정과 기본적인 왜도와 첨도를 계산하였다. 검정결과 고려한 6개 기업 중 POSCO를 제외한 5개 기업의 로그변환된 주가는 유의수준 5%에서 확률보행과정을 따른다고 할 수 있다. 그러나 정규성검정의 경우 JB검정의 결과 6개 기업 모두 정규분포를 따른다고 할 수 없었으며 이는 첨도값이 큰 것으로 보아 꼬리부분이 두텁고 중심부분이 뾰족한 전형적인 금융자료의 분포에 기인하였기 때문으로 보인다 (Table 3.2 참조).

Figure 3.3은 해당 기간 동안 시간이 누적될 때마다 계산된 π 의 추정값들의 누적평균과 누적표준편차를 그림으로 나타낸 것이다. 이 그림에서 나타나듯이 기아자동차를 제외한 다른 기업들은 π 값으로 수렴하는 양상을 보였다. 그 중에서도 삼성전자가 π 값에 가장 가까운 값으로 수렴함을 보여주고 있다. 2007년부터 2016년까지 10년동안 관측값의 개수는 2469개였으며 해당자료를 모두 이용하여 계산된 π 값은 기아자동차 주가의 경우 4.10136으로 가장 오차가 크며, 삼성전자주가지료의 경우 3.16134로써 π 와 가장 가까운 값으로 계산되었다.

Table 3.2 Estimates of π using stock prices from 2007 to 2016

Firm	N	$\hat{\pi}$	ADF (p-val)	JB (p-val)	Skew.	Kurt.
Hyundai Mobis	2469	3.70220	0.90911	0.00000	-0.27125	6.82484
Kia Motors	2469	4.10136	0.97579	0.00000	-0.34365	8.69082
LG chemical	2469	3.37558	0.57203	0.00000	0.74765	15.17750
POSCO	2469	3.54282	0.02269	0.00000	-0.04949	7.74902
SAMSUNG	2469	3.16134	0.39361	0.00000	0.03192	6.02774
SK Hynix	2469	3.58406	0.37185	0.00000	-0.05568	7.64065

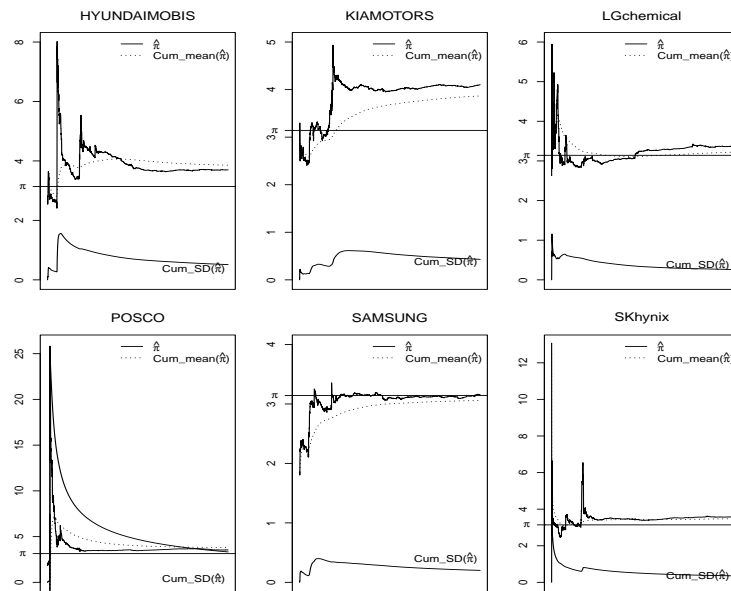


Figure 3.3 Plots of $\hat{\pi}$ for major Korean firms

3.2. 국제금융시계열자료

본 절에서는 해외 주요국의 대표적인 주가지수와 환율을 대상으로 π 값을 추정하였다. 고려한 주요국의 대표적인 주가지수로는 영국런던증권거래소의 FTSE, 홍콩의 HANGSENG, 미국의 NASDAQ, 일본의 NIKKEI, 대만의 TSEC 등이다. 해당지수의 2007년부터 2016년까지 10년동안의 시계열자료를 이용하였으며 Table 3.3에는 각 나라별 주가지수의 관측값의 수, π 의 추정값, 단위근검정과 관련된 p-값, 정규성검정과 관련된 p-값 및 왜도와 첨도 등이 제시되어있다.

주어진 분석에 의하면 미국의 대표적 주가지수인 NASDAQ자료를 이용하여 주어진 절차에 의해 계산된 π 의 추정값이 참값으로부터의 오차가 가장 컸으며, 대만의 TSEC자료에 의해 계산된 π 의 추정값이 참값에 가장 근접한 추정값을 제시하였다. 단위근 검정의 결과 다섯나라의 주가지수 모두 로그변환자료가 확률보행과정을 따른다고 할 수 있었지만, 국내 대기업의 주가와 마찬가지로 정규분포보다는 더 두터운꼬리부분을 가진 분포를 따른다고 할 수 있다. 추정된 π 의 자료의 증가에 따른 양상은 Figure 3.4에서 보여주듯이 세계적인 주가지수들에 의해 추정된 π 값들 역시 표본의 크기가 증가할수록 특정값으로 수렴하며 누적분산이 줄어드는 양상을 보이고 있다. 그러나 국내 주요기업의 주가지수와 달리 극한값이 π 와 약간 벗어나는 값으로 나타난다.

Table 3.3 The estimates of π using stock index from 2007 to 2016

Index	N	$\hat{\pi}$	ADF (p-val)	JB (p-val)	Skew.	Kurt.
FTSE	2507	4.62612	0.37815	0.00000	-0.12585	10.02140
HANGSENG	2451	4.38690	0.25070	0.00000	0.04637	11.16177
NASDAQ	2506	5.46775	0.43623	0.00000	-0.26832	9.94108
NIKKEI	2434	4.91068	0.57308	0.00000	-0.48922	10.33090
TSEC	2449	3.74439	0.41018	0.00000	-0.37736	6.52802

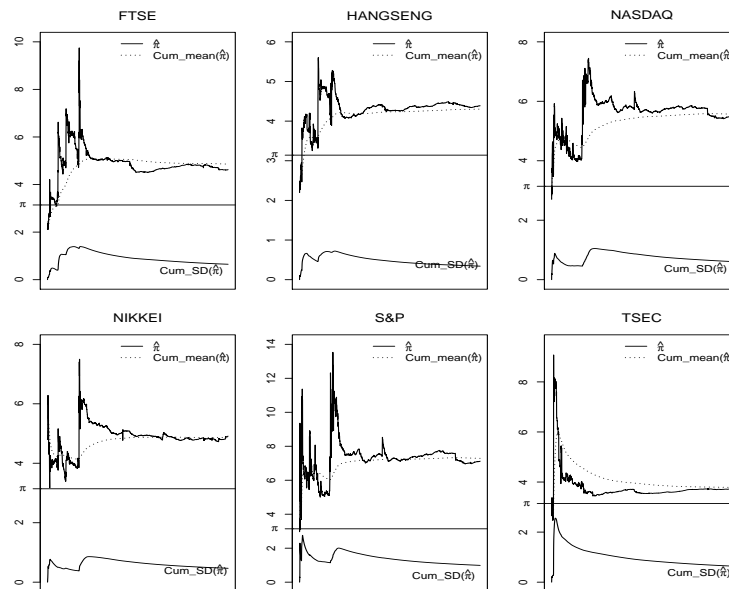


Figure 3.4 Plots of $\hat{\pi}$ for major global stock index

또한 미국달러와 일본 엔화대비 원화의 환율자료를 이용하여 π 값을 추정한 결과는 Table 3.4와 Figure 3.5에 제시되어 있다. 두 나라의 경우 모두 확률보행과정을 따른다고 할 수 있지만 엔화에 대한 원화의 환율자료를 이용하여 파이값을 추정하였을 때 오차가 더 적게 계산되었다.

Table 3.4 The estimates of π using foreign exchange rates from 2007 till 2016

country	N	$\hat{\pi}$	ADF (p-val)	JBb(p-val)	Skew.	Kurt.
USD	1235	5.02573	0.81042	0.00000	-0.72192	35.13516
JPY	1235	4.57118	0.81314	0.00000	0.04176	18.66176

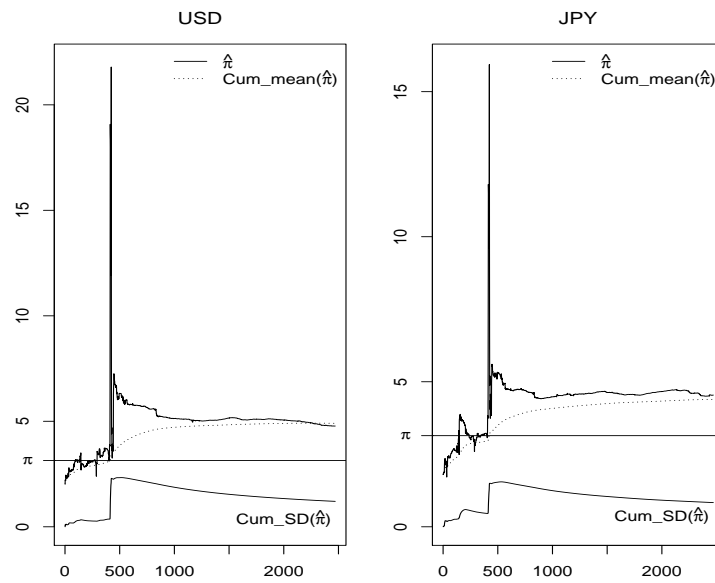


Figure 3.5 Plots of $\hat{\pi}$ for Korean won exchange rate to US dollar and Japan yen

4. 결론

본 연구에서는 대표적인 무리수이며 초월수인 π 의 값을 확률실험과 통계적 분포로부터 추정하는 절차를 살펴보았다. Buffon의 바늘과 정사각형에 내접하는 원의 확률실험에서 Monte Carlo방법을 통한 모의실험으로 π 의 값을 추정한 결과 실험횟수가 많아진다고 해서 추정값이 반드시 더 정확하게 추정하지는 않음을 알 수 있었다.

또한 π 는 확률보행과정을 따르는 단변량시계열자료를 이용하여 회귀모형을 설정하고 추정된 회귀계수를 통하여 계산된 π 의 일치추정량을 모의실험을 통하여 확인한 결과 표본을 크게할수록 참값에 더 가깝게 수렴함을 알 수 있었다. 이를 실제 금융시계열자료에 적합시켰을 때 로그변환된 자료가 확률보행과정을 따르기는 하였지만 전형적인 금융자료 분포의 특징처럼 꼬리부분이 두터운 분포를 취함으로써 정규분포를 취한다고는 볼 수 없었다. 또한 계산된 파이값은 표본크기가 커짐에 따라 수렴하였으며 누적표준편차 역시 감소함을 알 수 있었다. 이러한 특징은 국내 및 세계금융자료 모두 동일하게 나타난 양

상이었다. 그러나 국내주요기업자료로 추정했을 경우에는 6개 기업중 5개 기업이 π 에 수렴하는 모습을 보였지만, 세계주요국의 주가지수에 근거했을 경우에는 타이완을 제외하고는 모두 π 로부터 벗어난 값으로 수렴하였다. 또한 대미 및 대일본 환율자료를 적용하였을 때 엔화대비 원화의 자료가 π 에 더 가깝게 수렴하였다.

본 논문에서 고려한 금융시계열자료를 이용하여 π 값을 추정하였을 때 수렴정도는 다양하게 나타났다. 이는 주어진 회귀계수의 함수가 과이값으로 수렴하는 근거는 주가의 로그수익률이 확률보행과정을 따른다는 전제조건하에서 표본크기가 커질 때 가능한 이론적 도출인 반면 각 관측된 자료는 하나의 표본경로이기 때문에 당연히 발생할 수 있다고 생각된다. 또한 관측값의 개수에 따른 추정된 과이값들은 누적플롯에서 보듯이 π 값에 가까이 수렴하다가 다시 멀어지기도 한다. 이러한 양상은 효율적시장가설에 근거할 때 수렴하는 금융시계열의 경우 모든 정보들이 가격에 다 반영되어 나타났다고 볼 수 있으며 그렇지 않은 경우 정보의 반영이 제대로 이루어지지 않았다고 해석할 수 있겠다. 이러한 해석과 관련된 문제는 추후 π 값으로의 수렴정도와 각 자료에 내포된 효율적시장가설의 강도와 어떻게 관련이 되는지 추후 연구해 볼 과제라고 생각한다.

References

- Beckmann, P. (1971). *A History of π* , The Golem Press, New York.
- Chong, T. T. L. (2008). The empirical quest for π . *Computers and Mathematics with Applications*, **56**, 2722-2778.
- Ha, J. and Jung, J. M. (2015). A study on the slope sign test for explosive autoregressive models. *Journal of the Korean Data & Information Science Society*, **26**, 791-799.
- Lam, Y. S. and Ang, T. S. (1986). Circle measurements in ancient China. *Historia Mathematica*, **13**, 325-340.
- Lee, J. T. (2015). Long term trends in the Korean professional baseball. *Journal of the Korean Data & Information Science Society*, **26**, 1-10.
- Ramaley, J. F. (1969). Buffon's needle problem. *The American Mathematical Monthly*, **76**, 916-918.
- Ripley, B. (1986). *Stochastic simulation*, Wiley, New Jersey.
- Ruppert, D. (2004). *Statistics and finance: An introduction*, Springer, New York.
- Volkov, A. (1994). Calculation of π in ancient China: From Liu Hui to Zu Chongzhi. *Historia Scientiarum*, **4**, 139-157.

Approximation of π by financial historical data[†]

Dae-Heung Jang¹ · TaeWoong Uhm² · Seongbaek Yi³

¹²³Department of Statistics, Pukyong National University

Received 27 June 2017, revised 13 July 2017, accepted 17 July 2017

Abstract

The irrational number π is defined as the ratio of circumference of a circle to its radius and always becomes constant. This article does Monte Carlo approximation of its value using the famous Buffon's needle experiment and shows that its convergence is not always proportional to the sample size. We also do Monte Carlo simulations to see the convergence of the computed π values from the random walk series with independent normal increment. Finally we apply the theoretical derivation to various financial time series data such as KOSPI, stock prices of Korean big firms, global stock indices and major foreign exchange rates. The historical data shows that log transformed data random walk process but most of their first lagged data don't follow a normal distribution. More importantly the computed value from the ratio of the regression coefficient π tend to converge a constant, unfortunately not π . Using this result we could doubt on the efficient market hypothesis, and relate the degree of the hypothesis with the amount of deviation of the estimated π values.

Keywords: Buffon's needle, π , random walk.

[†] This work was supported by a Research Grant of Pukyong National University (2016 year).

¹ Professor, Department of Statistics, 45 Yongsoro Namgu, Busan, Korea.

² Ph.D. program, Department of Statistics, 45 Yongsoro Namgu, Busan, Korea.

³ Corresponding author: Professor, Department of Statistics, 45 Yongsoro Namgu, Busan, Korea.

E-mail: sbyi0108@gmail.com