한국초등수학교육학회지 21(1) 135-160.
2017. 02. 28

Journal of Elementary Mathematics Education in Korea 21(1) 135-160.
February 28. 2017.

비와 비율에 대한 초등 수학 교과서 비교 분석[1,]

장혜원[2] · 임미인[3] · 유미경[4] · 박혜민[5] · 김주숙[6] · 이화영[7]

2009 개정 교육과정에 따른 6학년 수학 교과서가 현장에 적용된 이후, 1학기 비와 비율 단원이 다소 어려워 학생들에게 학습 부담으로 작용한다는 지적이 있어왔다. 이에 본 연구에서는 국내외 수학 교과서의 비와 비율 관련 내용을 종적·횡적으로 비교 분석하여 적절한 비와 비율 지도 방안을 모색하고자 하였다. 구체적으로 국내의 5차부터 현행 2009 개정 교육과정까지의 수학 교과서를 종적 분석 대상으로, 일본, 싱가포르, 홍콩, 핀란드 수학 교과서를 횡적 분석 대상으로 선정하였다. 분석 기준은 각 교과서에 제시된 비와 비율 관련 학습 요소 및 지도 순서, 용어의 정의, 관련 개념의 도입 방법이다. 분석 결과를 토대로 우리나라 교육과정별 및 각 국가별로 비와 비율 관련 내용의 구현 여부 및 방법에 있어서 특징과 차이점을 파악하였다. 각각에 대한 구체적인 결과를 제시하고, 그에 기초하여 차기 교과서 개발 시 비와 비율 단원 구성에 대한 몇 가지 시사점을 도출하였다.

주제어: 비, 비율, 초등 수학 교과서, 교육과정별 비교, 국제 비교

Ⅰ. 서 론

2015 개정 교육과정에 따른 초등학교 수학 교과서가 개발되고 있는 시점에서 새 교과서에서는 주요 수학 내용이 어떻게 구현될 것인지에 대한 수학 교육계 및 사회적 관심이 높다. 특히 현행 6학년 1학기 교과서의 비와 비율 단원에 대해서는 학생들이 경험하는 어려움과 관련하여 학교 현장 및 수학 교육계에서 다양한 의견이 제기되고 있다. 수학의 중요한 주제 중 하나인 비와 비율은 실제로 우리 생활과 밀접하게 연계되어 있기 때문에 초등학교 수학에서 의미 있게 다루어질 필요가 있고, 따라서 그 내용이 교과서에서 어떻게 구현될 것인지에 대한 관심은 당연한 현상일 것이다.

이러한 시대 상황 및 비와 비율 학습의 중요성을 고려할 때 필연적인 고민은, 과연 비와 비율을 어떻게 지도해야 하는지의 문제일 것이다. 비와 비율은 양 사이의 관계와 관련된다. 실제로 일상생활에서 양적 사고를 할 때 양 사이의 관계를 종종 다루게 되며, 이는 수를 다룰 때 수 자체뿐만 아니라 수들 사이의 관계에도 주목함을 의미한다. 예컨대, 실생

1) 이 논문은 2017년도 교육부의 재원으로 한국과학창의재단의 지원을 받아 수행된 성과물임.
2) [제1저자] 서울교육대학교
3) [교신저자] 서울오류초등학교
4) 서울양진초등학교
5) 서울한강초등학교
6) 서울명신초등학교
7) 한국과학창의재단

활에서 많이 사용되는 표현 중 ‘올해 나의 수입이 10% 증가하였다.’는 단순히 하나의 수치가 아니라 수들 간의 관계를 고려할 때 가능한 표현이다(김성준 외, 2015). 이처럼 양 사이의 관계에 초점을 맞출 때, 두 양의 가법적 또는 승법적 비교가 가능하다. 권미숙, 김남균(2009), Lamon(1999)은 두 양 사이의 승법적 관계에 주목하는 상대적 크기 비교와 두 양의 가법적 관계에 주목하는 절대적 크기 비교 중에서 상대적 크기 비교에 대한 경험을 통해 이후 비례 추론 능력을 신장시킬 수 있다고 하였다. 본 연구의 관심인 비와 비율은 승법적으로 양을 비교하는 것, 즉 a가 b의 몇 배인지 알아보는 것과 관련된다.

비와 비율을 생각할 수 있는 능력은 형식적인 사고를 하는 데 중요한 기본 요소 중 하나이며 학생이 비와 비율에 대한 개념 형성에 실패하게 되면 이후 대수, 기하는 물론 양적인 사고와 이해를 요구하는 학습에 어려움을 겪게 되므로 학교 수학에서 비와 비율을 단순히 공식이나 기호를 무의미하게 조작하는 것이 아닌, 그 의미를 이해하도록 지도해야 한다(김성준 외, 2015). 이와 관련하여 다수의 연구에서 비와 비율을 의미 있게 지도해야 할 필요 및 구체적인 지도 방안에 대해 언급하고 있다. 예컨대, Streefland(1985)는 학생들이 흥미를 가질 수 있는 현실과 밀접하게 관련된 상황에서 비와 비율 개념을 형성하도록 지도해야 하며, 그 개념과 관련된 실제적인 활용도 충분히 다루어야 한다고 하였다. 또한 비와 비율의 교수·학습에서 기하적 맥락을 적극 활용하고, 비를 수적으로 처리함에 있어서 여러 가지 도식을 역동적으로 사용하여 비와 비율 학습을 도울 필요를 제안하였다. 정은실(2003a) 역시 비에 대해 직관적으로 이해하고 비 개념을 충분히 다룬 이후에 비에 대한 기호 표현이나 알고리즘을 지도해야 함을 강조하였다. 그리고 적합한 맥락 속에서 학생들이 비에 의미를 부여할 수 있도록 해야 하며, 학습 과정을 지원하기 위한 시각적 표현의 사용을 권장하였다. 이는 수업 시 교사의 교수 활동에서뿐만 아니라 교수 활동이 근거하는 교과서 구성 시에도 충분히 고려될 필요가 있다. 특히 국정 교과서 체제를 취하는 우리나라 초등학교 수학에서는 수학 수업 시 교사들의 교과서 의존도가 매우 높기 때문에 교과서에서 비와 비율 단원의 구성 방식이 비와 비율에 대한 의미 있는 지도 여부로 직결될 가능성이 크다.

2009 개정 교육과정에 따른 5~6학년군 수학 교과서의 적용 2년 차가 되는 현 시점에서 교과서를 직접 활용한 초등학교 현장의 교사와 학생들은 교과서에서 다루고 있는 비와 비율 내용이 다소 어려워 학습 부담으로 작용한다는 의견(세계일보, 2016)을 제시하여 왔다. 물론 비와 비율 학습 시 용어의 복잡함이 어려움의 주요 요인이기도 하지만(박교식, 2010; 장혜원, 2002; 홍갑주, 2013) 계산, 기호 표현 등 그 밖의 요소도 어려움을 야기하기 때문에(박희옥, 박만구, 2012) 여러 관련 요소 전반에 기초하여 교과서의 지도 내용을 분석할 필요가 있다. 즉 교과서에서 비와 비율 내용을 어떻게 구현하고 있는지를 분석함으로써, 학생들의 인지적 어려움을 최소화하면서 비와 비율을 보다 유의미하게 지도할 수 있는 방안을 모색할 필요가 있는 것이다.

특히 여러 선행 연구(박교식, 2010; 임재훈, 2015; 장혜원, 2002; 홍갑주, 2013)에서 알 수 있듯이 우리나라의 교육과정별 수학 교과서에서 비와 비율 관련 용어는 서로 상이하게 정의되고 사용되었다. 이는 비와 비율 개념에 대한 어려움은 비단 그것을 학습하는 초등학생들의 이해 수준 때문만이 아니라, 수학교육 전문가들조차 그 개념에 대해 합의된 견해를 갖고 있지 않고 그에 따라 다양한 관점들이 교과서에서 구현되었기 때문으로 해석할 수 있는 여지를 제공한다. 이로부터 2015 개정 교육과정에 따른 수학 교과서(이하 2015 개정 교과서[8])에서 비와 비율 단원을 구성하기 이전에 관련 선행 연구 및 국내·외 수학 교과서에 대한 면밀한 비교 조사를 통해 비, 비의 값, 비율, 백분율 등 관련 용어에 대해 심도

있게 분석하고 그 개념을 명확히 할 필요를 알 수 있다.

이에 본 연구는 차기 교과서 개발 시 비와 비율 단원 구성에 대한 유의미한 시사점을 도출하는 것을 연구 목적으로 한다. 이를 위해, 우선 2015 개정 수학과 교육과정에서 비와 비율 관련 내용의 변화를 살펴보고 선행 연구를 중심으로 이론적 고찰을 실시한 후, 이를 토대로 본 연구의 교과서 비교 분석을 위한 분석틀을 마련하였다. 분석틀에 기초하여 5차부터 2009 개정 교과서와 일본, 싱가포르, 홍콩, 핀란드 교과서를 대상으로 각 교과서에서 비와 비율에 대한 학습 요소 및 지도 순서, 용어의 정의, 관련 개념의 도입 방법을 종적, 횡적으로 분석하였다. 연구 결과를 토대로 비와 비율에 대한 2015 개정 교과서 집필 시 고려할 몇 가지 시사점을 추출하였다.

Ⅱ. 이론적 배경

1. 2015 개정 수학과 교육과정의 비와 비율 관련 내용 분석

국내·외의 수학 교과서 분석에 앞서 비와 비율 관련 내용이 2009 개정 교육과정에서 2015 개정 교육과정으로 전환되면서 어떻게 변화했는지 비교·분석하였다. 비와 비율 관련 성취기준은 '[6수04-02] 두 양의 크기를 비교하는 상황을 통해 비의 개념을 이해하고, 그 관계를 비로 나타낼 수 있다, [6수04-03] 비율을 이해하고, 비율을 분수, 소수, 백분율로 나타낼 수 있다.'로, 두 교육과정에서 변화가 없는 것으로 나타났다. 그러나 성취기준과 관련된 '교수·학습 방법 및 유의 사항(2009 개정 교육과정의 교수·학습상의 유의점)'에는 <표 1>과 같은 변화가 있다. 박경미 외(2015)에 따르면 이 변화는 비율 지도 시 단순 계산이 아닌 실생활과의 관련을 고려한 지도가 이루어져야 할 필요가 있음에도 불구하고, 2009 개정 교과서(6학년 1학기)에서 비율이 적용된 예로서 속력, 인구밀도, 농도를 활용했다기보다 각 개념을 학습 내용으로 구현했다는 측면에서 기인한 것이다. 이는 학습 내용 자체로뿐만 아니라 그 평가에서도 지나치게 어려운 활용 문제를 다룸으로써 학생들의 학습 부담을 유발하게 되었다. 따라서 교수·학습 방법 및 유의 사항에서 타 교과 및 실생활에서 비율이 적용되는 간단한 사례를 사용할 수도 있음을 제안하는 것으로 수정되었고, 2015 개정 교육과정에 새롭게 도입된 '평가 방법 및 유의 사항'으로 '비율을 평가할 때 속력, 인구밀도, 축척, 농도 등을 구하는 문제는 다루지 않는다(교육부, 2015a).'를 제시함으로써 학생들이 비율 학습과 평가에서 겪는 어려움을 최소화하고자 하였다.

<표 1> 교육과정의 비와 비율 관련 교수·학습 방법 및 유의 사항 중 변화 내용

2009 개정 교육과정	2015 개정 교육과정
• 속력, 인구밀도, 축척 등과 같이 타 교과 및 실생활에서 비율이 적용되는 예를 찾아보고, 그와 관련된 간단한 문제를 해결하게 한다.	• 비율의 의미를 다룰 때 타 교과 및 실생활에서 비율이 적용되는 간단한 사례를 사용할 수 있다.

8) 편의상 다른 교육과정 및 국외 수학 교과서도 이와 같은 방식으로 칭할 것이다(예, 5차 교과서, 일본 교과서).

2. 비와 비율 관련 선행 연구 분석

비와 비율에 관한 선행 연구로 우선 용어에 관해 언급한 연구들이 있다. 비의 값과 비율이 명확하게 구분되지 않은 채 혼용되고 있다는 지적(박교식, 2010; 임재훈, 2015; 장혜원, 2002; 홍갑주, 2013)뿐만 아니라, 비율의 정의를 개선해야 한다는 다양한 관점에서의 주장이 있어 왔다. 예컨대, 내적비에 한정하여 비율을 사용하자는 견해(박교식, 2010), 외적비에 해당하는 새로운 용어를 모색해보자는 견해(임재훈, 2015), 비의 값을 비율과 같은 것으로 정의하면 어려움이나 혼란을 줄일 수 있지만, 두 용어를 하나의 의미로 사용하는 것은 비효율적이라는 견해(장혜원, 2002; 임재훈, 2015)가 있다. 그 밖에 비에 앞서 비율을 먼저 지도하자는 주장(김수현, 나귀수, 2008)과 비와 비례를 분리하여 가르치면 양자를 별개의 것으로 생각할 위험이 있다는 주장(김용익, 2009) 등은 개념의 지도 순서에 대한 논의가 필요함을 파악케 한다. 또한 비 지도를 위해 승법적인 사고를 할 수 있는 자연스러운 상황의 제시가 필요하다는 주장(김경희, 백희수, 2010; 김용익, 2009; 박희옥, 박만구, 2012; 정은실, 2003a; 2003b; 2013)을 통해 효과적인 비와 비율 지도 방안에 대한 심도 있는 연구가 필요함을 알 수 있다. 따라서 본 연구에서는 선행 연구를 크게 비와 비율의 용어, 비와 비율의 지도 관련으로 나누어 고찰하고, 그로부터 추출한 요소를 토대로 본 연구의 분석틀을 마련하였다.

가. 비와 비율의 용어에 관한 선행 연구

비와 비율 단원에서 다루는 주요 용어는 비, 비의 값, 비율, 백분율이다. 따라서 수학 교과서에서 이러한 용어들이 어떻게 정의되는지를 면밀히 고찰할 필요가 있고, 실제로 다수의 선행 연구에서 그에 대한 분석 결과를 제시하고 있다.

먼저 장혜원(2002)은 1차부터 7차 교과서에서 비의 값과 비율 개념의 변화를 분석하였다. 그 결과, 비율은 일반적인 용어인 것에 반해, 비의 값은 비가 같다는 것의 의미를 규정하여 비례식을 세우기 위해 필요한 개념임을 제외하면 후속 학습과의 연속성이 결여되므로 양자를 구분하지 않고 비율이라는 하나의 용어를 사용할 것을 제안하였다. 또한 비율의 다양한 표현으로서 기준량이 1, 10, 100일 때 비교하는 양을 달리 나타내는 활동을 통해 비에 대한 감각을 키우는 것이 보다 효과적인 비 관련 학습임을 제시하였다.

박교식(2010)은 비율을 비교하는 양이 기준량의 몇 배인가를 나타내는 수로, 비의 값은 '비 a:b의 값을 $\frac{a}{b}$라고 한다.' 고 정의하였으며, (비율)=$\frac{(\text{비교하는 양})}{(\text{기준량})}$은 비율의 실행 정의라고 보았다. 이때 비의 값과 비율이 어느 정도 상호 독립적으로 존재할 수 있지만, 비의 값이라는 개념을 학생들에게 이해시키기 위해서는 그것을 왜 비 a:b의 값이라고 하는지 설명이 필요하므로 비 a:b에서 a가 b의 몇 배인지 알아보기 위하여 $\frac{a}{b}$를 구한다는 설명을 추가하였다. 그런데 이와 같이 비의 값 $\frac{a}{b}$의 의미를 해석하는 순간, 비의 값과 비율의 독립적인 존립은 사실상 불가능하므로, 둘 사이의 관계를 어떤 형태로든 정립할 필요가 있다. 그 한 방법으로 비의 값이 실질적으로 기준량을 1로 하는 비율과 동일하다는 것을 인정하고, 이때 '기준량 b를 1로 하는 비율 $\frac{a}{b}$를 비의 값' 이라고 정의하는 대신, '비 a:b에서 비의 값 $\frac{a}{b}$는 기준량을 1로 하는 비율과 동일하다.' 는 표현을 사용할 것을 고려할

수 있다고 하였다. 또한 비율과 관련해서 비교하는 양과 기준량의 단위가 같은 경우에만 비율이라는 용어를 사용하는 것으로 한정할 것을 제안하였다.

홍갑주(2013)는 5차, 6차, 7차 교과서에서의 비와 비율 용어 정의를 검토한 후 대안적 정의를 제안하였다. 비의 값은 '비에 하나의 값을 붙여 준 것을 비의 값이라 한다. 비의 값에는 비율과 백분율이 있다.', 비율은 '$\frac{(\text{비교하는 양})}{(\text{기준량})}$을 기준량에 대한 비교하는 양의 비율이라고 한다. 비율은 기준량을 1로 보았을 때의 비교하는 양과 같다.', 백분율은 '$\frac{\text{비교하는 양}}{\text{기준량}} \times 100$을 기준량에 대한 비교하는 양의 백분율이라 한다. 백분율은 기준량을 100으로 보았을 때의 비교하는 양과 같다.' 라고 제시하였다. 이는 비의 값을 비율과 백분율의 상위 개념으로 다루되, 수학적인 일반화로서가 아니라 쓰임새의 관점을 취하고 있음을 알 수 있다.

임재훈(2015)은 비의 값과 비율 용어 사용에 관한 선행 연구와 2009 개정 교과서의 관점을 <표 2>와 같이 구분하여 제시하였다.

<표 2> 비의 값과 비율 용어에 관한 선행 연구 및 2009 개정 교과서 분석 결과(임재훈, 2015)

	비의 값과 비율	관련 문헌
<관점 1>	한 용어만 사용	장혜원(2002)
<관점 2>	'분수 꼴의 외적 형태-내적 의미' 로 구분	박교식(2010)
<관점 3>	'(쓰임새의 관점에서) 상위 개념-하위 개념' 으로 구분	홍갑주(2013)
<관점 4>	두 용어를 구분 없이 병용	2009 개정 교과서(2015)

이에 기초하여 6차, 7차, 2007 개정, 2009 개정 교과서에서 비의 값과 비율 용어 사용 방식의 변화를 분석한 결과, 6차는 <관점 2>, 7차는 <관점 3>, 2007 개정은 <관점 1>, 2009 개정은 <관점 4>의 방식에 해당하는 것으로 확인되었다. 임재훈(2015)은 이러한 결과에 기초하여 비의 값과 비율 용어 사용의 문제는 단지 용어 자체에 국한되는 것이 아니라 맥락 및 기준량 1의 의미와 관련된 포괄적인 사안이라는 인식이 필요하다고 하였다. 이러한 점을 고려하여 비의 값과 비율 용어에 관한 개념 구조를 제시하였고, 각 특성에 맞게 비의 값(비에서 비롯된 값, 즉 a:b의 값), 비율(내적비 맥락에서 a가 b의 몇 배인지를 나타내는 수, 즉 기준량을 1로 보았을 때 비교하는 양을 나타내는 수) 용어를 사용할 수 있다고 하였다. 한편 현재 외적비 맥락에서 기준량 1당 비교하는 양을 나타내는 수에 대한 우리말 용어는 없기 때문에 이를 의미하는 '단위율' 도 고려할 수 있음을 제안하였다.

박희옥, 박만구(2012), 이정은, 김지원, 박교식(2015)은 비와 비율의 개념에 대해 국내와 국외 교과서를 비교 분석하였다. 먼저 박희옥, 박만구(2012)는 미국과 우리나라 교과서에서의 비와 비율의 개념에 대해 비교한 결과, 미국에서 비는 같은 성질을 갖는 양 사이의 비교(예, 파운드 대 파운드)를 의미하고 비율은 다른 성질을 갖는 양 사이의 비교(예, 거리 대 시간)를 의미한다고 하였다. 이로부터 교과서에서 다루고 있는 비와 비율의 개념을 명확히 할 필요가 있다고 주장하였다. 이정은 외(2015)는 비율 관련 용어의 정의에 초점을 맞추어 우리나라와 일본 교과서를 비교 분석하였다. 그 결과에 기초하여 비율은 내적 비율로 한정할 필요가 있으며, 그에 대해 내포적으로 정의하여 비의 선행 개념으로 지도할

필요가 있다고 하였다. 또한 백분율과 관련해서 1%를 0.01로 정의하는 것을 생각해 볼 수 있으며, 비를 내적 비율의 표시 방법으로 볼 때, 이 비를 하나의 수로 나타낸 것을 비의 값으로 정의할 필요가 있다고 주장하였다.

한편 강완, 나귀수, 백석윤, 이경화(2013)는 초등 수학에서 비의 값을 비와 구별하려고 한다든가, 비의 값과 비율을 다른 개념으로 지도하려는 시도, 또 비의 값은 기준량이 1이고 백분율은 기준량이 100이므로 서로 다른 개념이라는 등의 엄밀한 구분은 그 자체가 무의미하고 교육적으로도 비효과적이라고 주장하기도 하였다.

나. 비와 비율의 지도에 관한 선행 연구

비 개념은 두 양을 상대적으로 비교하기 위해 필요하며 여러 단계에 걸쳐 발달하는 개념이다. 강완 외(2013), Karplus et al.(1983), Lesh et al.(1988), NCTM(2000), Piaget(1977)에 따르면 비 개념을 학습하기 이전에 비 개념 및 비례 추론의 토대가 되는 승법적 추론을 경험하게 할 필요가 있으며, 이러한 승법적 추론은 가법적 추론을 토대로 지도해야 한다. 즉 다양한 문제 상황에서 의미 있는 가법적 추론을 충분히 경험한 후, 상대적 비교가 필요한 맥락을 제시함으로써 학생들이 승법적 추론의 필요성을 인식하고 양자 간의 차이도 이해하도록 할 필요가 있다. Lamon(1999)은 비례 추론은 장기간에 걸친 등분할, 단위화, 양의 변화, 상대적 비교 등의 다양한 경험을 토대로 발달한다고 하였다. 한편, 강완 외(2013), 김수현, 나귀수(2008), 유현주(1995), Karplus et al.(1983), Noelting(1980)에 따르면 가법적 추론을 지나치게 강조할 경우, 승법적 추론이 필요한 상황에서도 여전히 가법적 추론을 고집하여 비 개념을 이해하는 데 어려움을 보일 수 있음에 유의해야 한다.

안숙현, 방정숙(2008)은 비는 두 양을 다루면서도 그것을 하나의 대상으로 파악해야 하는 성질의 것인데, 교과서에서는 비의 표현 방법과 같은 외형적 특징과 알고리즘을 강조하고 있다고 하였다. 비와 비례 개념의 진정한 의미는 상황이나 크기가 바뀌어도 그 안에 내재하는 관계가 같다는 구조의 불변성을 인식하는 것(강완 외, 2013; 정은실, 2003a)이다. 학생들은 동치비를 만드는 것보다 두 비의 관계를 비례적으로 파악하여 비교 예측하는 것을 더 어려워하기 때문에 그에 맞는 지도가 이루어져야 한다.

강완 외(2013)는 비 지도 시 두 내적비 간의 불변성을 인식하는 것으로부터 시작하여 점차 외적비의 일정성을 인식하도록 지도해야 한다고 하였다. 이와 관련하여 Freudenthal(1983)은 외적비가 내적비보다 아동들의 심리적 어려움을 더 초래한다고 하였다. 강완 외(2013), 정유경, 정영옥(2015)은 그 밖에 비와 비율 개념의 의미 있는 지도를 위해 학생들이 흥미를 가질 수 있는 현실과 관련된 상황에서 비 개념을 지도해야 하며, 지나치게 이른 대수화나 알고리즘보다 풍부한 맥락을 통해 비에 대한 직관적 사고를 먼저 하도록 유도해야 한다고 하였다. 또 비와 비율 개념과 관련된 실제적인 응용 및 기하적 맥락의 적극적인 활용을 주장하였다.

한편 비와 비율 개념을 지도할 때 접할 수 있는 학생들의 어려움에 대한 선행 연구도 있어 왔다. 학생들이 비 개념을 학습할 때 겪는 대표적인 어려움은 비를 읽는 방법의 혼동이다(강완 외, 2013). 예컨대, a:b를 ‘b에 대한 a의 비’, ‘a의 b에 대한 비’, ‘a와 b의 비’라고 읽는데, 이때 ‘a와 b의 비’와 ‘b와 a의 비’가 같다는 오개념을 가질 가능성이 있다. 박희옥, 박만구(2012)는 초등학생이 비와 비율 학습에서 보이는 인식론적 장애 유형을 크게 용어, 계산, 표현의 세 가지로 구분하고, 구체적인 장애 원인 및 각 원인별 지도 방안을 제시하였다. 첫째, 다양하고 실제적인 실생활의 사례를 들어 비, 비율, 백분율 개념을 도입하고, 둘째, 가장 간단한 정수비를 통해 비를 도입하고 승법적 사고를 도울 수

있는 비례표 등을 적극 활용하여 직관적인 경험을 충분히 한 후 기능을 습득하도록 지도해야 하며, 셋째, 학생 스스로 이해한 것에 기호를 부여하도록 해야 한다는 것이다. 예를 들어, MiC 교과서처럼 다양하고 구체적인 상황 속에서 개념 학습이 충분히 이루어진 후에 : 와 같은 기호를 천천히 익힐 수 있도록 해야 한다.

백분율에 관한 학생들의 어려움에 대한 연구도 있다. 김성준 외(2015)는 학생들이 백분율에 대해 갖는 오개념의 예로 '7월보다 8월 행사에 참가자가 10% 증가했다. 그런데 9월에 10% 감소했다. 그렇다면 7월과 9월의 참가자 수는 같다.'를 제시하였다. 이러한 오개념을 줄이기 위해 시각적 표현을 통해 백분율 이해에 도움을 주어야 한다고 하였다. Baroody et al.(1947)는 백분율 학습 시 어려움의 유형으로 소수와 백분율을 상호 변환하는 것, 백분율의 기준이 100임을 인식하는 것, 백분율을 모르는 경우와 전체를 모르는 경우의 문제를 해결하는 것, 100% 이상의 백분율 문제를 해결하는 것을 들었다. 따라서 백분율의 효과적인 지도 방안으로, 첫째, 백분율을 도입하고 연습할 때 실생활에 적용하면서 유목적적으로 수행해야 하고, 둘째, 학생에게 백분율을 잘못 사용한 예를 찾아보게 할 수 있고, 셋째, 선행 지식과 모델에 연결하여 백분율에 대한 용어와 이해를 발달시켜야 하고, 넷째, 분수, 소수, 백분율을 명확히 연결하여 이해시키는 것을 제안하였다.

그 밖에 정영옥(2005)은 한국, 미국, 일본, 중국의 초등학교 교과서에서 비 지도에 대해 고찰하였으며, 이혜숙(2015)은 맥락성 관점에서 비와 비율에 대한 한국과 싱가포르 교과서를 비교하여 그에 따른 결론과 시사점을 도출하였다.

이와 같이 비와 비율에 대한 선행 연구는 주로 용어 및 지도 방안에 초점을 두고 있으며, 이 중 최근의 교과서 분석 연구는 국내 또는 국외 수학 교과서를 용어나 맥락 등 좁은 주제에 초점을 두고 분석하여 시사점을 추출한 것으로 파악된다. 이에 본 연구에서는 선행 연구 고찰을 통해 비와 비율의 학습 요소 및 지도 순서, 비와 비율에 관한 용어의 정의, 비와 비율의 지도 맥락, 내적비와 외적비의 사용, 정수비[9]의 사용, 시각적 표현의 사용을 본 연구의 분석 요소로 추출하였다.

Ⅲ. 연구 방법

1. 분석 대상

본 연구는 수학 교과서에서 비와 비율에 관한 내용을 어떻게 다루고 있는지 종적, 횡적으로 분석하는 것을 주요 내용으로 한다. 종적 분석을 위해서는 5차 교육과정부터 현행 2009 개정 교육과정에 따른 수학(산수) 교과서의 비와 비율 내용을 대상으로 선정하였다. 5차 교육과정을 시점으로 선택한 이유는 5차 교육과정에 따른 수학과 교과용도서부터 보조 교과서인 익힘책을 제공함으로써 오늘날과 같은 체계가 이루어진 것으로 파악되기 때문이다. 횡적 분석은 비와 비율을 초등학교 수학에서 다루고 있는 일본, 싱가포르, 홍콩, 핀란드의 5, 6학년 수학 교과서를 대상으로 하였다[10]. 이때 국정 교과서 체제인 우리나라

9) 본 논문에서는 한 항이 다른 항의 정수배 관계인 비를 정수비라고 지칭할 것이다.

10) 국제 비교의 대상으로 일본, 싱가포르, 홍콩, 핀란드를 선택한 것은 사교육걱정없는세상(2015) 등에 기초하여 비와 비율을 초등학교 수학에서 다루는 국가 중 우리나라와의 밀접한 관계를 고려한 것이다. 특히 4개국 모두 TIMSS 등 국제학업성취도 평가에서 수학 성취도가 높고, 김경희, 백희수(2010), 이정은 외(2015), 이혜숙(2015), 정영옥(2005) 등 여러 선행 연구에서 우리나라와의 연관성을 고려하여 교과서 비교의 연구 대상으로 선정된 바 있기 때문이다.

와 달리 여러 출판사에서 수학 교과서를 개발하는 각국의 상황을 고려하여 채택 비율이 높은 출판사의 교과서를 분석 대상으로 선정하였다(<표 3>).

<표 3> 분석 대상 중 국외 수학 교과서

	수학 교과서명	출판사	년도
일본	新しい算數 5上, 5下, 6上, 6下	東京書籍	2013
싱가포르	Shaping Maths Coursebook 5A, 5B, 6A, 6B	Marshall Cavendish Education	2014
홍콩	Effective Steps to Mathematics 5A, 5B, 6A, 6B	Pan Lloyds Publishers Ltd	2012
핀란드	핀란드 초등수학교과서 Laskutaito (Korean edition) 5-1, 5-2, 6-1, 6-2	WSOY pro., Ltd	2012

2. 분석틀 및 분석 방법

본 연구는 우리나라 교육과정별 및 국외 수학 교과서에 비와 비율 내용이 어떻게 반영되어 있는지 면밀히 비교 분석하여 그로부터 시사점을 추출하는 데 목적이 있다. 이를 위해 교과서를 분석하기 위한 기준인 분석틀이 요구된다. 따라서 앞서 Ⅱ장에서 고찰한 선행 연구 중 다수의 연구에서 쟁점이 되었던 요소들을 추출하여 이를 토대로 <표 4>와 같은 분석틀을 설정하였다. 선정된 각각의 분석 요소는 선행 연구 결과를 통해 비와 비율 지도 시 중요한 교수학적 변인이 될 만한 성질의 것으로 파악된다. 특히 비와 비율은 두 양 사이의 승법적 관계를 이해할 수 있도록 하는 적절한 도입 방법이 중요하기 때문에 관련 개념이 처음 등장하는 활동에서 개념의 도입 방법을 포함하여 분석틀을 구성하였다.

<표 4> 국내 및 국외 교과서 분석을 위한 분석틀

분석 요소		분석 내용
학습 요소 및 지도 순서		비와 비율 관련 학습 요소 및 지도 순서는 어떠한가?
용어의 정의		비, 비의 값, 비율, 백분율의 정의는 어떠한가?
도입 방법	맥락	비, 비의 값, 비율, 백분율 도입 시 사용한 맥락은 어떠한가?
	내적비와 외적비	비, 비의 값, 비율, 백분율 도입 시 내적비와 외적비의 사용은 어떠한가?
	정수비	비, 비의 값, 비율, 백분율 도입 시 정수비를 사용하였는가?
	시각적 표현	비, 비의 값, 비율, 백분율 도입 시 사용한 시각적 표현은 무엇인가?

구체적으로 5차 교육과정부터 현행 2009 개정 교육과정에 따른 수학(산수) 교과서 및 일본, 싱가포르, 홍콩, 핀란드의 수학 교과서에서 제시한 비와 비율 관련 내용을 <표 4>에 따라 학습 요소 및 지도 순서, 용어의 정의, 도입 맥락(상황), 도입 시 내적비와 외적비의 사용 여부, 정수비의 사용 여부, 사용한 시각적 표현의 측면에서 비교 분석하였다. 이때 도입 방법은 교과서에서 관련 개념이 처음 등장하는 활동에 제시된 내용을 대상으로 분석을 실시하였다. 분석 결과 각각을 표로 정리하여 제시하고, 관련 사례 및 주목할 만한 내용을 구체적으로 기술하였다.

Ⅳ. 연구 결과

1. 국내 교과서의 비와 비율 단원 분석 결과

5차부터 2009 개정 교과서의 비와 비율 단원을 분석한 후, 비와 비율과 관련하여 어떤 학습 요소가 어떤 순서로 지도되는지(<표 5>), 비, 비의 값, 비율, 백분율은 각각 어떻게 정의되는지(<표 6>), 관련 개념의 도입 방법은 어떠한지(<표 7>)를 제시하고, 각 교육과정별 교과서의 비와 비율에 대한 세부적인 특징을 기술하였다.

가. 국내 교과서의 비와 비율 학습 요소 및 지도 순서

5차부터 2009 개정 교과서의 비와 비율 단원의 학습 요소 및 지도 순서를 분석한 결과는 <표 5>와 같다.

<표 5> 5차부터 2009 개정 교과서의 비와 비율 단원의 학습 요소 및 지도 순서

	단원명	학습 요소	비고
5차	5-2-6. 비와 비율	1. 두 수의 비 알기 2. 비의 값 알기 3. 비율 알기(백분율 알기 포함) 4. 할푼리 알기 5. 비율에서 비교하는 양 알기	
6차	5-2-7. 비와 비율	5차와 동일	
7차	6-가-6. 비와 비율	1. 두 수의 비 알기 2. 비율과 비의 값 알기 3. 백분율 알기 4. 할푼리 알기	
2007 개정	5-2-7. 비와 비율	1. 두 수의 크기 비교하기 2. 비율 알기 3. 백분율 알기 4. 할푼리 알기	-비의 값 삭제
2009 개정	6-1-4. 비와 비율	1~2. 두 수 비교하기(1), (2) 3. 비 알기 4. 비율 알기 5. 백분율 알기 6. 비율과 기준량으로 비교하는 양 구하기 7. 비율과 비교하는 양으로 기준량 구하기 8~10. 비율이 사용되는 경우 알기(1), (2), (3)	-비의 값 재등장 -할푼리 삭제

분석 결과, 5차, 6차, 2007 개정 교과서는 5학년 2학기, 7차와 2009 개정 교과서는 6학년 1학기에 비와 비율을 다루며, 5차와 6차 교과서가 유사한 구성을 취하고 있고, 7차부터 변화가 나타나는 것을 볼 수 있다. 대표적으로, 5차와 6차 교과서는 비의 값, 비율을 별도의

차시로 구성하고 있으나 7차 교과서는 비의 값과 비율을 한 차시로 통합하고 비율과 백분율 차시를 분리하였다. 또한 5차, 6차에 제시된 '비율에서 비교하는 양 알기'는 (비교하는 양)=(기준량)×(비율)의 공식을 이용해 비교하는 양을 구하는 내용으로 구성되어 있는데, 7차 교과서에서는 해당 차시가 삭제되었다. 이어 2007 개정 교과서에서는 비의 값이 아예 삭제되고 '두 수의 크기 비교하기'로 시작한다는 것이 특징적이다.

현행 2009 개정 교과서는 2007 개정 교과서보다 본차시가 2.5배 증가한 것이 주목할 만하다. 비와 비율에 총 10개의 본차시를 할애하면서 비 개념을 도입하기 이전에 두 수의 승법적 관계를 알아보고, 비율과 백분율 학습 이후에는 비교하는 양, 기준량 구하기뿐만 아니라 비율이 사용되는 경우를 폭넓게 구현하고 있다. 이처럼 개념 및 적용 관련 차시를 풍부하게 다룸으로써 이전에 비해 비와 비율 학습을 다양하게 구현한 장점이 있는 반면, 그 폭과 깊이가 확대·심화됨으로써 학습 부담을 야기했다는 현장 초등교사들의 의견이 제기된 바 있다. 그 예로, 비 개념을 학습하기 이전에 두 수를 비교하는 차시를 두 차시로, 비율이 사용되는 경우를 세 차시로 구성하고 있는 점을 살펴볼 필요가 있다. 전자의 경우, 비록 비 개념을 학습하기 이전에 가법적, 승법적으로 두 수를 비교하는 활동을 충분히 경험하는 것이 비 개념 형성에 토대를 마련할 지라도, 학생들의 입장에서는 유사하게 보이는 활동들이 두 차시에 걸쳐 구성될 필요에 대해서는 재고의 여지가 있다. 또한 둘째 차시의 경우에는 표를 채운 뒤, 그 표를 보고 모둠 수가 증가하더라도 남학생 수와 여학생 수, 학생 수와 손전등 수 사이의 관계가 일정하다는 것을 찾아내야 하나, 일상생활에서는 이러한 경우, 모둠 수가 증가함에 따라 학생 수, 손전등 수가 일정하게 증가한다는 정비례 관계에 주목하게 되는 것이 더 일반적이기 때문에 학생들은 많은 혼동과 어려움을 느끼게 된다. 후자는 2009 개정 교육과정에서 제시한 교수·학습상의 유의점에 기초하여 비율 지도 시 타 교과 및 실생활에서 비율이 적용되는 사례를 찾아보고 그와 관련된 문제를 해결하게 하기 위해 구현된 차시이다. 그러나 앞서 언급하였듯이 해당 차시에서는 속력, 인구밀도, 농도가 비율이 적용 사례로 활용되었다기보다 각각의 개념이 학습 요소로 지나치게 어렵게 구현된 것이 문제이다. 따라서 2015 개정 교과서에서는 타 교과 및 실생활에서 비율이 적용되는 간단한 사례를 찾아보면서 비율의 개념 및 필요성을 이해할 수 있도록 구성할 필요를 시사한다. 그 밖에 2009 개정 교과서에서 비의 값 용어가 차시 제목에는 없지만 내용 전개상 재등장함을 확인할 수 있다.

나. 국내 교과서의 비, 비의 값, 비율, 백분율 용어의 정의

5차부터 2009 개정 교과서에서 제시하고 있는 비, 비의 값, 비율, 백분율의 정의는 <표 6>과 같다.

<표 6> 5차부터 2009 개정 교과서의 비, 비의 값, 비율, 백분율의 정의

	비	비의 값	비율	백분율
5차	여학생 수 4를 남학생 수 8에 대하여 4:8로 나타내고, 4 대 8이라고 읽는다. …	(가) 길이는 (나) 길이의 $\frac{7}{8}$이다. 이것은 (나) 길이를 1로 볼 때, (가) 길이가 $\frac{7}{8}$이라는 뜻과 같다. 이때, (가) 길이를 비교하는 양, (나) 길이를 기준량이라 한다. 그리고 $\frac{7}{8}$을 8에 대한 7의 비의 값이라고 하고, 비의 값 $\frac{7}{8}$을 소수 0.875로도 나타낸다. 7:8→$\frac{7}{8}$ (비의 값)=$\frac{(\text{비교하는 양})}{(\text{기준량})}$	(나)의 개수에 대한 (가)의 개수의 비는 4:5이고, 그 비의 값은 $\frac{4}{5}$이다. 이 비의 값은 기준량 (나)를 1로 보았을 때, 비교하는 양 (가)가 $\frac{4}{5}$임을 뜻하며, 이것을 비율이라고 한다. 5에 대한 4의 비율은 $\frac{4}{5}=0.8$	비율에서 기준량을 100으로 보았을 때, 비교하는 양을 나타낸 수
6차	5차와 동일 (수치만 3:6으로 바뀜)	5차와 동일 (수치만 5:8→$\frac{5}{8}$로 바뀜)	5차와 동일 (수치만 $\frac{2}{5}$로 바뀜)	5차와 동일
7차	남학생 수와 여학생 수를 비교하기 위하여 기호 : 를 사용한다. 남학생 수 3명과 여학생 수 5명을 비교하는 것을 3:5로 나타내고, 3 대 5라고 읽는다. …	기준량에 대한 비교하는 양의 크기를 비율이라고 한다. 기준량을 1로 볼 때의 비율을 비의 값이라고 한다. 8명을 1로 볼 때, 8에 대한 5의 비의 값은 $\frac{5}{8}$이다. (비율)=$\frac{(\text{비교하는 양})}{(\text{기준량})}$		기준량을 100으로 할 때의 비율
2007 개정	학생 수 1명과 공책 수 4권을 비교하기 위하여 비로 나타낸다. 이것을 1:4라 쓰고 1 대 4라고 읽는다. 1:4는 공책 수 4를 기준으로 하여 학생 수 1을 비교하는 것이다. …	-	기준량에 대한 비교하는 양의 크기 $\frac{(\text{비교하는 양})}{(\text{기준량})}$을 비율이라고 한다.	기준량을 100으로 할 때 비교하는 양 80의 비율 $\frac{80}{100}$
2009 개정	두 수를 나눗셈으로 비교할 때 기호 :를 사용한다. 두 수 7과 1을 비교할 때, 7:1이라고 쓰고 7 대 1이라고 읽는다. 7:1은 7이 1을 기준으로 몇 배인지를 나타내는 비이다. …	비교하는 양을 기준량으로 나눈 값을 비의 값 또는 비율이라고 한다. (비율)=(비교하는 양)÷(기준량)=$\frac{(\text{비교하는 양})}{(\text{기준량})}$		비율에 100을 곱한 값

분석 결과, 5차와 6차 교과서는 수치만 다를 뿐 비와 비율 관련 개념을 동일하게 정의하고 있는 것을 알 수 있다. 또한 두 수의 비교를 위한 비 개념의 도입 방식이 5차와 6차, 7차, 2007 개정, 2009 개정 교과서 간에 큰 차이를 보이지 않았다. 주목할 점은 비의 값과 비율, 백분율 정의의 변화이다.

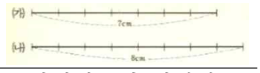
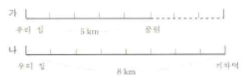
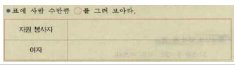
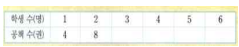
먼저, 비의 값과 비율의 정의 분석 결과이다. 동일한 방식으로 비의 값과 비율을 정의한 5차와 6차 교과서는 비의 값과 비율을 분리하여 설명하고 있다. 그러나 구체적인 내용을 살펴보면, 비의 값을 기준량을 1로 보았을 때 비교하는 양을 나타내는 것으로 정의한 뒤, 이것을 비율이라고 한다고 하였다. 이는 하나의 설명에 대해 두 가지 용어를 부여하면서 비의 값, 비율 이 두 대상이 전혀 다른 것처럼 서술하고 있기 때문에 명확한 차이를 인식하기 어렵다(장혜원, 2002). 7차 교과서는 비율의 정의를 비의 값과 함께 제시하는 변화를 보였다. 이전 교과서와 달리, 비율을 기준량에 대한 비교하는 양의 크기로, 비의 값을 기준량을 1로 볼 때의 비율로 정의한 것이 외관상 차이로 보이나, 각각의 세부적 의미를 비교해보면 그 뜻은 이전 교과서와 다르지 않음을 알 수 있다. 2007 개정 교과서는 기준량에 대한 비교하는 양의 크기 $\frac{(\text{비교하는 양})}{(\text{기준량})}$을 비율이라고 정의하였다. 비율에 대한 이와 같은 정의는 7차 교과서와 동일한 것을 확인할 수 있다. 다만, 이전 교육과정의 교과서에 등장하던 ‘비의 값’ 용어는 삭제되었다. 2009 개정 교과서는 비율을 약속할 때 승법적 관계를 보다 명시적으로 제시하고 절차적인 면을 강조하여 ‘비교하는 양을 기준량으로 나눈 값’을 비율이라고 정의하는 변화를 보였다. 또한 2007 개정 교과서에서는 삭제되었던 ‘비의 값’이 비율과 동일한 의미를 지닌 용어로 재등장한 것을 볼 수 있다. 강완(2016)은 비의 값과 비율이 수학적으로 같은 의미이며, 수학적 내용으로 보아 두 수 a, b에 대하여 $\frac{a}{b}$를 일컬을 때 비의 값, 비율이라는 용어를 공통으로 사용할 수 있다고 하였다. 이로부터 2009 개정 교과서에 비의 값이 재등장한 배경을 추측해볼 수 있다.

이어서 백분율 정의의 분석 결과이다. 5차와 6차 교과서는 백분율을 동일하게 ‘비율에서 기준량을 100으로 보았을 때 비교하는 양을 나타낸 수’로 정의하고 있는 반면, 7차 교과서는 ‘기준량을 100으로 할 때의 비율’로 정의하는 것으로 나타났다. 한편 2007 개정 교과서는 ‘기준량을 100으로 할 때 비교하는 양 80의 비율 $\frac{80}{100}$’을 백분율로 약속한다. 이때 2007 개정 교과서는 이전과 달리 $\frac{80}{100}$ 자체를 백분율이라고 정의하는 것이 이전과의 큰 차이로 파악된다. 마지막으로, 이전까지의 교과서는 백분율을 정의할 때 기준량이 100이 됨을 명시적으로 강조한데 반해, 2009 개정 교과서는 ‘비율에 100을 곱한 값’을 백분율이라고 정의함으로써 기준량이 100이라는 표현을 사용하지 않고 있다. 이 정의는 절차적 특성이 강하여 기준량의 변화에 대한 개념적 이해가 부족할 수 있음이 우려된다. 이처럼 백분율에 대한 정의는 각 교육과정에 따른 교과서별로 상이함을 알 수 있다.

다. 국내 교과서의 비, 비의 값, 비율, 백분율의 도입 방법

5차부터 2009 개정 교과서에서 비, 비의 값, 비율, 백분율의 도입 맥락 및 도입 시 내적비와 외적비의 사용, 정수비의 사용 여부, 사용된 시각적 표현을 정리하면 <표 7>과 같다.

<표 7> 5차부터 2009 개정 교과서의 비와 비율 개념 도입 방법

		맥락	내적비	외적비	정수비	시각적 표현
5차	비	남학생 수 : 여학생 수 (8 : 4)	■		■	-
	비의 값	파란색 테이프의 길이 : 빨간색 테이프의 길이 (7 : 8)	■			수직선 
	비율	수정이가 일한 날 수 : 형준이가 일한 날 수 (4 : 5)	■			다이어그램 형태의 그림
	백분율	도입 맥락 없음 ($\frac{9}{20}=\frac{45}{100}$)				-
6차	비	여학생 수 : 남학생 수 (3 : 6)	■		■	-
	비의 값	집에서 공원까지 거리 : 집에서 기차역까지 거리 (5 : 8)	■			수직선 
	비율	지은이가 전화를 건 횟수 : 어머니가 전화를 건 횟수 (2 : 5)	■			다이어그램 형태의 그림
	백분율	도입 맥락 없음 ($\frac{7}{20}=\frac{35}{100}$)				-
7차	비	남학생 수 : 여학생 수 (3 : 5)	■			다이어그램 형태의 그림 그리기
	비의 값 /비율	여자 수 : 자원 봉사자 수 (5 : 8)	■			다이어그램 형태의 그림 그리기 
	백분율	맞힌 문제 수 : 전체 문제 수 ($\frac{17}{20}\times 100 \rightarrow 85\%$)	■			-
2007 개정	비	학생 수 : 공책 수 (1 : 4)		■	■	표 
	비율	남자 선생님 수 : 여자 선생님 수 (5 : 20)	■		■	-
	백분율	맞힌 문제 수 : 전체 문제 수 ($\frac{16}{20}\rightarrow\frac{80}{100}$)	■			-
2009 개정	비	물의 양 : 카레 가루 양 (7 : 1)		■	■	표
	비율/ 비의 값	예선 통과한 학생 수 : 퀴즈 대회에 참가한 학생 수 ($\frac{150}{200}$)	■			-
	백분율	완주한 학생 수 : 하이킹에 참가한 학생 수 ($\frac{36}{50}\rightarrow\frac{72}{100}$)	■			-

먼저 비 개념의 도입을 분석한 결과, 5차, 6차, 7차 교과서는 모두 남학생과 여학생 수를 비교하는 상황을 제시하고 있으며, 2007 개정 교과서는 학생 수와 공책 수의 비교, 2009 개정 교과서는 물 양과 카레 가루 양의 비교를 제시하고 있었다. 이때 7차 교과서까지는 고정된 주어진 두 수만을 비교하나, 2007 개정과 2009 개정 교과서는 각각 학생 수가 증가할 때, 물 양이 증가할 때와 같이 양이 변하는 상황에서 표를 채우면서 두 수의 크기를 비교하는 맥락을 제시하고 있다는 차이를 보인다.

이어서 비의 값을 비율과 분리하여 다루고 있는 5차와 6차 교과서를 살펴보면, 한 길이가 다른 길이의 몇 배인지, 한 거리가 다른 거리의 몇 배인지를 알아보는 상황을 통해 비의 값을 도입하고 있으며, 이해를 돕기 위해 수직선을 제시하고 있는 것으로 나타났다.

비율의 도입을 분석한 결과, 5차는 형준이가 일한 날 수에 대한 수정이가 일한 날 수의 비의 값을 알아보는 상황, 6차는 어머니가 전화를 건 횟수에 대한 지은이가 전화를 건 횟수의 비의 값을 알아보는 상황을 다이어그램 형태의 그림과 함께 제시하고 있어 맥락만 다를 뿐 유사한 도입 양상을 보인다. 한편 7차 교과서는 전체 자원 봉사자 수를 기준으로 하여 여자 수를 비교하는 상황을 직접 그림을 그려 알아보도록 함으로써 비율(비의 값)을 도입하고 있다. 2007 개정 교과서는 남자 선생님 수는 여자 선생님 수의 얼마인지 알아보는 상황으로, 2009 개정 교과서는 예선을 통과한 학생 수는 전체 참가한 학생 수의 몇 배인지 구하는 상황으로 비율을 도입하였으며, 두 교과서 모두 별도의 시각적 표현은 사용하고 있지 않다.

마지막으로 백분율의 도입을 분석한 결과, 5차와 6차 교과서에서는 별도의 백분율 도입 맥락 및 시각적 표현이 사용되지 않은 것으로 나타났다. 7차와 2007 개정 교과서는 둘 다 시험 점수를 알아보는 상황으로 백분율을 도입하고 있으나, 7차 교과서는 한 가지 경우만을 제시하고 있고, 2007 개정 교과서는 두 가지 경우의 백분율을 구하여 비교하도록 하는 차이가 있다. 2009 개정 교과서는 하이킹에 참가한 학생 수에 대한 완주한 학생 수의 비율을 구하는 상황으로 백분율을 도입하고 있으며, 7차, 2007 개정, 2009 개정 교과서 모두 백분율 도입 시 별도의 시각적 표현을 사용하고 있지 않은 것으로 나타났다. 다만, 2007 개정 교과서의 경우, 백분율 도입 시는 아니지만, 활동 2와 활동 3에서 [그림 1]과 같은 시각적 표현을 사용하여 백분율에 대한 이해를 돕고 있는 것을 확인할 수 있다.

[그림 1] 2007 개정 교과서의 백분율 차시에 사용된 시각적 표현(교육과학기술부, 2011)

개념의 도입 맥락을 보면, 5차, 6차, 7차 교과서는 네 가지 개념의 도입 시 모두 내적비만을 사용하였고, 2007 개정, 2009 개정 교과서는 비 개념 도입 시에만 각각 '학생 수 : 공책 수', '물의 양 : 카레 가루 양'이라는 외적비 상황을 적용하고 그 밖의 개념 도입 시에는 내적비를 사용했음을 확인할 수 있다. 이로부터 우리나라 교과서는 비 관련 개념 도입 시 전반적으로 내적비를 사용하는 경향이 있음을 파악할 수 있다. 또한 5차, 6차, 2007 개정 교과서는 비율 도입 시 부분-부분의 상황을, 7차와 2009 개정 교과서는 부분-

전체의 상황을 사용하고 있음을 파악하였다.

개념의 도입 시 사용한 비가 정수비인지 여부를 분석한 결과, 5차, 6차, 2009 개정 교과서는 비 개념 도입 시, 2007 개정 교과서는 비, 비율 도입 시 정수비를 사용하였으며, 7차 교과서는 모든 개념의 도입 시 정수비를 사용하지 않은 것으로 나타났다. 학생들은 예컨대 3:6(6차 교과서)에서 6이 3의 2배인 것을 쉽게 인지하지만 3:5(7차 교과서)에서는 5가 3의 몇 배인지 인지하는 데 어려움을 느낀다. 이와 같은 두 양의 곱셈적 관계를 파악하는 데 정수비가 미치는 영향을 고려할 때, 5차, 6차, 7차, 2009 개정 교과서에서 비 도입 시 정수비를 사용한 의도를 추측할 수 있다.

위와 같은 분석을 실시하는 과정에서, 추가적으로 각 교과서에 제시된 활동 중 몇 가지 주목할 만한 내용을 확인할 수 있었다. 이 중 2007 개정 교과서는 16인승 버스에 12명이 탄 경우와 20인승 버스에 16명이 탄 경우의 비율을 각각 구하고, 어느 버스에 탄 사람들이 더 넓게 느낄 것이라고 생각하는지 묻는 문제를 제시함으로써 학생들이 비율을 단순히 구하는 것뿐만 아니라 비율의 개념을 실생활에 적용하여 수학적으로 사고할 수 있는 경험을 하도록 구성한 점이 특이점으로 파악되었다. 또한 2009 개정 교과서에서 세 직사각형을 제시하고 세로에 대한 가로의 비율을 나타내어 비교해보는 활동을 제시한 점에 주목할 필요가 있다([그림 2]). 정영옥(2005)에서 비와 비율 개념을 깊이 있게 이해하기 위해서는 수량적 단계와 형식적 단계에 앞서 직관적 단계에 대한 많은 경험이 필요하기 때문에 기하적 상황을 다루어 지도할 필요가 있다고 주장한 것에 기초할 때 이러한 교과서 활동은 학생들의 비와 비율 학습에 긍정적인 영향을 줄 것으로 보인다. 그 밖에 2009 개정 교과서의 특징 중 하나는 '%p(퍼센트포인트)' 개념을 도입했다는 것이다. 우리는 일상생활에서 두 백분율을 뺄셈으로 비교하는 경우를 종종 접하게 된다. 실제 두 백분율의 차이를 구하는 상황에서는 %p를 쓰는 것이 적절하기 때문에 교과서에서 이에 대해 다룬 것은 비율과 실생활과의 연결성을 고려한 시도라고 볼 수 있다.

[그림 2] 2009 개정 교과서의 비율 차시에 제시된 기하적 상황(교육부, 2015b)

2. 국외 교과서의 비와 비율 내용 분석 결과

일본, 싱가포르, 홍콩, 핀란드 교과서의 비와 비율 관련 단원 및 차시를 분석하여 비와 비율과 관련한 학습 요소와 지도 순서(<표 8>), 관련 개념의 정의(<표 9>), 개념의 도입 방법(<표 10>)을 제시하고, 국가별 교과서가 취한 세부적인 특징을 기술하였다.

가. 국외 교과서의 비와 비율 학습 요소 및 지도 순서

일본, 싱가포르, 홍콩, 핀란드 교과서의 비와 비율 관련 학습 요소 및 지도 순서를 분석한 결과는 <표 8>과 같다.

<표 8> 국외 교과서의 비와 비율 관련 학습 요소 및 지도 순서

	단원명	학습 요소
일본	5上-7. 비교하는 방법 생각하기(1)	1. 단위량당의 크기 알기(비교하는 방법) 2. 단위량당의 크기 활용하기 3. 단위량당의 크기와 전체의 양으로부터 길이 구하는 방법 알기
	5下-12. 비교하는 방법 생각하기(2)	1. 와리아이 알기 2. 백분율 알기 3. 백분율 활용하기(1) - 비교하는 양=기준량×와리아이 4. 백분율 활용하기(2) - 기준량 구하기 5. 백분율 활용하기(3) - 물건 구입하기
	6上-6. 비율을 나타내는 방법 생각하기	1. 비와 비의 값 알기 2. 비의 성질 알기 3. 비를 간단히 하기 4. 같은 비 찾기 5. 비의 이용 사례 알아보기
싱가포르	5A-5. Ratio(비)	1. 비 알기 2. 동치비 알기 3. 세 양의 관계를 비로 나타내기
	5B-3. 백분율	1. 백분율 알기 2. 분수를 백분율로 변환하기
	6A-3. 백분율	1. 주어진 부분과 백분율을 이용하여 전체 찾기 2. 백분율로 변환하기
	6A-4. Ratio(비율)	1. 비를 분수로 표현하기, 분수를 비로 표현하기 2. 동치분수와 비율 알기 3. 비율로 변환하기
	6A-5. 속력	1. 속력 및 평균 속력 구하기
	6B-6. 도전 문제(2)	1. 비율 관련 문제 해결하기 2. 속력 관련 문제 해결하기 3. 백분율 관련 문제 해결하기
홍콩	6A-12. 백분율 (1)	1. 100칸 모눈에서 색칠된 칸을 %로 나타내기 2. 분모가 100인 분수를 %로 나타내기 3. 수직선에서 백분율 어림하기
	6A-13. 백분율 (2)	1. 100을 전체로 하여 부분을 백분율로 나타내기
	6A-14. 백분율과 소수	1. 백분율을 소수로 나타내기 2. 소수를 백분율로 나타내기
	6A-15. 백분율과 분수	1. 분수를 백분율로 나타내기 2. 백분율을 분수로 나타내기
	6B-1. 백분율 관련 간단한 문제 (1)	1. 전체 중의 부분을 분수로 나타내고 백분율로 변환하기 2. 백분율, 기준량으로 비교하는 양 구하기
	6B-2. 백분율 문제 (2)	1. 백분율을 이용하여 크기 비교하기
	6B-3. 백분율 문제 (3)	1. 서로 다른 항목 간 백분율의 차이 알아보기
	6B-4. 할인 (1)	1. 할인율을 보고 할인 금액 구하기
	6B-5. 할인 (2)	1. 원금, 할인 금액을 보고 할인율 구하기
	6B-6. 속력 (1)	1. 거리, 소요 시간을 이용하여 속력 구하기 2. 속력의 단위
	6B-6. 속력 (2)	1. 속력, 소요 시간을 이용하여 거리 구하기
	6B-6. 속력 (3)	1. 속력, 거리를 이용하여 소요 시간 구하기
핀란드	5-1-2. 소수	1~10. 소수의 덧셈, 뺄셈, 곱셈, 나눗셈 11. 소수와 백분율
	5-1-3. 도형-원, 각도, 넓이, 대칭, 비율	1. 컴퍼스로 원 그리기 2~6. 각도 7~10. 넓이 11. 대칭과 합동 12. 도형의 닮음 13. 커지는 정비례 (비교하는 양, 기준량) 14. 줄어드는 반비례
	5-2-1. 분수	1~7. 분수의 덧셈, 뺄셈, 곱셈, 나눗셈 8. 분수와 소수 9. 분수, 소수, 백분율
	6-2-2. 백분율	1. 분수, 소수, 백분율 2. 1%를 이용한 백분율의 계산 3. 백분율의 곱셈 4. 백분율 계산하기 5. 응용 문제 6. 백분율의 변화에 따른 양의 변화 7. 백분율로 변환하기 8. 백분율 변화의 계산
	6-2-3. 시간과 비율	1~4. 시간 계산 5. 닮음과 확대, 축소 6. 비율의 계산 7. 원래의 길이 계산하기 8. 지도의 축척 9. 다양한 비율

먼저, 일본 교과서에서는 단위량당의 크기(외적 비율)→와리아이(내적 비율)→백분율→비→비의 값 순으로 지도되며, 이는 비, 비율(내적비, 외적비 무관), 백분율 순으로 지도하는 우리나라와 차이가 있는 것으로 드러났다.

싱가포르 교과서는 비→백분율→비율 순으로 지도되며, 5학년과 6학년에 걸쳐 비와 비율, 특히 백분율을 폭넓게 다루고 있다. 또한 5A, 6A 둘 다 단원명을 Ratio라고 제시하고 있음에도 불구하고, 우리나라의 비와 비율에 해당하는 내용이 구분 없이 등장하는 것을 통해 우리의 경우처럼 비와 비율을 명시적으로 구분하지는 않음을 추측할 수 있다.

홍콩 교과서에서는 우리나라의 비 개념은 제시되지 않으며, 6학년 때 1학기, 2학기에 걸쳐 백분율과 실생활 비율 사례를 여러 단원에 걸쳐 폭넓게 다루고 있다. 특히 실생활에서 비율이 적용되는 대표적 사례인 할인, 속력 등이 별도의 단원으로 구성되어 실생활과의 연계를 통해 비율을 맥락 속에서 지도하고 있음을 알 수 있다.

마지막으로 핀란드 교과서는 5학년 때 소수, 분수의 계산 및 도형의 닮음을 지도하면서 백분율, 비율을 함께 다루며, 여러 단원에서 그 내용이 확대 · 심화되어 반복적으로 나타나는 것으로 파악되었다. 예컨대 [그림 3]과 같이 5-1에서 소수를 학습하면서 백분율을 지도한 후, 5-2에서 분수를 학습하면서 앞서 배운 소수, 백분율과 연계하여 세 수의 관계를 이해하도록 제시하고 있는 것이 특징적이다. 또한 도형의 닮음과 함께 확대, 축소되는 비율을 제시함으로써 다양한 기하적 상황에서 직관적으로 비율을 지도하는 것을 알 수 있다. 핀란드 교과서는 백분율에 대한 단원 및 차시가 차지하는 비중이 큰 것으로 분석되었고 실제로 비율이 적용되는 다양한 실생활 소재(예, 핀란드에 사는 박쥐의 심장 박동 수와 몸무게 구하기, 여러 국가의 국기에서 각 색깔이 차지하는 비율 구하기, 실제 핀란드 지도에서 거리 구하기, 세계 지도에서 각 대륙의 넓이 구하기 등)를 사용하여 백분율, 비율을 지도하고 있는 것이 주목할 만하다.

[그림 3] 핀란드 교과서 5-1, 5-2의 백분율 제시 사례(Risto et al., 2012a; 2012b)

나. 국외 교과서의 비, 비의 값, 비율, 백분율 용어의 정의

일본, 싱가포르, 홍콩, 핀란드 교과서에서 제시하고 있는 비, 비의 값, 비율, 백분율의 정의를 정리하면 <표 9>와 같다.

<표 9> 국외 교과서의 비, 비의 값, 비율, 백분율의 정의

	비	비의 값	비율	백분율
일본	2와 3의 와리아이를 :의 기호를 사용하여 2:3과 같이 나타낸다. 이와 같이 나타낸 와리아이를 비라고 한다.	$a:b$의 비에서 a를 b로 나눈 몫을 비의 값이라고 한다. 2:3의 비의 값은 $\frac{2}{3}$이다.	붐비는 정도를 비교할 때 1㎡당 평균 토끼 수를 조사하거나 한 마리당 평균 넓이를 조사하여 비교하면 편리하다. 이와 같이 나타낸 크기를 '단위량당의 크기'라고 한다. 비교하는 양이 기준으로 하는 양의 얼마 만큼에 해당하는가를 나타낸 수를 '와리아이'라고 한다.	와리아이를 나타내는 0.01을 1퍼센트라 하고 1%라고 쓴다. 퍼센트로 나타낸 와리아이를 백분율이라고 한다. (백분율은 기준량을 100으로 본 와리아이의 표시 방법이다. 와리아이 1은 백분율로 나타내면 100%이다.)
싱가포르	3:2의 비를 3대 2라고 읽는다. 비는 단위가 없다.	-	-	%는 백분율의 기호이다. 59%는 100분의 59를 의미한다. $59\% = \frac{59}{100} = 0.59$
홍콩	-	-	-	백분율(%)-100의 한 부분 또는 100 중 얼마 예, 1=100% 100칸 중에서 30칸이 색칠되어 있다. 분수로는 $\frac{30}{100}$, 백분율로는 30%라고 나타낸다.
핀란드	-	-	-	소수 둘째 자리는 백분율로도 사용한다. 백분율의 기호는 %이다. / 1%는 $\frac{1}{100}$을 의미한다. (백분율 정의 여러 번 제시)

분석 결과, 4개국 모두에서 정의를 제시하고 있는 용어는 백분율로 나타났고, 비는 일본과 싱가포르 교과서에서만, 비의 값과 비율은 일본 교과서에서만 정의하고 있다.

먼저 일본과 싱가포르 교과서에 제시된 비의 정의는 두 국가 모두 비를 내적비 상황에서만 다루고 있음을 보여 준다. 일본 교과서는 명시적으로 '2와 3의 와리아이를 … 비라고 한다'고 표현하고 있으며, 싱가포르 교과서는 '비는 단위가 없다'고 기술함으로써 내적비를 함의함을 파악케 한다. 한편, 유일하게 비의 값과 비율을 정의하고 있는 일본 교과서에서 비율은 5학년 때, 비의 값은 6학년 때 분리하여 제시하고 있다. 먼저, 비율 개념을 같은 종류의 두 양(와리아이)과 다른 종류의 두 양(단위량당의 크기)으로 구분하여 정의하고 있어, 양자를 구분 없이 정의하는 우리나라와 다소 차이가 있다. 비의 값은 a를 b로 나눈 몫이라고 조작적으로 정의하고 있어 비율과 정의 방식에 차이를 보인다.

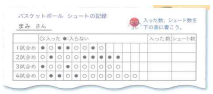
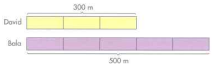
백분율의 경우, 일본 교과서에서는 와리아이를 나타내는 0.01을 1%라 하고, 퍼센트로 나타낸 와리아이를 백분율이라 하며, 이러한 백분율은 기준량을 100으로 본 와리아이의 표시 방법이라는 것, 와리아이의 1은 100%라는 것을 상세히 안내하고 있다. 그 밖에 싱가포

르, 홍콩, 핀란드는 100칸 모눈을 제시하여 백분율의 의미와 표현 방법을 상세히 안내하고 있는 것으로 나타났다. 특히, 일본, 싱가포르, 핀란드 교과서는 1%를 안내하고 있다는 점, 일본, 홍콩, 핀란드 교과서는 1=100%임을 안내하고 있다는 점이 특징적이다.

다. 국외 교과서의 비, 비의 값, 비율, 백분율의 도입 방법

일본, 싱가포르, 홍콩, 핀란드 교과서에서 비, 비의 값, 비율, 백분율의 도입 방법을 정리하면 <표 10>과 같다.

<표 10> 국외 교과서의 비와 비율 개념 도입 방법

		맥락	내적비	외적비	정수비	시각적 표현
일본	비	요리 2인분 : 요리 3인분 (2 : 3)				그림
	단위량당의 크기	토끼 수 : 토끼장 넓이 (9 : 6)				그림 → 표 → 추상화된 그림
	와리아이	슛 성공 횟수 : 슛 시도 횟수 (4 : 8)				표 형태의 그림 
	백분율	선수로 뽑힌 학생 수 : 전체 학생 수 (12 : 80)				이중 수직선
싱가포르	비	흰 밀가루의 컵 수 : 통 밀가루의 컵 수 (3 : 2)				그림
	비율	데이비드가 수영한 거리 : 벨라가 수영한 거리 (300 : 500)				색 막대 
	백분율	색칠된 칸 수 : 모눈 100칸 (59%=$\frac{59}{100}$=0.59)				100칸 모눈
홍콩	백분율	(도입 맥락 없음) 색칠된 칸 수 : 모눈 100칸 ($\frac{30}{100}$, 30%)				100칸 모눈
핀란드	비	늘어난 길이 : 처음 길이 (3 : 1)				그림
	비율					
	백분율	(도입 맥락 없음) 색칠된 칸 수 : 모눈 100칸 (0.01=1%)				100칸 모눈

비에 있어 일본 교과서는 요리 2인분과 3인분을 비교하는 상황, 싱가포르 교과서는 빵을 만들기 위해 흰 밀가루 3컵과 통 밀가루 2컵을 비교하는 상황, 핀란드 교과서는 도형이 3배만큼 늘어난 상황을 통해 비(비율)를 지도하는 것으로 나타났다[11]. 이때 세 교과서 모두 비에 대한 이해를 돕는 시각적 표현으로 맥락에 맞는 그림을 제시하고 있다.

비율의 경우, 일본 교과서에서는 단위량당의 크기를 도입할 때 넓이가 다른 여러 토끼장에 토끼가 들어가 있고 붐비는 정도를 비교하는 상황, 와리아이를 도입할 때는 농구 경기를 하여 시도한 슛 횟수와 성공한 슛 횟수를 비교하는 상황을 제시하고 있다. 먼저 단위량당의 크기를 도입할 때는 맥락에 맞는 그림, 표, 추상화한 그림 순으로 제시하여 학생들이 맥락에 대한 이해를 바탕으로 개념을 이해할 수 있도록 돕고 있다. 게다가 토끼장 넓이에 대한 토끼 수의 비율을 구하는 상황에 이어서 역으로 토끼 한 마리 당 토끼장의 넓이를 구하는 상황을 제시하여 단위가 달라지는 경우를 이해하도록 지도하고 있다. 와리아이의 경우에도 표 형식의 그림을 제시하여 주어진 맥락을 직관적으로 파악할 수 있도록 하였다. 싱가포르 교과서에서는 벨라가 수영한 거리에 대한 데이비드가 수영한 거리의 크기를 분수로 나타내도록 하여 비율을 도입하고 있고, 이때 각각의 거리를 나타내는 색 막대를 사용하여 직관적으로 비율에 대한 이해를 돕고 있다.

마지막으로 백분율은 4개국 교과서 전반에서 매우 풍부하게 구현되고 있다. 백분율 도입 시 맥락을 제공하고 있는 국가는 일본과 싱가포르이다. 일본 교과서는 학생 80명 중 선수 12명을 뽑는 상황을 이중 수직선과 함께 제시하였으며, 싱가포르 교과서는 100칸 모눈에 59칸을 칠해 그림을 완성한 상황을 모눈 그림과 함께 제시하여 직관적으로 이해를 돕는다. 한편 홍콩, 핀란드 교과서는 백분율 도입 시 별도의 맥락을 제시하지는 않았으나, 시각적 표현으로 100칸 모눈을 제시하여 백분율 개념에 대한 이해를 돕는다.

개념 도입 시 내적비, 외적비의 사용 여부를 분석한 결과, 외적 비율을 명시적으로 지도하고 있는 일본 교과서에서 단위량당의 크기 개념의 도입 시 외적비를 다룬 것을 제외하고, 4개국 모두 비, 비율, 백분율 도입 시 내적비 상황을 제시하고 있는 것으로 드러났다. 한편, 일본 교과서의 와리아이 도입 시와 핀란드 교과서의 비, 비율, 백분율 도입 시를 제외하고는, 관련 개념 도입 시 정수비를 사용하고 있는 교과서는 없는 것으로 나타났다.

위의 분석 과정 중 각국의 교과서에 제시된 비와 비율 내용 중 몇 가지 특징적 요소가 부수적으로 파악되었다. 첫째, 4개국 교과서 모두 비와 비율에 관한 다양한 실생활 소재들을 폭넓게 활용하고 있다. 예컨대, 일본 교과서의 도시 면적당 인구 수, g당 가격을 구하는 실생활 활동, 싱가포르 교과서의 별도의 속력 단원과 홍콩 교과서의 별도의 할인, 속력 단원의 구현, 핀란드 교과서에서 자국에 관한 다양한 실생활 소재를 다수의 문제로 다루고 있는 점 등이 파악되었다. 이러한 교과서 구성은 학생들의 흥미를 유발할 뿐만 아니라, 학생들이 학습한 비와 비율을 실생활과 연계하여 활발하게 적용하게 할 것이라 기대된다. 특히 싱가포르 교과서는 백분율 용어를 약속하면서 용어의 유래를 제시하거나 비율 도입에 앞서 황금비율에 관해 소개함으로써 수학 학습에 대한 흥미를 자극하고 있는 점도 주목할 만하다. 둘째, 싱가포르, 홍콩, 핀란드 교과서는 우리나라와 달리 비, 비율, 백분율 개

11) 분석 결과, 홍콩 교과서에는 우리나라의 비, 비율 개념 및 표현은 등장하지 않으며, 비율과 관련해서는 실생활에서 사용되는 대표적 사례인 속력 개념을 지도하는 것으로 드러났다. 한편 핀란드 교과서는 비, 비율 개념을 별도로 지도하지 않고 도형의 확대, 축소를 다루면서 정비례, 반비례를 지도하는 과정 중에 자연스러운 맥락 속에서 함께 다루고 있다. 싱가포르 교과서에서는 비, 비율 표현이 등장하기는 하나 이 또한 같은 차시에서 혼합적으로 다루어지고 있어, 홍콩, 핀란드, 싱가포르 3개국 모두 비, 비율, 백분율 개념을 명시적으로 구분하여 지도하지 않음을 파악할 수 있다.

념 각각을 확연히 구분하여 지도하지 않는 것으로 드러났다. 특히 비율, 백분율은 소수와 분수를 학습하는 과정 중에서 자연스럽게 함께 다루어지고 있으며, 핀란드 교과서의 경우에는 소수 및 분수 학습 시 반복적으로 백분율을 다룬 후, 이후 백분율 단원에서 본격적으로 선수 학습에 기초하여 백분율 개념을 학습하게 구성함으로써 백분율에 대한 깊은 이해를 지닐 수 있도록 하고 있다. 셋째, 홍콩, 핀란드 교과서의 경우 백분율에 대한 개념을 지도할 때 내포적 정의와 조작적 정의를 두루 사용하는 것을 알 수 있다. 두 국가 모두 직관적으로 기준량이 100일 때 백분율을 구하는 활동을 충분히 제시한 후, 분수에 100%를 곱하여 퍼센트로 나타내는 방법을 익히도록 구성하고 있는 점이 특징적이다.

Ⅴ. 논의 및 시사점

본 연구 결과는 크게 종적 분석과 횡적 분석으로 나뉜다. 먼저 5차부터 2009 개정 교과서의 비와 비율 단원을 분석한 후, 학습 요소 및 지도 순서(<표 5>), 비, 비의 값, 비율, 백분율의 정의(<표 6>), 개념의 도입 방법(맥락, 내적비와 외적비 여부, 정수비 여부, 시각적 표현)(<표 7>)을 파악하였고, 이어 일본, 싱가포르, 홍콩, 핀란드 교과서에 대해서도 비와 비율 관련 내용을 분석하여 동일한 기준으로 분석한 결과를 얻었다(<표 8>, <표 9>, <표 10>). 이와 같은 결과에 기초한 몇 가지 논의를 통해 차기 교과서의 비와 비율 단원 구성을 위한 몇 가지 교수학적 시사점을 제안하고자 한다.

첫째, 비, 비율, 백분율 각각의 정의 및 '비의 값' 용어의 사용에 대한 심도 있는 논의가 요구된다. 각 교육과정별 및 국외 교과서마다 각각을 정의하는 데 있어서 차이가 있고, 2007 개정 교과서에서는 삭제되었던 비의 값이 2009 개정 교과서에서 재등장하는 등 비와 비율 단원에서 다루어지는 개념들은 여느 단원의 개념들에 비해 다양한 변화와 의견 차가 존재하는 것을 알 수 있다. 따라서 비, 비율, 백분율 본연의 개념을 잘 드러내고 학생들에게 적절히 이해가 가능한 표현으로 각 용어를 정의하기 위한, 그리고 과연 비율과 같은 의미로 사용되는 비의 값이란 용어를 사용할 필요가 있는지에 대한 집필진의 심도 있는 고찰이 요구된다. 이를 통해 각각을 위해 어떤 유형의 정의를 제시할지에 대한 교수학적 결정이 따라야 할 것이다. 현행 2009 개정 교과서에서 취한 절차 중심의 정의 방식은 학생들의 개념적 이해를 약화시킬 가능성을 고려하여 재고의 여지가 있다.

둘째, 비, 비율, 백분율의 도입 방법에 대한 신중한 선택이 요구된다. 먼저, 분석 결과는 각 교과서에서 취한 개념 도입 맥락이 매우 다양함을 보여준다. 도입 맥락은 학생의 동기 유발뿐만 아니라 개념 정의로까지 연결되기 때문에 유의미한 도입 맥락을 선택하되, 불필요한 어려움을 야기하는 맥락은 아닌지 세심한 고찰이 필요하다. 이때 외적비와 내적비의 적절한 사용에 대해서도 고려해야 한다. 국내외 교과서는 주로 내적비 상황을 다루고 있으나, 일본 교과서는 외적비와 내적비를 명시적으로 구분하여 다루고 있기도 하다. 선행연구 중 내적비를 충실히 다룬 후 외적비를 다루어야 한다는 주장(강완 외, 2013; 김수현, 나귀수, 2008), 외적비에 해당하는 새로운 용어를 모색하여 외적비를 다루어야 한다는 제안(임재훈, 2015)도 있는 반면, 비율 지도는 내적비로만 다루어져 한다는 주장(박교식, 2010)도 있다. 이처럼 다양한 견해차는 차기 교과서 집필 시, 외적비와 내적비를 어떤 내용으로, 또 어떤 순서로 제시할 지에 대한 논의가 필요함을 시사한다. 비록 외적비는 학생들에게 학습의 어려움을 야기할 수 있으나(Freudenthal, 1983) 실제 우리 생활에서 폭넓게 활용되기 때문에 실생활과 자연스럽게 연계되는 상황으로 적절히 도입될 필요가 있고(정

영옥, 2005), 이는 2015 개정 교육과정에서도 확인되는 바이다. 따라서 실생활과 비와 비율의 접목성을 고려하여 외적비를 교과서에서 다루는 것이 바람직할 것이다. 다만, 이를 실생활 맥락 속에서 학생들에게 학습 부담을 주지 않으면서도 의미 충실하게 다루는 방법에 대한 논의가 요구된다. 이때 인위적이고 무의미한 외적비의 적용은 비와 비율 학습에 불필요한 어려움만 야기할 가능성이 있으므로 지양해야 할 것이다. 또한 비 개념에서 두 양 사이의 관계를 승법적으로 이해하는 데 도움을 주는 정수비의 역할을 고려한다면 교과서에서 어떠한 경우에 정수비를 사용하는 것이 바람직할지 논의가 필요하다. 본 연구 결과에 기초할 때, 적어도 비 개념의 도입 시에는 정수비를 사용할 것이 권장된다.

셋째, 비와 비율 관련 개념을 학습하는 데 적절하고 다양한 시각적 표현의 사용을 고려해야 한다. 분석 결과, 국내 교과서는 맥락을 통해 관련 개념을 지도하기는 하나, 이해를 돕는 시각적 표현은 부족한 반면, 대부분의 국외 교과서는 그림, 수직선, 색 막대, 표, 100칸 모눈 등 다양한 표현을 통해 학생들의 학습을 돕는 것으로 나타났다. 따라서 2007 개정 교과서에서 백분율 관련 활동 시 100칸 모눈을 제시한 것처럼, 개념 이해에 유익한 적절한 시각적 표현을 선택하여 제시함으로써 학생들의 학습을 도울 필요가 있다.

넷째, 수치를 이용하여 비와 비율을 구하는 활동뿐만 아니라 직관적으로 비, 비율을 파악해보거나 기하적 상황에서 비, 비율을 구하는 활동도 교과서에 적절히 포함되어야 한다. 강완 외(2013)에 따르면 기하적 상황으로서 지도나 사진과 관련된 확대와 축소, 그림자 현상 등을 적용해 보는 것이 가능하다. 실제로 2009 개정 교과서에서 기하적 상황을 다루고 있기는 하나, 싱가포르, 홍콩, 핀란드 교과서에서는 직관적으로 또는 기하적 장면을 보고 비와 비율을 구하는 활동이 매우 다양하게 포함되어 있어 학생들이 보다 쉽게 비와 비율 개념을 이해하도록 구성되어 있음을 알 수 있다. 초등학생의 발달 단계 및 정영옥(2005), 정은실(2003a) 등 선행 연구에 기초할 때 우리나라 교과서에도 이러한 점을 반영하여 보완할 필요를 확인할 수 있다.

다섯째, 일상생활에서 폭넓게 사용되는 비율, 백분율과 관련하여 창의·융합 역량 강화를 위해 실생활에서 비율 및 백분율이 사용되는 사례를 찾아보고 그에 관한 간단한 문제를 해결하면서 개념을 풍부하게 이해할 수 있도록 교과서를 구성할 필요가 있다. 실제로 비율이나 백분율은 우리 주변에서 매우 빈번하게 사용되는 개념임에도 불구하고, 국내 교과서는 다양한 맥락을 사용하면서도 주변에서 실제로 백분율을 찾아보거나 실생활에서 쓰이는 백분율에 기초하여 학습한 개념을 활용하는 내용이 다소 부족한 것으로 파악되었다. 국외 교과서에서 할인, 속력 등 실생활의 다양한 소재를 활용하고 비와 비율을 실제로 적용해 보는 충분한 기회를 제공하는 것과 대조적이다. 따라서 차기 교과서 개발 시 이러한 점을 보완할 필요가 있다. 다만 박경미 외(2015)에서도 언급하였듯이, 타 교과 및 실생활에서 비율과 관련된 사례들(예, 속력, 축척, 인구밀도 등)을 지나치게 어렵게 도입하거나 각각의 개념들이 또 하나의 학습 요소로서 학습 부담을 야기하지 않도록 주의해야 한다.

마지막으로, 본 연구의 과정 중에 부수적으로 파악된 2009 개정 교과서에서 강조된 비교하는 양, 기준량 구하는 활동에 대해 충분한 고찰이 요구됨을 제언하고자 한다. 물론 비교하는 양, 기준량이 비율 학습 시 필수 요소이지만, 비율과 비교하는 양을 이용해 기준량을 계산하거나, 비율과 기준량을 이용해 비교하는 양을 계산하는 활동에 대한 강조 및 상세화는 학습에 어려움을 야기할 우려가 있다. 따라서 관련 내용을 어느 정도로 명시적으로 다룰 것인지에 대한 후속 논의가 요구된다. 이전 교육과정의 교과서처럼 비율을 이해하는 과정에서 비교하는 양, 기준량 개념이 자연스럽게 등장하여 이해하는 수준으로 다루어지는 것도 대안이 될 수 있을 것이다.

참 고 문 헌

강완 (2016). **초등 수학 교과서의 잘잘한 감자들**. 서울: 교우사.

강완, 나귀수, 백석윤, 이경화 (2013). **초등수학 교수 단위 사전**. 서울: 경문사.

교육과학기술부 (2011). **수학 5-2**. ㈜동아.

교육인적자원부 (2002). **수학 6-가**. 대한교과서 주식회사

교육부 (1997). **수학 5-2**. 국정교과서주식회사.

교육부 (2015a). **2015 개정 수학과 교육과정. 교육부 고시 제2015-74호** [별책 8].

교육부 (2015b). **수학 6-1**. ㈜천재교육.

권미숙, 김남균 (2009). 초등학교 6학년 학생들의 교과서 비례 문제 해결과 비례 추론에 관한 연구. **한국초등수학교육학회지, 13**(2), 211-229.

김경희, 백희수 (2010). 비와 비율 영역에 대한 우리나라와 싱가포르 교육과정 및 교과서 비교. **학교수학, 12**(4), 473-491.

김성준, 김수환, 신준식, 이대현, 이종영, 임문규, 정은실, 최창우 (2015). **초등학교 수학과 교재연구와 지도법**. 경기도: 동명사.

김수현, 나귀수 (2008). 비와 비율 지도에 대한 연구 : 교과서 재구성을 중심으로. **수학교육학연구, 18**(3), 309-333.

김용익 (2009). **비례상황에 기초한 비의 지도 방법 연구**. 한국교원대학교 대학원 박사학위 논문.

문교부 (1990). **산수 5-2**. 국정교과서주식회사.

박경미 외 (2015). **2015 개정 수학과 교육과정 시안 개발 연구 Ⅱ**. 교육부, 한국과학창의재단.

박교식 (2010). 우리나라 초등학교 수학에서의 비율 정의와 비의 값 정의의 비판적 분석. **수학교육학연구, 20**(3), 397-411.

박희옥, 박만구 (2012). 내용: 비와 비율 학습에서 나타나는 초등학교 학생들의 인식론적 장애 분석. **C-초등수학교육, 15**(2), 159-170.

사교육걱정없는세상 (2015). **6개국 수학 교육과정 국제 비교 컨퍼런스**.

세계일보 (2016). **[공부가 술술] '수포자' 안되려면 단계적으로 수와 연산 능력 쌓아야**. 2016.01.25. http://www.segye.com/content/html/2016/01/24/20160124001504.html?OutUrl=naver.

안숙현, 방정숙 (2008). 5,6,7학년 학생들의 비례추론 능력 실태 조사. **수학교육학연구, 18**(1), 103-121.

유현주 (1995). **유리수 개념의 교수현상학적 분석과 학습-지도 방향에 관한 연구**. 서울대학교 대학원 박사학위논문.

이정은, 김지원, 박교식 (2015). 우리나라와 일본의 초등학교 수학 교과서에 제시된 비율의

정의 비교 연구. **한국초등수학교육학회지, 19**(4), 485-499.

이혜숙 (2015). **맥락성 관점에서 한국과 싱가포르 초등수학 교과서의 비와 비율 관련 단원 비교연구**. 이화여자대학교 교육대학원 석사학위논문.

임재훈 (2015). 비의 값과 비율 용어에 대한 교수학적 분석. **한국초등수학교육학회지, 19**(3), 371-386.

장혜원 (2002). 초등학교 수학에서 비의 값과 비율 개념의 구별에 대한 논의. **학교수학, 4**(4), 633-642.

정영옥 (2005). 초등학교에서 비와 비례식 지도에 대한 고찰 - 한국, 미국, 일본, 중국을 중심으로 -. **과학교육논총, 18**, 13-28.

정유경, 정영옥 (2015). 초등학생들의 비례 추론 전략 분석 -6학년을 중심으로-. **한국초등수학교육학회지, 19**(4), 457-484.

정은실 (2003a). 비 개념에 대한 교육적 분석. **수학교육학연구, 13**(3), 247-265.

정은실 (2003b). 비 개념에 대한 역사적, 수학적, 심리적 분석. **학교수학, 5**(4), 421-440.

정은실 (2013). 초등학교 수학 교과에서의 비례 추론에 대한 연구. **수학교육학연구, 23**(4), 505-516.

홍갑주 (2013). 초등학교 2007 개정 교과서 비와 비율 관련 용어에 대한 고찰. **수학교육학연구, 23**(2), 285-295.

Baroody, A, J., Wilkins, J, L, M. & Coslick, R. T. (1947). Fostering children's mathematical power : An investigative approach to K-8 mathematics instruction. 권성룡 외 (역) (2005). **수학의 힘을 길러주자: 왜? 어떻게?**. 서울: 경문사.

Collars, C., Koay, P. L., Lee, N. H., Ong, B. L., & Tan, C. S. (2014a). *Shaping maths coursebook 5A.* Marshall Cavendish Education.

Collars, C., Koay, P. L., Lee, N. H., Ong, B. L., & Tan, C. S. (2014b). *Shaping maths coursebook 5B*. Marshall Cavendish Education.

Collars, C., Koay, P. L., Lee, N. H., Ong, B. L., & Tan, C. S. (2014c). *Shaping maths coursebook 6A*. Marshall Cavendish Education.

Collars, C., Koay, P. L., Lee, N. H., Ong, B. L., & Tan, C. S. (2014d). *Shaping maths coursebook 6B*. Marshall Cavendish Education.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.

Karplus, R., Pulos, S., & Stage, E. (1983). Proportional reasoning of early adolescents. In Lesh, R., & Landau, M. (Eds.), *Acquisitions of Mathematics Concepts and Processes*, 45-90. NY: Academic Press.

Lesh, R., Post, T., & Behr, M. (1988). Proportional reasoning. *Number concepts and operations in the middle grades, 2*, 93-118.

Lamon, S. J. (1999). *Teaching fractions and ratios for understanding : Essential context knowledge and instructional strategies for teachers*. Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: The Author.

Noelting, G. (1980). The development of proportional reasoning and the ratio concept Part I—differentiation of stages. *Educational Studies in Mathematics, 11*(2), 217-253.

Pan Lloyds Publishers. (2012a). *Effective steps to mathematics 6A*. Pan Lloyds Publishers Ltd.

Pan Lloyds Publishers. (2012b). *Effective steps to mathematics 6B*. Pan Lloyds Publishers Ltd.

Piaget, J. (1977). *Epistemology and psychology of functions, 23*. Springer Science & Business Media.

Risto, I., Marjatta, K., Merja, S., Ann, M., S., & Tuula, U., L. (2012a). LASKUTAITO in English 5A. WSOY pro., Ltd. 문보람, 도영 (역) (2012). **핀란드 초등수학교과서 Laskutaito 5-1 Korean edition**. 서울 : 솔빛길출판사.

Risto, I., Marjatta, K., Merja, S., Ann, M., S., & Tuula, U., L. (2012b). LASKUTAITO in English 5B. WSOY pro., Ltd. 문보람, 도영 (역) (2012). **핀란드 초등수학교과서 Laskutaito 5-2 Korean edition**. 서울 : 솔빛길출판사.

Risto, I., Marjatta, K., Merja, S., Ann, M., S., & Tuula, U., L. (2012c). LASKUTAITO in English 6A. WSOY pro., Ltd. 이영석, 도영 (역) (2012). **핀란드 초등수학교과서 Laskutaito 6-1 Korean edition**. 서울 : 솔빛길출판사.

Risto, I., Marjatta, K., Merja, S., Ann, M., S., & Tuula, U., L. (2012d). LASKUTAITO in English 6B. WSOY pro., Ltd. 이영석, 도영 (역) (2012). **핀란드 초등수학교과서 Laskutaito 6-2 Korean edition**. 서울 : 솔빛길출판사.

Streefland, L. (1985). Search for the roots of ratio: Some thoughts on the long term learning process (towards a theory). *Educational Studies in Mathematics, 16*(1), 75-94.

藤井斉亮, 飯高茂 외 40명. (2013a). **新しい算數 5-上**. 東京: 東京書籍.

藤井斉亮, 飯高茂 외 40명. (2013b). **新しい算數 5-下**. 東京: 東京書籍.

藤井斉亮, 飯高茂 외 40명. (2013c). **新しい算數 6-上**. 東京: 東京書籍.

藤井斉亮, 飯高茂 외 40명. (2013d). **新しい算數 6-下**. 東京: 東京書籍.

<Abstract>

A Comparative Analysis of Ratio and Rate in Elementary Mathematics Textbooks

Chang, Hyewon[12]; & Lim, Miin[13]; & Yu, Migyoung[14]; & Park, Haemin[15]; & Kim, Jusuk[16]; & Lee, Hwayoung[17]

Since mathematics textbooks for 6th graders based on the 2009 revised national curriculum were applied to the site, there has been a note pointing out that the unit of ‘ratio and rate’ causes some learning difficulties. This implies the necessity of search for desirable methods of organizing the unit of ratio and rate in mathematics textbooks. This study analyzed and compared Korean and foreign mathematics textbooks on ratio and rate longitudinally and horizontally, respectively. For longitudinal analysis, we selected the mathematics textbooks according to the national curriculum since the 5th one. For horizontal analysis, we took the mathematics textbooks of Japan, Singapore, Hong Kong, and Finland. In each textbook, the contents and the order in relation to ratio and rate, the definitions of terminology, and the methods for introducing related concepts are set as the analysis framework. The results of analysis revealed many characteristics and the differences in ways of dealing contents about ratio and rate. Based on these results, we suggested some implications for writing the unit of ratio and rate in elementary mathematics textbooks.

Key words: ratio, rate, elementary mathematics textbooks, comparison between curriculums, international comparison

논문접수: 2017. 01. 16
논문심사: 2017. 02. 15
게재확정: 2017. 02. 24

12) hwchang@snue.ac.kr
13) ssbin22@sen.go.kr
14) ky980101@naver.com
15) dr1203@naver.com
16) banwonele@sen.go.kr
17) hylee@kofac.re.kr