

새로운 상호연결망 하프 버블정렬 그래프 설계 및 성질 분석

서정현¹ · 심현² · 이형욱^{3*}

Design and feature analysis of a new interconnection network : Half Bubblesort Graph

Jung-Hyun Seo¹ · Hyun Sim² · Hyeong Ok Lee^{3*}

¹Department of Computer Engineering, National University of Suncheon, Suncheon, Jeonnam 57922, Korea

²Center for Teaching and Learning, National University of Suncheon, Suncheon, Jeonnam 57922, Korea

^{3*}Department of Computer Education, National University of Suncheon, Suncheon, Jeonnam 57922, Korea

요 약

버블정렬 그래프는 노드 대칭이며 데이터 정렬 알고리즘에 활용 할 수 있다. 본 연구에서는 버블정렬 그래프의 망 비용을 개선한 하프 버블정렬 그래프를 제안하고 분석한다. 하프 버블정렬 그래프 HB_n 의 노드수는 $n!$ 이고 분지수는 $\lfloor n/2 \rfloor + 1$ 이다. 하프 버블정렬 그래프의 분지수는 버블정렬 그래프의 분지수의 $\cong 0.5$ 배 이고, 지름은 $\cong 0.9$ 배 이다. 버블정렬 그래프의 망 비용은 $\cong 0.5n^3$ 이고, 하프 버블정렬 그래프의 망 비용은 $\cong 0.2n^3$ 이다. 하프 버블정렬 그래프는 버블정렬 그래프의 서브 그래프임을 증명하였다. 추가로 라우팅 알고리즘을 제안하였고 지름을 분석하였다. 마지막으로 버블정렬 그래프와 망 비용을 비교 하였다.

ABSTRACT

The Bubble sort graph is node symmetric, and can be used in the data sorting algorithm. In this research we propose and analyze that Half Bubble sort graph that improved the network cost of Bubble sort graph. The Half Bubble sort graph's number of node is $n!$, and its degree is $\lfloor n/2 \rfloor + 1$. The Half Bubble sort graph's degree is $\cong 0.5$ times of the Bubble sort, and diameter is $\cong 0.9$ times of the Bubble sort. The network cost of the Bubble sort graph is $\cong 0.5n^3$, and the network cost of the half Bubble sort graph is $\cong 0.2n^3$. We have proved that half bubble sort graph is a sub graph of the bubble sort graph. In addition, we proposed a routing algorithm and analyzed the diameter. Finally, network cost is compared with the bubble sort graph.

키워드 : 상호연결망, 버블정렬 그래프, 망 비용, 지름

Key word : Interconnection network, Bubblesort, Network cost, Diameter

Received 29 May 2017, Revised 05 June 2017, Accepted 10 June 2017

* Corresponding Author Hyeong Ok Lee(E-mail:oklee@scnu.ac.kr, Tel:+82-61-750-3345)

Department of Computer Education, Suncheon National Univ. , Suncheon, Jeonnam 57922, Korea

Open Access <https://doi.org/10.6109/jkiice.2017.21.7.1327>

print ISSN: 2234-4772 online ISSN: 2288-4165

©This is an Open Access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution Non-Commercial License(<http://creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/>) which permits unrestricted non-commercial use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.
Copyright © The Korea Institute of Information and Communication Engineering.

I. 서 론

4차 산업혁명(4IR)을 이끌어갈 주요 기술로 인공지능, 로봇공학, 사물인터넷, 무인운송수단, 3차원 인쇄, 나노 기술이 꼽힌다. 이중 4차 산업혁명에서 주목받는 기술은 인공지능과 사물인터넷이다. 인공지능은 대용량의 데이터를 빠르게 학습하는 딥 러닝(deep learning)으로 구현되고 있다[1]. 딥 러닝이 미래에 제대로 구현되기 위해서는 인공지능이 실행될 수 있는 고성능 컴퓨터가 필수이다. 고성능의 컴퓨터를 제작하는 한 가지 방법으로 여러 대의 컴퓨터를 조합하는 병렬처리 기술이 사용되고 있다.

병렬처리를 위한 MIMD (multiple instruction multiple data)형 컴퓨터는 크게 공유 메모리를 갖는 다중 프로세서(multi-processor) 시스템과 분산 메모리를 갖는 다중 컴퓨터(multi-computer) 시스템으로 분류할 수 있다[2]. 다중 컴퓨터 시스템은 프로세스는 노드로 통신 링크는 에지로 사상하는 그래프로 표현 될 수 있다. 이 그래프를 상호연결망(interconnection network)이라고 한다. 다중 컴퓨터 시스템의 성능은 각 프로세서의 성능과 프로세서를 연결하는 상호연결망 구조 및 그에 따라 사용되는 알고리즘에 의해 결정된다. 특히 상호연결망 구조는 분지수(degree), 지름(diameter), 대칭성, 확장성, 고장 허용도 등의 성질에 따라 전체 시스템의 성능에 영향을 미친다[3,4].

상호연결망의 성능 평가 척도 중 망 비용(network cost)은 분지수×지름이다. 분지수는 하드웨어 설치비용이고 지름은 소프트웨어 처리비용이다. 일반적으로 분지수가 증가하면 지름은 짧아지고 분지수가 줄어들면 지름은 늘어나게 되어 분지수와 지름은 상호 역상관계에 있다[5].

상호연결망은 연결구조에 따라 3가지로 나눌 수 있다. 첫째, 메시(mesh) 부류[6]는 평면에 도형구조(사각형, 삼각형, 오각형, 육각형 등)로 표현하며 메시는 $n \times k$ 개 격자점에 노드를 나타낸다. 둘째, 하이퍼큐브(hypercube) 부류[7]는 2차원 메시를 3차원으로 재귀적으로 확장한다. 단 노드의 개수는 $2n$ 개로 제한된다. 셋째, 스타(star) 그래프 부류[8]는 $n!$ 개의 노드가 있을 때, $(n-1)!$ 개의 노드 묶음 n 개를 3차원 공간에서 재귀적으로 연결한다. 메시의 대안으로 하이퍼큐브가 제안되었고 하이퍼큐브의 대안으로 스타그래프가 제안되었다.

n 차원 스타그래프 n -star는 n 개의 자연수로 이루어진 순열을 노드로 갖고 노드의 첫 번째 심볼과 임의의 심볼을 교환한 노드 사이에 에지를 갖는다. 4-star는 1234, 1324, 1342 등 24개의 노드를 갖고 1234와 2134는 에지로 연결되어 있다. 스타 그래프 부류들에서 임의의 두 노드 사이의 라우팅 경로는 두 노드의 심볼을 일치시키는 정렬문제로 대체되기도 한다. 이 같은 성질을 이용한 상호연결망으로 pancake graph[8], burnt pancake graph[9], bubblesort graph[10] 등이 있다.

본 연구에서는 스타 그래프 부류인 버블정렬 그래프의 분지수를 1/2 정도 줄이면서 망 비용을 개선한 새로운 하프 버블정렬 그래프를 제안한다. 제안한 하프 버블정렬 그래프에서 부분그래프, 고장허용도, 연결 그래프, 해밀턴 그래프 등 기본적인 성질을 분석하고 라우팅 알고리즘을 제안한다.

본 논문의 구성은 다음과 같다. 2장에서 하프 버블정렬 그래프와 비슷한 스타 그래프 부류 상호연결망의 특성에 대해 살펴보고, 3장에서 본 논문에서 제안하는 하프 버블정렬 그래프를 정의하고 기본성질 및 지름을 분석한다. 추가하여 라우팅 알고리즘을 제시하고 버블정렬 그래프와 하프 버블정렬 그래프의 망 비용을 비교분석한다. 마지막으로 4장에서 결론을 맺는다.

II. 스타그래프 부류의 상호연결망

스타 그래프 부류는 n 개의 자연수로 이루어진 순열로 노드 주소를 표현하므로 노드 개수가 $n!$ 개 이고, 대략 n 정도의 분지수를 갖도록 구성되어 있다. 이러한 스타 그래프 부류로는 스타 그래프, (n, k) -스타 그래프, 팬케이크 그래프, 매크로스타 그래프, 버블정렬 그래프, 전위 그래프, Rotator 그래프 등이 제안되었다. 스타 그래프 S_n 은 노드 개수는 $n!$ 개, 분지수 $n-1$, 이분할 그래프이고 노드 및 에지 대칭이다. 지름은 $\lfloor 3(n-1)/2 \rfloor$ 이고 최대고장 허용도 등 여러 가지 유용한 성질이 있음이 알려졌다. 버블정렬 그래프 B_n 의 노드 B 의 주소가 $B = b_1b_2b_3 \dots b_{j+1} \dots b_n$ 이라 할 때, 노드 B 와 에지 $k_j, 1 \leq j \leq n-1$ 에 의해 인접한 노드의 순열은 심볼 b_j 와 b_{j+1} 이 서로 교환된 $b_1b_2b_3 \dots b_{j+1}b_j \dots b_n$ 이다.

버블정렬 그래프 B_n 의 라우팅은 n 개 정수를 오름차순으로 정렬하는 방식으로 수행하므로 지름은

$n(n-1)/2$ 이고, 에지를 중심으로 그래프를 분할 할 수 있는 계층적 연결망이다. 버블정렬 그래프 Bn 은 노드 대칭적이고 에지 대칭적이며, 이분 그래프(bipartite graph)이고 해밀톤 싸이클을 포함하고 있다. 이와 같이 스타 그래프와 비슷한 장점들을 가지고 있지만 같은 노드수를 갖는 스타 그래프와 비교하여 분지수와 지름이 큰 값을 가지므로 망 비용은 큰 값을 갖는다. 그림 1의 4차원 버블정렬 그래프는 3차원 버블정렬 그래프 4개로 이루어져 있다.

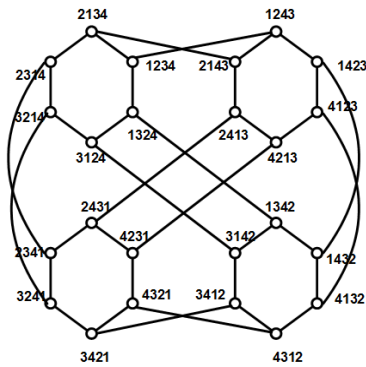


Fig. 1 4-dimension Bubblesort graph

드를 $B_f(s)$ 로 표현하고, 노드 S 와 에지 B_n 에 의해 인접한 노드를 $B_n(s)$ 로 표현한다. HB_n 을 구성하는 노드의 순열에서 동일한 부분 순열 u 을 갖는 노드로 구성된 부분 그래프를 클러스터라 하고 $HB_n(u)$ 로 나타낸다. 하프 버블정렬 그래프 HBn 은 연결된 그래프(connected graph)임이 알려졌다. 하프 버블정렬 그래프 $HB3$ 는 에지 정의에 의해 Bubblesort 그래프 $B3$ 와 동형이다. 그림 2의 4차원 하프 버블정렬 그래프는 3차원 하프 버블정렬 그래프 4개로 이루어져 있다.

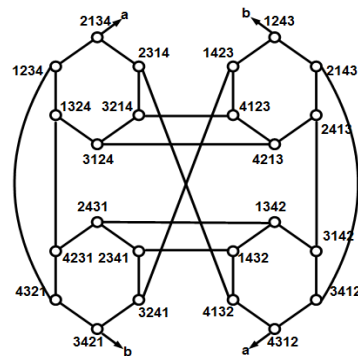


Fig. 2 4-dimension Half Bubblesort graph

III. 하프 버블정렬 그래프

3.1. 하프 버블정렬 그래프 정의와 성질

하프 버블정렬 그래프 HBn 의 노드는 $\langle N \rangle = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ 의 원소 n 개를 모두 사용한 순열로 표현하고, 에지는 에지 B_f , $1 \leq f \leq \lfloor n/2 \rfloor$ 과 에지 B_n 이 있다($n \geq 3$). 하프 버블정렬 그래프의 노드 S 의 주소를 $S = s_1s_2s_3 \dots s_f s_{f+1} \dots s_n$ 이라 할 때, 노드 S 와 에지 B_f 에 인접한 노드 $B_f(S)$ 주소는 $s_1s_2s_3 \dots s_{f+1}s_f \dots s_n$ 이고, 노드 S 와 에지 B_n 에 인접한 노드 $B_n(s)$ 주소는 $s_n \dots s_{f+1}s_f \dots s_3s_2s_1$ 이다. 따라서 하프 버블정렬 그래프 HBn 의 노드 개수는 $n!$ 개, 분지수는 $\lfloor n/2 \rfloor + 1$ 이다.

본 논문에서는 하프 버블정렬 그래프 HB_n 의 노드 $S = s_1s_2s_3 \dots s_f s_{f+1} \dots s_n$ 를 순열로 표현할 수 있으므로 노드 S 와 순열을 동일한 의미로 사용한다. 또한 하프 버블정렬 그래프 HBn 의 노드 S 와 에지 B_f 에 의해 인접한 노

드 $S = s_1s_2s_3 \dots s_f s_{f+1} \dots s_n$ 의 순열에서 왼쪽 기준으로 심볼 s_f , $1 \leq f \leq n$ 의 위치를 인덱스라 하고, 인덱스 $|s_f| = f$ 로 나타낸다.

하프 버블정렬 그래프 HBn 에서 에지시퀀스 $\langle K \rangle = \langle B_2, B_1, B_3 \rangle$ 이라 할 때, 노드 $S = s_1s_2s_3s_4 \dots s_n$ 에서 에지시퀀스 K 에 의한 경로는 $S \rightarrow B_2(S) \rightarrow B_1(B_2(S)) \rightarrow B_3(B_1(B_2(S)))$ 을 나타낸다. 노드 S 에서 에지시퀀스 $\langle K \rangle = \langle B_2, B_1, B_3 \rangle$ 에 의한 경로는 다음과 같다.

$$\text{경로: } S = s_1s_2s_3s_4 \dots s_n \rightarrow B_2(S) = s_1s_3s_2s_4 \dots s_n \rightarrow B_1(B_2(S)) = s_3s_1s_2s_4 \dots s_n \rightarrow B_3(B_1(B_2(S))) = s_3s_1s_4s_2 \dots s_n$$

본 논문에서는 노드 $s_1s_2s_3 \dots s_{j+1}s_j \dots s_n$ 에서 에지시퀀스 $\langle K \rangle = \langle B_f \rangle$, $1 \leq f \leq \lfloor n/2 \rfloor$ 의 에지를 적용할 때 기호 $\overline{B_f}$ 로 나타내고, 에지시퀀스를 구성하는 에지를 왼쪽부터 순서대로 모두 적용한 노드의 기호를 $\langle K \rangle(S)$ 로 표현한다. 또한 에지시퀀스 $\langle K \rangle = \langle B_f \rangle$, $1 \leq f \leq \lfloor n/2 \rfloor$ 를 구성하는 에지를 오른쪽부터 순서대로 모두 적용한 노드를 $\overline{\langle K \rangle}(S)$ 로 표현한다.

n -차원 하프 버블정렬 그래프의 분지수는 n -차원 Bubblesort 그래프의 분지수보다 대략 1/2 줄었다. 이러한 결과는 하프 버블정렬 그래프가 기존의 Bubblesort 그래프와 변형된 그래프보다 하드웨어의 비용을 1/2 정도 개선한 효과를 갖는다.

[정리 1] HB_n 는 $(\lfloor n/2 \rfloor + 1)$ -차원 버블정렬 그래프와 동형인 그래프를 부분그래프로 갖고, 이러한 부분그래프가 $n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times (\lfloor n/2 \rfloor + 2)$ 개 존재 한다 ($n \geq 4$).

증명 하프 버블정렬 그래프 HB_n 의 노드 $S = s_1 s_2 s_3 \dots s_j s_{j+1} \dots s_n$ 에 부속한 에지는 B_n 과 B_f 로 구성되어 있다($1 \leq f \leq \lfloor n/2 \rfloor$). HB_n 의 에지 $B_f = \{B_1, B_2, B_3, \dots, B_{\lfloor n/2 \rfloor}\}$ 이고, 에지 B_f 로 구성된 부분그래프는 $(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1)$ -차원 버블정렬 그래프의 에지와 동일하다. HB_n 그래프의 노드 주소를 나타내는 순열에서 인덱스 $1 \sim (\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1)$ 까지 심볼을 갖는 노드는 에지 $B_f = \{B_1, B_2, B_3, \dots, B_{\lfloor n/2 \rfloor}\}$ 에 인접한 노드들이므로 $(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1)$ -차원 Bubblesort 그래프와 동형이다. 따라서 HB_n 에서 에지 B_f 를 모두 포함하면서 생성 가능한 $(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1)$ -차원 Bubblesort 그래프와 동형 구조 개수는 노드의 순열 인덱스에서 $(\lfloor n/2 \rfloor + 2) \sim n$ 까지 $n - (\lfloor n/2 \rfloor + 1)$ 개 심볼에 대한 순열 개수이므로 $n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times (\lfloor n/2 \rfloor + 2)$ 개 존재한다. □

[정리 2] 하프 버블정렬 그래프 HB_n 는 재귀적 확장성을 갖는다($n \geq 3$).

증명 하프 버블정렬 그래프 HB_n 가 재귀적 확장성이 있음을 $n=2k$ 와 $n=2k+1$ 로 나누어 증명한다.

(경우1) 하프 버블정렬 그래프 HB_{2k} 에서 HB_{2k+1} 로 확장($k \geq 2$).

하프 버블정렬 그래프 HB_{2k} 의 노드 S 의 주소를 $s_1 s_2 s_3 \dots s_k \dots s_{2k-1} s_{2k}$ 이라 하자. 하프 버블정렬 그래프 HB_{2k} 를 구성하는 에지는 에지 $B_j = \{B_1, B_2, B_3, \dots, B_k\}$ 과 에지 B_{2k} 로 구성되어 있다. HB_{2k} 에서 에지 $B_j = \{B_1, B_2, B_3, \dots, B_k\}$ 를 갖는 그래프는 버블정렬 그래프 B_{k+1} 와 동형이다. 하프 버블정렬 그래프 HB_{2k} 의 부분 그래프인 버블정렬 그래프 B_{k+1} 와 동형인 그래프의 개

수는 $(k+2) \times (k+3) \times \dots \times (2k)$ 개 있다. HB_{2k+1} 의 노드 S' 의 주소를 $s'_1 s'_2 s'_3 \dots s'_k \dots s'_{2k-1} s'_{2k} s'_{2k+1}$ 이라 할 때, HB_{2k+1} 를 구성하는 에지는 에지 $B_j = \{B_1, B_2, B_3, \dots, B_k\}$ 과 에지 B_{2k+1} 로 구성되어 있다. HB_{2k+1} 에서 에지 $B_j = \{B_1, B_2, B_3, \dots, B_k\}$ 를 갖는 부분 그래프는 버블정렬 그래프 B_{k+1} 와 동형이다.

따라서 하프 버블정렬 그래프 HB_{2k} 에서 HB_{2k+1} 로 확장하는 경우 HB_{2k} 의 부분 그래프인 버블정렬 그래프 B_{k+1} 와 동형인 그래프를 $(k+2) \times (k+3) \times \dots \times (2k)$ 개 만들고, 각 노드의 주소 순열에서 심볼 s_{2k+1} 을 추가한다. 하프 버블정렬 그래프 HB_{2k} 에서 에지 B_{2k} 를 대신하여 에지 B_{2k+1} 을 추가하면 된다. 하프 버블정렬 그래프 HB_{2k+1} 는 HB_{2k} 와 동일한 에지 $B_j = \{B_1, B_2, B_3, \dots, B_k\}$ 를 갖고, 에지 B_{2k+1} 을 가지므로 분지수는 HB_{2k} 와 동일하게 $k+1$ 개를 갖는다.

(경우2) 하프 버블정렬 그래프 HB_{2k+1} 에서 HB_{2k+2} 로 확장($k \geq 2$).

하프 버블정렬 그래프 HB_{2k+1} 의 노드 S 의 주소를 $s_1 s_2 s_3 \dots s_k \dots s_{2k-1} s_{2k} s_{2k+1}$ 이라 하자. 하프 버블정렬 그래프 HB_{2k+1} 를 구성하는 에지는 에지 $B_j = \{B_1, B_2, B_3, \dots, B_{\lfloor \frac{2k+1}{2} \rfloor}\}$ 과 에지 B_{2k+1} 로 구성되어 있다. HB_{2k+1} 에서 에지 $B_j = \{B_1, B_2, B_3, \dots, B_{\lfloor \frac{2k+1}{2} \rfloor}\}$ 를 갖는 부분 그래프는 버블정렬 그래프 B_{k+1} 와 동형이다. 하프 버블정렬 그래프 HB_{2k+1} 에서 부분 그래프인 버블정렬 그래프 B_{k+1} 와 동형인 그래프의 개수는 $(k+2) \times (k+3) \times \dots \times (2k+1)$ 개 있다.

HB_{2k+2} 의 노드 S' 의 주소를 $s'_1 s'_2 s'_3 \dots s'_k \dots s'_{2k+1} s'_{2k+2}$ 이라 할 때, HB_{2k+2} 를 구성하는 에지는 $B_j = \{B_1, B_2, B_3, \dots, B_{\lfloor \frac{2k+1}{2} \rfloor}, B_{\frac{2k+2}{2}}\}$ 과 에지 B_{2k+2} 로 구성되어 있다. HB_{2k+2} 에서 에지 $B_1, B_2, B_3, \dots, B_{\lfloor \frac{2k+1}{2} \rfloor}, B_{\frac{2k+2}{2}}$ 를 갖는 부분 그래프는 버블정렬 그래프 B_{k+2} 와 동형이다.

따라서 하프 버블정렬 그래프 HB_{2k+1} 에서 HB_{2k+2} 로 확장하는 경우 HB_{2k+1} 의 부분 그래프인 버블정렬 그래프 B_{k+1} 와 동형인 그래프를 $(k+2) \times (k+3) \times \dots \times (2k+1)$ 개 만들고, HB_{2k+1} 의 에지 B_{2k+1} 를 대신하여 에지 B_{2k+2} 을 추가한다. 따라서 하프 버블정렬 그래프 HB_{2k+2} 는 HB_{2k+1} 보다 에지 B_j 가 한 개 더 증가하므로 분지수는 HB_{2k+1} 보다 1 증가한 $k+2$ 개를 갖는다. □

3.2. 라우팅 알고리즘

본 절에서는 간단한 라우팅 방법을 제안하고 그에 따른 지름의 상한 값을 분석한다. 이러한 결과를 기반으로 버블정렬 그래프와 하프 버블정렬 그래프에 대해 망 비용을 비교한다. 그래프의 라우팅은 출발노드 S의 순열 주소를 목적노드 V의 주소로 변환하는 과정이고, 이 과정에서 이용하는 에지와 이용된 에지에 인접한 노드를 순서대로 나열한 것이 라우팅 경로이다. 라우팅은 크게 분류작업과 정렬작업으로 이루어진다.

출발노드 $S = s_1 s_2 \dots s_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1} s_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \dots s_{n-1} s_n$, 목적노드 $V = v_1 v_2 v_3 \dots v_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1} v_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} v_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1} \dots v_{n-1} v_n$ 라고 하자. HB_n 의 임의의 노드 S의 주소 순열에서 인덱스 $1 \sim (\lfloor n/2 \rfloor + 1)$ 를 정렬가능영역(이후 가능영역) 이라 하고, 인덱스 $(\lfloor n/2 \rfloor + 2) \sim n$ 를 정렬불가능영역(이후 불가능영역)이라 한다. 표기의 편의를 위해 가능영역의 마지막 인덱스 $\lfloor n/2 \rfloor + 1$ 을 K 라고 한다. HB_n 의 가능영역에 있는 심볼은 에지 B_j 에 의해 위치 $1 \sim K$ 로 심볼을 이동할 수 있다. 불가능영역 $(K+1) \sim n$ 에 있는 심볼은 불가능영역에서 심볼 교환이 이루어질 수 없으므로 에지 B_n 을 이용하여 가능영역으로 심볼을 이동한 후 B_j 를 이용하여 위치 이동이 가능하다. 먼저 분류작업을 위한 몇 가지 보조정리를 정리한다.

[보조정리 1] HB_n 의 임의의 노드 $W = w_1 w_2 w_3 \dots w_i \dots w_{n-1} w_n$ 에서 가능영역에 있는 심볼 w_i 를 가능영역의 임의의 인덱스 j 로 이동시키는 방법은 다음 설명과 같고 두 노드 사이의 경로 길이는 $|i - j|$ 이다.

설명: 전위에 있는 심볼 w_i 를 전위의 임의의 인덱스 j 로 이동시키는 방법은 다음과 같다.

$i < j$ 인 경우: $W \rightarrow B_i \rightarrow B_{i+1} \rightarrow B_{i+2} \dots \rightarrow B_{j-1}$
 $i > j$ 인 경우: $W \rightarrow B_{i-1} \rightarrow B_{i-2} \rightarrow B_{i-3} \dots \rightarrow B_j$ □

[보조정리 2] HB_n 의 임의의 노드 $W = w_1 w_2 w_3 \dots w_i \dots w_j \dots w_{n-1} w_n$ 에서 가능영역에 있는 심볼 w_i 를 불가능영역으로 이동시키고 불가능영역의 심볼 w_j 를 가능영역으로 이동시키는 방법은 설명과 같고 두 노드 사이의 경로 길이는 n 이 짝수이면 $j-i+3$ 이고 n 이 홀수이면 $j-i+2$ 이다. 왜냐하면 아래 설명

에 따른 경로 길이는 $(K-i) + K-(n-j+1) + 2 = 2K-n+j-i+1$ 이다.

$K = \lfloor n/2 \rfloor + 1$ 이므로 n 이 짝수이면 $2K = n+2$ 이고 n 이 홀수이면 $2K = n+1$ 이다. 따라서 경로 길이는 n 이 짝수이면 $j-i+3$ 이고, n 이 홀수이면 $j-i+2$ 이다.

설명: 가능영역에 있는 w_i 를 불가능영역으로, 불가능영역에 있는 w_j 를 가능영역으로 보내기 위한 방법은 다음과 같다.

$W \rightarrow$ 보조정리1에 따라 w_i 를 인덱스 K 로 이동 $\rightarrow B_n \rightarrow$ 보조정리1에 따라 w_j 를 인덱스 K 로 이동 $\rightarrow B_n$ □

분류작업은 가능영역에 K 보다 적거나 같은 심볼을, 불가능영역에 K 보다 큰 심볼을 분류하는 방법이 있고, 반대로 가능영역에 $n-K$ 보다 큰 심볼을, 불가능영역에 $n-K$ 보다 적거나 같은 심볼을 분류하는 방법이 있다. 전자를 방법 A, 후자를 방법 B라고 한다.

라우팅에서 분류작업은 방법 A와 B중 경로 길이가 적은 하나를 선택해야 한다. 가능영역에서 K 보다 큰 심볼집합을 seA라고 하고 seA의 원소 개수를 |seA|라고 한다. 불가능영역에서 K 보다 적거나 같은 심볼집합을 sdA라고 하고 sdA의 원소 개수를 |sdA|라고 한다. 교환 개수 $E = |seA| = |sdA|$ 이다. 가능영역에서 $n-K$ 보다 적거나 같은 심볼집합을 seB라고 하고 seB의 원소개수를 |seB|라고 한다. 불가능영역에서 $n-K$ 보다 큰 심볼집합을 sdB라고 하고 sdB의 원소개수를 |sdB|라고 한다. 교환 개수 $E = |seB| = |sdB|$ 이다.

[보조정리 3] HB_n 에서 방법 A, B의 분류작업의 경로 길이 plA, plB 는 다음과 같이 2경우로 나눈다.

(경우1) n 이 짝수일 경우
 $plA =$ 집합 sdA의 심볼 인덱스의 합 - 집합 seA의 심볼 인덱스의 합 + $3E$
 $plB =$ 집합 sdB의 심볼 인덱스의 합 - 집합 seB의 심볼 인덱스의 합 + $3E$

(경우2) n 이 홀수일 경우
 $plA =$ 집합 sdA의 심볼 인덱스의 합 - 집합 seA의 심볼 인덱스의 합) + $2E$
 $plB =$ 집합 sdB의 심볼 인덱스의 합 - 집합 seB의 심볼 인덱스의 합) + $2E$

설명 : 보조정리 2에 따라 가능영역에 있는 w_i 를 불능영역으로, 불능영역에 있는 w_j 를 가능영역으로 보내기 위한 경로 길이는 n 이 짝수이면 $j-i+3$ 이고, n 이 홀수이면 $j-i+2$ 이다. 이것을 분류대상 심볼 E 개에 대해 모두 적용하면 E 개의 j 의합에서 E 개의 i 의합을 빼고 $3E$ 또는 $2E$ 를 더하면 된다. □

방법 A는 분류작업 이후에 정렬작업을 위해 에지 B_n 이 두 번 필요하고 방법 B는 분류작업 이후에 정렬작업을 위해 에지 B_n 이 한 번 필요하다. 집합 sdA 의 m 번째 원소를 $sdA(m)$ 로 표시한다. 다음은 라우팅 알고리즘이다.

```

START
IF( $plB \leq plA$ ) then //방법 B
For( $m=1; m \leq E; m++$ ) [보조정리 2]에 따라  $seA(m)$ 와  $sdA(m)$ 를 교환; END-For
인덱스  $1 \sim K$ 에 있는 심볼을 [보조정리 1]에 따라 내림차순으로 정렬
 $B_n$ 
인덱스  $1 \sim (n-K)$ 에 있는 심볼을 [보조정리 1]에 따라 오름차순으로 정렬
ELSE //방법 A
For( $m=1; m \leq E; m++$ ) [보조정리 2]에 따라  $seB(m)$ 와  $sdB(m)$ 를 교환; END-For
인덱스  $1 \sim K$ 에 있는 심볼을 [보조정리 1]에 따라 오름차순으로 정렬
 $B_n$ 
인덱스  $1 \sim (n-K)$ 에 있는 심볼을 [보조정리 1]에 따라 내림차순으로 정렬
 $B_n$ 
END-IF
END
    
```

[정리 3] 하퍼버블정렬 그래프 HB_n 에서 임의의 두 노드 사이의 라우팅 경로 길이를 T라고 하면 라우팅 알고리즘에 의한 정렬작업의 길이는 $\frac{2K^2+n^2-n-2nK}{2}$ 이고 분류작업의 길이는 $\frac{n(n+1)}{2} - \frac{(n-E)((n-E)+1)}{2} - \frac{E(E+1)}{2} + 3E$ 이다. 라우팅 경로 길이 T의 상한인 지름은 $0.4375n^2 + 0.25n + 4.25$ 이하이다.

증명 : 라우팅은 분류작업과 정렬작업으로 나뉜다. 먼저 정렬작업의 라우팅 경로길이를 살펴본다. 방법 A,

B 모두 인덱스 $1 \sim K$ 에 있는 심볼과 인덱스 $1 \sim (n-K)$ 에 있는 심볼을 정렬해야한다. 이 경우 경로길이 = $\frac{K(K-1)}{2} + \frac{(n-K)(n-K-1)}{2} = \frac{2K^2+n^2-n-2nK}{2}$ 이다. 여기에 방법 A는 B_n 이 2회, 방법 B는 B_n 이 1회가 추가된다.

다음으로 분류작업의 경로길이를 살펴본다. 방법 A의 경우 분류작업에 포함되는 심볼의 개수 $|seA| = |sdA| \leq (n-K)$ 이다. 마찬가지로 방법 B의 경우 분류작업에 포함되는 심볼의 개수 $|seB| = |sdB| \leq (n-K)$ 이다. 왜냐하면 분류작업에 포함되는 심볼의 개수가 불능영역의 크기 $(n-K)$ 보다 클 수 없기 때문이다. 또한 $|sdA| + |sdB| = (n-K)$ 이고 $|seA| + |seB| = (n-K)$ 이다. 왜냐하면 불능영역에 있는 심볼의 개수는 $(n-K)$ 이기 때문이다. $|sdA|$ 와 $|sdB|$ 그리고 $|seA|$ 와 $|seB|$ 는 서로 trade-off 관계에 있다. 예를 들어 HB_{17} 일 경우 $K=9, n-K=8$ 이다. $|sdA|=4$ 이면 $|sdB|=4$ 이고 $|sdA|=5$ 이면 $|sdB|=3$ 이다. 라우팅 알고리즘은 방법 A, B중 경로길이가 적은 방법을 선택하기 때문에 최악의 경우는 $|sdA|=|sdB| = (n-K)/2$ 인 경우이다. 또한 plA 와 plB 는 분류해야 할 심볼이 가능영역의 왼쪽 가장자리와 불능영역의 오른쪽 가장자리에 있을 때 가장 크다. 왜냐하면 보조정리 2에 따라 두 심볼을 교환할 때 인덱스 K 로 이동해야 하는데 K 에 멀수록 경로길이가 길다. plA 와 plB 는 n 이 홀수일 때 보다 짝수일 때 더 크다. 따라서 분류작업 라우팅 경로의 상한은 n 이 짝수이고, n 이 짝수일 경우 교환 개수 $E = \text{Min}(|sdA|, |sdB|) = \lfloor (n-K)/2 \rfloor$ 이며 분류해야 할 심볼이 모두 가장자리부터 채워진 경우이다. n 이 짝수일 경우 $K = n/2 + 1$ 이므로 $E = \lfloor (n-K)/2 \rfloor = \lfloor (n+2)/4 \rfloor$ 이다. 마지막으로 plA 와 plB 가 같다고 가정하면 방법 A는 방법 B보다 경로길이가 1크다.

분류작업의 라우팅 길이 = sdA 의 심볼 인덱스의 합 - seA 의 심볼 인덱스의 합 + $3E$

$$\begin{aligned}
 &= (n+n-1+n-2+\dots+n-E) - (1+2+3+\dots+E) + 3E \\
 &= \frac{n(n+1)}{2} - \frac{(n-E)((n-E)+1)}{2} - \frac{E(E+1)}{2} + 3E
 \end{aligned}$$

라우팅 경로 길이의 상한 T = 분류작업의 상한 + 정렬작업의 상한 + B_n 회수이다.

$$= \frac{n(n+1)}{2} - \frac{(n-E)(n-E+1)}{2} - \frac{E(E+1)}{2} + 3E +$$

$\frac{2K^2+n^2-n-2nK}{2}+2$, 여기에서 식을 간소화하기 위해

모든 항에 2를 곱하고 마지막에 2로 나눈다.

$$= n(n+1) - (n-E)(n-E+1) - E(E+1) + 6E + 2K^2 + n^2 - n - 2nK + 4$$

최악의 경우 $E = (n+2)/4$, $K = n/2+1$ 이므로

$$= n^2 - n + (2n+6)\frac{(n+2)}{4} - 2\left(\frac{(n+2)}{4}\right)^2$$

$$+ 2\left(\frac{n}{2}+1\right)^2 - 2n\left(\frac{n}{2}+1\right) + 4$$

$= 0.875n^2 + 0.5n + 8.5$ 식의 값을 원래대로 돌리기 위해 모든 항을 2로 나누면

$$= 0.4375n^2 + 0.25n + 4.25 \quad \square$$

버블정렬 그래프의 분지수는 $n-1$ 이고 지름은 $0.5n^2 - 0.5n$ 이므로 망 비용은 $(n-1)(0.5n^2 - 0.5n) = 0.5n^3 - n^2 + 0.5n$ 이다. 하프 버블정렬 그래프 분지수는 $\cong 0.5n$ 이고 지름 $0.4375n^2 + 0.25n + 4.25$ 이므로 망 비용은 $0.21875n^3 + 0.125n + 2.125$ 이다. 그림 3에 X축은 차원, Y축은 망 비용을 나타낸다. 하프 버블정렬 그래프는 차원이 증가할수록 버블정렬 그래프보다 망 비용이 우수하다.

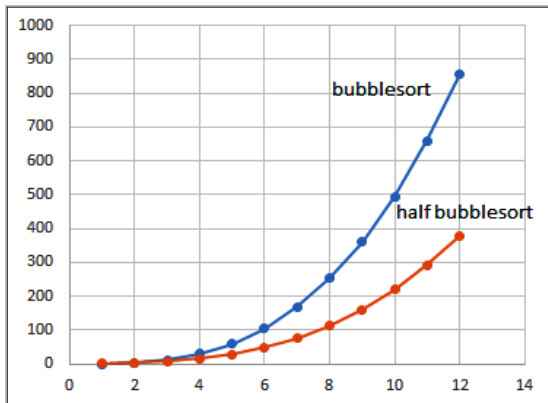


Fig. 3 compare network cost

IV. 결론

본 논문에서는 버블정렬 그래프의 망 비용을 개선하기 위해 버블정렬 그래프의 분지수를 대략 1/2 줄인 새로운 하프 버블정렬 그래프를 설계하는 방법을 제안하

였다. 하프 버블정렬 그래프는 최대고장 허용도를 갖고 있어 시스템의 노드나 통신라인에 고장이 발생해도 시스템이 연결되어 있어 고장 감내가 높고, 동일한 노드 개수를 갖는 버블정렬 그래프보다 분지수가 대략 1/2로 줄어들었지만 연결된 그래프 구조를 갖는다. 또한 Half 버블정렬 그래프는 재귀적 확장성 성질을 갖고 있으며 $(\lfloor n/2 \rfloor + 1)$ -차원 버블정렬 그래프와 동형인 그래프를 부분그래프로 갖고 있어 기존의 버블정렬 그래프에서 개발된 알고리즘을 활용할 수 있는 장점이 있다. 이러한 결과는 본 연구에서 제안한 하프버블정렬 그래프가 병렬 처리를 위한 상호연결망으로 망비용 측면에서 버블정렬 그래프보다 효율적임을 알 수 있다.

ACKNOWLEDGMENTS

This paper was supported by Sunchon National University Research Fund in 2016

REFERENCES

- [1] S. Klaus, *The fourth industrial revolution*. Penguin UK, 2017.
- [2] J. H. Seo, "Three-dimensional Petersen-torus network: a fixed-degree network for massively parallel computers," *The Journal of Supercomputing*, vol. 64, no 3, pp. 987-1007, Jun. 2013.
- [3] P. Matthew, et al, "There and Back Again: Optimizing the Interconnect in Networks of Memory Cubes," *Proceedings of the 44th Annual International Symposium on Computer Architecture*, pp. 678-690, 2017.
- [4] N. Y. Phing, et al, "Topology Design of Extended Torus and Ring for Low Latency Network-on-Chip Architecture," *Telecommunication Computing Electronics and Control*, vol. 15, no. 2, pp. 869-876, Jun. 2017.
- [5] C. H. Yeh and E. A. Varvarigos, "Macro-Star Networks: Efficient Low-Degree Alternatives to Star Graphs," *IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems*, vol. 9, no. 10, pp. 987-1003, Oct. 1998.
- [6] Q. Dong, J. Zhou, et al, "Embedding a mesh of trees in the crossed cube." *Information Processing Letters*, vol. 112, no. 14-15, pp. 599-603, Aug. 2012.

- [7] H. Hossein, and A. Patooghy. (2017, Apr.). Fault-tolerant routing methodology for hypercube and cube-connected cycles interconnection networks. *The Journal of Supercomputing* [Online]. pp. 1-20. Available: <https://link.springer.com/article/10.1007/s11227-017-2033-7>.
- [8] S. B. Akers and B. Krishnamurthy, "A group-theoretic model for symmetric interconnection networks," *IEEE Transactions on Computers*, vol. 38, no. 4, pp. 555-566, Apr. 1989.
- [9] M. Heydari and I. Sudborough. "On sorting by prefix reversals and the diameter of pancake networks," *In Proceedings of the First Heinz Nixdorf Symposium on Parallel Architectures and Their Efficient Use*, London, UK, pp. 218-227, May 1993.
- [10] Z. T. Chou, et al, "Bubblesort star graphs: a new interconnection network," in *Proceedings of the Parallel and Distributed Systems*, Tokyo, Japan, pp. 41-48, Jun. 1996.



서정현(Jung-Hyun Seo)

2008년 순천대학교(컴퓨터과학과) 이학박사
※관심분야 : 상호연결망, 알고리즘, 네트워크



심현(Hyun Sim)

2011-현재 순천대학교 교수학습개발센터 전임연구원
2016년 순천대학교 (교육학과) 교육학박사
2009년 순천대학교 (컴퓨터과학과) 이학박사
※관심분야 : 알고리즘, 네트워크, 교육공학



이형옥(Hyeong Ok Lee)

2002-현재 순천대학교 컴퓨터교육과 교수
1999년 전남대학교(전산통계학과) 이학박사
※관심분야 : 알고리즘, 그래프이론, 교구용 로봇