한국초등수학교육학회지 21(1) 115-134. Journal of Elementary Mathematics Education in Korea 21(1) 115-134.
2017. 02. 28 February 28. 2017.

확대 상황 포함나눗셈에 대한 고찰

임재훈[1)]

나눗셈의 이해 및 학습 지도에 관한 논의를 더 세밀하게 구체화하기 위해서는 세분된 각 유형의 문제의 특성을 분석할 필요가 있다. 이 논문에서는 포함나눗셈의 한 유형인 확대 상황 포함나눗셈에 대하여, 초등학생, 예비교사, 초등교사 대상 지필 조사 자료와 초등교사 및 예비교사 인터뷰 자료를 바탕으로 논의한다. 마법연필의 길이가 처음의 몇 배가 되었는지 알아보는 문제에 대하여, 초등학생, 예비교사, 초등교사 모두 한 관점의 풀이에 고착되는 경향이 나타났으며, 소수의 초등교사 및 예비교사만이 다른 관점의 풀이를 제시하였다. 또, 선분도나 수직선을 사용하여 풀이를 나타낸 초등학생은 소수였고, 분수배나 소수배를 나타내는 데 어려움을 겪는 아동이 많았다. 초등교사 및 예비교사 인터뷰는 확대 상황 포함나눗셈의 서로 다른 두 풀이가 각각 탈맥락 중시와 맥락 중시, 횟수로서의 배와 연산자로서의 배라는 인식과 연결되어 있음을 보여준다. 이와 같은 결과를 바탕으로, 시각적 모델, 두 가지 풀이와 연결된 인식, 포함나눗셈과 비례의 통합적 이해의 세 측면에서, 확대 상황 포함나눗셈의 특성과 교육적 시사점에 대하여 논의하였다.

주제어: 포함나눗셈, 비교 상황, 확대, 비례 추론, 시각적 표현

Ⅰ. 서 론

초등학교에서 나눗셈은 포함나눗셈과 등분나눗셈의 두 유형으로 도입된다(교육부, 2015a). 포함나눗셈은 전체량과 단위량이 주어지고 그 측정값을 구하는 것 또는 두 양 사이의 배 값을 구하는 것으로, 등분나눗셈은 전체량과 측정값이 주어지고 단위량을 구하는 것 또는 어떤 양이 주어진 배 값을 가질 때 1배에 대한 값을 구하는 것으로 정의될 수 있다(강흥규, 2014).

포함나눗셈과 등분나눗셈의 유형은 더 세분될 수 있다. 예를 들어, 임자선과 김성준(2015)은 아동들의 문제 해결 능력을 조사하면서, 포함나눗셈과 등분나눗셈을 미지수의 위치에 따라 처음량, 변화량, 결과량을 묻는 유형으로 세분하였다. 미국의 Common Core State Standards for Mathematics(National Governors Association Center for Best Practices, & Council of Chief State School Officers, 2010)에서는 [그림 1]과 같이 곱셈과 나눗셈 문제를 Equal groups, Arrays/Areas, Compare 각각을 미지수의 위치에 따라 나누어 9개의 유형으로 세분하고 있다. [그림 1]에서 Unknown Product는 곱셈, Group Size Unknown은 등분나눗셈, Number of Groups Unknown은 포함나눗셈에 대응하는 것으로 볼 수 있다.

1) 경인교육대학교

이 연구는 각각의 세부 유형의 문제가 고유한 특성과 잠재력을 지닐 수 있다는 가정에서 출발한다. 예를 들어 같은 Number of Groups Unknown 열에 속하는 문제라도, Equal groups 유형의 문제와 Arrays/Area 유형의 문제는 다른 특성을 지니고 있다. 예를 들어, $1\frac{1}{4}$에서 $\frac{2}{3}$가 몇 세트 만들어지는가와 같은 문제를 해결하는 과정에서는 공통분모 알고리즘이 자연스럽게 출현하지만(Van de Walle et al., 2009), 넓이가 $\frac{3}{7}m^2$이고 가로의 길이가 $\frac{4}{5}m$인 직사각형의 세로의 길이를 구하는 문제에서는, 공통분모 알고리즘이 아니라, $\frac{3}{7}\div\frac{4}{5}=\frac{3}{7}\div 4\times 5$와 같은 계산법이 자연스럽게 출현한다(백수진, 2009). 나눗셈의 이해 및 학습 지도에 관한 논의를 더 세밀하게 구체화하고 발전시키기 위해서는, 포함나눗셈과 등분나눗셈과 같은 광역적인 수준의 논의에서 한발 더 들어가, 각 세부 유형의 문제의 특성과 잠재력에 대하여 분석, 연구할 필요가 있다. 이러한 취지에서 이 논문에서는 [그림 1]의 9개의 셀 중에서, 기존의 나눗셈 관련 연구에서 그다지 주목되지 않은, Number of Groups Unknown 열의 Compare 유형에 주목하고자 한다.2)

	Unknown Product	Group Size Unknown ("How many in each group?" Division)	Number of Groups Unknown ("How many groups?" Division)
	3 × 6 = ?	3 × ? = 18, and 18 ÷ 3 = ?	? × 6 = 18, and 18 ÷ 6 = ?
Equal Groups	There are 3 bags with 6 plums in each bag. How many plums are there in all? *Measurement example.* You need 3 lengths of string, each 6 inches long. How much string will you need altogether?	If 18 plums are shared equally into 3 bags, then how many plums will be in each bag? *Measurement example.* You have 18 inches of string, which you will cut into 3 equal pieces. How long will each piece of string be?	If 18 plums are to be packed 6 to a bag, then how many bags are needed? *Measurement example.* You have 18 inches of string, which you will cut into pieces that are 6 inches long. How many pieces of string will you have?
Arrays,4 Area5	There are 3 rows of apples with 6 apples in each row. How many apples are there? *Area example.* What is the area of a 3 cm by 6 cm rectangle?	If 18 apples are arranged into 3 equal rows, how many apples will be in each row? *Area example.* A rectangle has area 18 square centimeters. If one side is 3 cm long, how long is a side next to it?	If 18 apples are arranged into equal rows of 6 apples, how many rows will there be? *Area example.* A rectangle has area 18 square centimeters. If one side is 6 cm long, how long is a side next to it?
Compare	A blue hat costs $6. A red hat costs 3 times as much as the blue hat. How much does the red hat cost? *Measurement example.* A rubber band is 6 cm long. How long will the rubber band be when it is stretched to be 3 times as long?	A red hat costs $18 and that is 3 times as much as a blue hat costs. How much does a blue hat cost? *Measurement example.* A rubber band is stretched to be 18 cm long and that is 3 times as long as it was at first. How long was the rubber band at first?	A red hat costs $18 and a blue hat costs $6. How many times as much does the red hat cost as the blue hat? *Measurement example.* A rubber band was 6 cm long at first. Now it is stretched to be 18 cm long. How many times as long is the rubber band now as it was at first?
General	$a \times b = ?$	$a \times ? = p$, and $p \div a = ?$	$? \times b = p$, and $p \div b = ?$

[그림 1] 곱셈과 나눗셈의 유형(Common Core State Standards for Mathematics, p. 89)

[그림 1]의 해당 셀에 있는 두 문장제를 번역하면 다음과 같다.

- 빨간 모자는 18달러이고 파란 모자는 6달러이다. 빨간 모자의 가격은 파란 모자의 가격의 몇 배인가?

2) [그림 1]의 해당 셀의 □는 연구자가 표시한 것이다.

· 6cm인 고무줄을 잡아 늘였더니 18cm가 되었다. 고무줄은 처음 길이의 몇 배가 되었는가?

이 둘은 배를 구하는 포함나눗셈 문제라는 점에서 공통적이지만, 각 문제가 지닌 특성은 다르다. 앞의 문제에서 두 모자 사이에는 별다른 내적인 관계가 없지만, 뒤의 문제에서 처음 고무줄과 나중 고무줄은 후자는 전자를 확대한 것이라는 내적 관련을 맺고 있다. 이 논문의 초점은 위의 고무줄 문제와 같이 처음과 나중의 두 양 사이에 내적인 관련이 있는 확대 상황 포함나눗셈[3]에 있다. 이해를 위한 교육은 수학적 과제의 특성과 그와 관련된 학생들의 사고에 대한 교사의 인식을 바탕으로 하므로, 이 논문에서는 다음 두 문제에 답하면서 확대 상황 포함나눗셈의 특성에 대해 논의한다.

1. 확대 상황 포함나눗셈의 초등학생, 예비교사, 초등교사의 풀이에는 어떤 특징이 있는가?
2. 확대 상황 포함나눗셈 문제에 대한 초등교사 및 예비교사들의 인식은 어떠한가?

Ⅱ. 이론적 배경: 확대 상황 포함나눗셈과 비례

Lamon(1993)은 비례 추론 문제의 유형으로 다음 네 가지를 제시하였다.

· 부분-부분 전체 - 한 부분을 다른 부분 또는 전체와 비교. 예) 한 반에 있는 남학생과 여학생
· 관련된 집합 - 두 양이 순서 없이 관련되어 있음. 예) 피자 : 사람, 사람 : 차
· 잘 알려진 측정 - 잘 알려진 비율이 표현됨. 예) 거리 : 시간, 가격 : 무게
· 늘리거나 줄이기 - 연속적인 두 양 사이의 관계. 예) 확대 또는 축소된 길이

이 연구의 관심은 마지막의 늘리거나 줄이기 유형에 있다. 고무줄 늘리기 문제는 포함나눗셈 문제인 동시에 비례 문제로 볼 수 있다. 나눗셈과 비례는 곱셈적 추론을 기초로 하고 있다는 점에서 개념적인 관련이 있다. Vergnaud(1988)는 곱셈 구조를 지닌 문제를 네 가지 Schema로 분류하였다(<표 1>). Schema 1은 곱셈, Schema 2는 등분나눗셈, Schema 3은 포함나눗셈, Schema 4는 일반적인 비례 문제를 나타낸다. 예를 들어, Schema 3은 a, b 즉, $f(1)$과 $f(x)$를 알 때 x를 구하는 문제를 나타낸다. 자두 18개를 1봉지에 6개씩 넣으면 몇 봉지가 되는가라는 문제는 $6=f(1)$, $18=f(x)$일 때, x를 구하는 문제이다.

일반적인 비례 문제는, 곱셈, 등분나눗셈, 포함나눗셈의 일반화에 해당한다고 볼 수 있다. 학생들은 곱셈 구조의 문제를 풀면서, 분수, 비, 비례와 같은 다양한 개념을 발달시킨다(Behr, Harel, Post & Lesh, 1992). 곱셈적 추론의 발달이나 비례 관계의 이해에서 양의 개념과 합성 단위의 구성, 측정 단위의 이해가 중요한 역할을 한다(Harel and Behr, 1988). <표 1>에서 M_1, M_2는 각각의 측정 단위로 만들어진 측정 공간을 뜻한다.

3) 이와 유사하게, "처음에 18cm로 늘어나 있는 고무줄의 한 끝을 놓았더니 6cm가 되었다. 나중 고무줄의 길이는 처음에 늘어나 있던 고무줄의 길이의 몇 배인가?" 와 같은 문제 상황은 '축소 상황 포함나눗셈'이라고 명명할 수 있다. 이 논문에서는 아동, 예비교사, 교사의 확대 상황 포함나눗셈 풀이 자료를 바탕으로 확대 상황 포함나눗셈에 한정하여 논의하였지만, 그 논의의 상당 부분은 축소 상황 포함나눗셈에도 적용될 수 있을 것으로 보인다. 그렇다고 한다면, 이 논문은 '확대-축소 상황 포함나눗셈'을 분석한 것으로 간주될 수 있다.

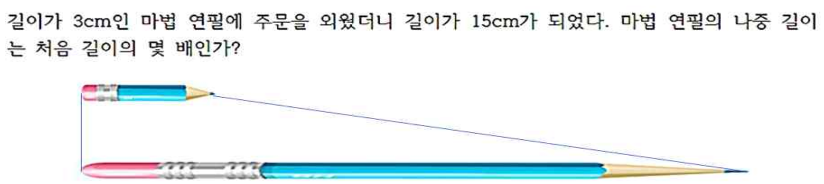
<표 1> 곱셈 구조의 네 가지 schema

Schema 1		Schema 2		Schema 3		Schema 4	
M_1	M_2	M_1	M_2	M_1	M_2	M_1	M_2
1	a	1	$x=f(1)$	1	$a=f(1)$	a	b
b	x	a	$b=f(a)$	x	$b=f(x)$	c	x

등분나눗셈에서는 “자두 18개를 6명이 똑같이 나누어 가질 때, 1명은 자두 몇 개를 가지게 됩니까?” 와 같이 문장제 안에 1이라는 수치가 항상 등장하지만, 포함나눗셈에는 “(Equal groups) 자두 18개를 1봉지에 6개씩 넣으면, 몇 봉지가 됩니까?” 와 같이 수치 1이 문장제에 드러나는 유형도 있고, “(Compare) 6cm의 고무줄을 잡아 늘였더니 18cm가 되었습니다. 고무줄은 처음 길이의 몇 배가 되었습니까?“와 같이 수치 1이 드러나지 않는 유형도 있다. Equal groups 유형의 문제에는 M_1에 속하는 1과 M_2에 속하는 6, 18의 세 수가 문제에 드러나 있으므로, 비례 문제(6개:1봉지=18개:□봉지)로 파악하기 수월하다. 그러나 몇 배를 묻는 Compare 유형의 문제는 문장제 안에 M_2에 속하는 6과 18이라는 두 개의 수만 드러나 있고 M_1이 드러나 있지 않으므로, 앞의 Equal groups 유형의 문제보다, 비례 문제로 파악하기 어렵다. 이 유형을 비례 문제로 보기 위해서는 ‘배’를 나타내는 측정 공간 M_1을 구성해야 한다. 그러면 M_2의 6이 M_1의 1에 대응할 때, M_2의 18에 대응하는 M_1의 값을 구하는 비례 문제(6cm:1배=18cm:□배)로 볼 수 있다.

비례 추론은 각 측정 공간 내에 있는 양들의 공변 관계의 이해와 두 측정 공간 사이의 불변성의 이해로 이루어진다(Lamon, 2007). 복숭아 주스 3컵과 포도 주스 5컵을 섞어 만든 혼합 주스와 같은 맛의 혼합 주스를 4배 만들려면 복숭아 주스 12컵과 포도 주스 20컵이 필요하다. 이때 복숭아 주스의 컵 수가 3컵에서 12컵으로 4배가 되면 포도 주스의 컵 수도 5컵에서 20컵으로 4배가 되는 공변 관계가 성립한다. 이와 같이 부분의 크기는 그대로 둔 채 부분의 개수를 변화시키는 것을 Beckmann과 Izsák(2015)은 다중묶음 관점(multiple-batches perspective)이라고 부른다. 한편, 복숭아 주스와 포도 주스의 양을 4배로 하기 위해 컵의 개수가 아닌 컵의 크기를 늘려도 된다. 원래 컵보다 크기가 4배 큰 컵으로 복숭아 주스 3컵과 포도 주스 5컵을 취하면 주스의 양은 각각 처음의 4배가 된다. 이와 같이 부분의 개수는 그대로 둔 채 부분의 크기를 변화시키는 것을 Beckmann과 Izsák은 변동부분 관점(variable-parts perspective)이라고 부른다.

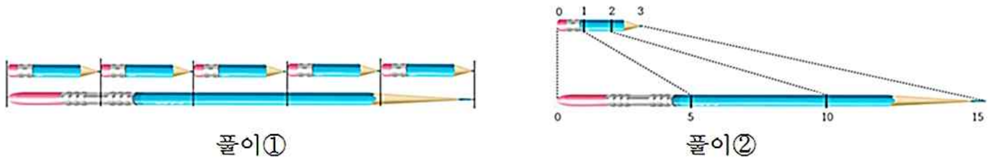
이와 같은 두 비례 추론 방식을 [그림 2]의 마법연필 문제4)에 적용하면 두 가지 서로 다른 풀이를 얻을 수 있다.



[그림 2] 15÷3의 마법연필문제

4) 마법연필 문제는 초등학교 수학 6-1 교과서 74쪽의 문제 “주문을 외우면 길이가 길어지는 마법연필이 있습니다. 길이가 5.4cm인 마법연필에 주문을 외웠더니 19.98cm가 되었습니다. 마법연필은 처음 길이의 몇 배가 되었는지 알아봅시다.” 를 각색한 것이다. 마법연필 문제는 고무줄 늘리기 문제와 마찬가지로 확대 상황 포함나눗셈 문제이다.

한 방법은 [그림 3]의 풀이①과 같이 3cm를 5번 반복하면 15cm가 됨을 확인하는 것이다. 다른 방법은 [그림 3]의 풀이②와 같이 연필의 각 부분이 각각 대응하는 부분으로 확대되는 것에 주목하는 것이다. 처음 연필의 단위인 1cm가 나중 연필의 5cm가 되었으므로, 연필의 길이가 5배 확대되었음을 알 수 있다. 풀이①에서는 3cm라는 한 부분을 5번 반복한다. 이것은 부분의 크기는 변하지 않고 부분의 개수가 변한다는 점에서 다중묶음 관점과 연결된다. 풀이②에서는 늘어나기 전후의 연필이 동일하게 3부분으로 이루어져 있다고 보고 그 한 부분의 길이가 1cm에서 5cm로 길어진 것에 주목한다. 이것은 부분의 개수는 변하지 않고 부분의 크기가 변한다는 점에서 변동부분 관점과 연결된다.



[그림 3] 15÷3의 마법연필문제의 두 그림 풀이

풀이①을 제수 3을 단위로 삼아 반복하여 피제수 15를 잰다는 점에서 측정접근법, 풀이②를 피제수를 제수와 똑같이 3개의 부분으로 이루어진 구조로 본다는 점에서 동형접근법이라고 명명할 수도 있다(임재훈, 2016)

Ⅲ. 연구 방법

1. 자료 수집

자료 수집은 지필 조사와 인터뷰로 이루어졌다. 지필 조사는 아동, 예비교사, 초등교사들이 확대 상황 포함나눗셈 문제를 어떻게 해결하는지 알아보기 위한 것이며, 인터뷰는 확대 상황 포함나눗셈 문제에 대한 초등교사 및 예비교사의 인식을 알아보기 위한 것이다.

2016년 4-7월에 A도에 소재한 초등학교 4-6학년 학생 121명, B교육대학교의 수학과 교육 I, II를 이수한 예비교사 34명, A도와 C광역시의 초등수학교과연구회 활동을 하거나 대학원에서 초등수학교육을 전공하고 있는 초등교사 39명에게 [그림 2]의 15÷3의 마법연필 문제를 수식과 그림으로 풀도록 하였다. 가능한 한 서로 다른 두 가지 방법으로 풀도록 요청하였으며, 문제 해결 시간은 20분을 제공하였다.

그리고 2016년 5-8월에 초등교사와 예비교사 10명(초등교사 5명, 예비교사 5명)에게 인터뷰를 진행하였다. 인터뷰는 반구조화된 면담으로 다음과 같은 순서에 따라 각각 1-2시간에 걸쳐 이루어졌다.

[1] 다음 두 문제를 같이 제시한다. 수식으로만 풀면 그림을 이용하여 풀도록 한다.

[마법연필 문제] 길이가 3cm인 마법연필에 주문을 외웠더니 15cm가 되었다. 마법연필의 나중 길이는 처음 길이의 몇 배인가?

[운동 문제] 3분간 달리기를 하고 15분간 줄넘기를 했다. 줄넘기를 한

시간은 달리기를 한 시간의 몇 배인가?

[2] 두 문제의 공통점과 차이점은 무엇인가?
두 문제의 공통점과 차이점은 풀이와 어떻게 관련되는가?

[3] (풀이①로 두 문제를 해결한 경우)
3cm 연필 5자루를 이어붙이면 15cm 길이의 연필 한 자루가 되는 것은 아니다. 그럼에도 불구하고 마법연필 문제를 풀이①과 같이 푸는 것은 적절한가? 적절하지 않다면, 마법연필 문제를 다르게 풀어보아라.

[4] 다르게 풀지 못할 경우에는 풀이②를 제시한다.
풀이②는 타당한가?

[5] 풀이①과 풀이②는 마법연필 문제에 같은 정도로 적합한가?
풀이①과 풀이②는 운동 문제에 같은 정도로 적합한가?

지필 조사에서는 마법연필 문제만 사용하였으나, 인터뷰에서는 운동 문제를 같이 사용하여 두 유형의 포함나눗셈 문제에 대한 인식의 차이가 있는지 알아보고자 하였다.

초등학생, 예비교사, 초등교사의 마법연필 문제 지필 풀이를 분석한 결과, 예비교사나 초등교사의 풀이에서는 비례식이나 풀이②가 일부 나타났으나, 초등학생들의 풀이에서는 비례식이나 풀이②가 나타나지 않았다. 현 교육과정상 비례식의 학습은 6학년 2학기에 이루어지므로, 지필 조사가 이루어진 시점에서 초등학생들은 학교에서 비례식을 배운 적이 없어서 이와 같은 차이가 나타났을 가능성이 크다. 이에 추가로 2016년 12월 비례식 학습이 끝난 시점에서, A도와 C광역시에 소재한 4개 초등학교 6학년 학생 241명을 대상으로 17÷3의 마법연필 문제[5]를 수식 및 그림으로 풀도록 하여, 확대 상황 포함나눗셈 문제를 비례 문제로 볼 수 있는지, 풀이②의 관점에서 문제를 해결할 수 있는지, 분수배나 소수배를 그림으로 잘 나타내는지를 추가로 조사하였다.

2. 자료 분석

초등학생, 예비교사, 초등교사들의 15÷3 마법연필 문제의 지필 풀이를 수식과 그림으로 나누어 분석하였다. 수식은 사용한 수식의 종류에 따라 분류하고, 그림은 사용된 모델의 종류에 따라 분류하여 어떤 모델을 선호하는지 알아보았다. 또한, 초등학생들의 그림 표현에서 어떤 오류 유형이 나타나는지도 확인하였다.

추가로 6학년 학생들을 대상으로 한 17÷3 마법연필 문제의 지필 풀이에서 비례식을 세워 푼 학생이 있는지와 풀이②에 해당하는 그림을 그린 학생이 있는지 확인하였다. 그리고 수식과 답을 종류에 따라 분류하고, 분수배나 소수배를 그림에 잘 나타내었는지 분석하였다.

인터뷰 자료는 초등교사 및 예비교사들이 마법연필 문제와 운동 문제, 그리고 풀이①과 풀이②를 관련짓고 비교하는 과정에서 어떤 인식을 드러내는지에 초점을 맞추어 분석하였다. 예비교사나 초등교사들이 주어진 문제 상황을 고려하면서 풀이에 의미를 부여하는 과정에서 자신들이 가지고 있는 인식들 중 어떤 것들을 꺼내어 연결하는지를 중점적으로 살펴보았다. 이러한 과정을 통해 맥락 중시와 탈맥락 중시, 횟수로서의 배 개념과 연산자로

5) 추가 지필 조사 전에 이루어진 교사 인터뷰에서 풀이②와 분수배가 잘 어울린다는 견해가 제시되었다. 이에 아동들이 풀이②를 생각해내는 것을 용이하게 하고자 답이 분수배가 되도록 기존 문제의 15를 17로 바꾸었다.

서의 배 개념과 같은 주제들이 등장하였다.

Ⅳ. 연구 결과

1. 지필 조사

가. 15÷3 마법연필 문제의 초등학생 풀이

초등학교 4-6학년 121명의 15÷3의 마법연필문제 풀이를 수식과 그림의 유형별로 정리하면 <표 2>와 같다. 가장 많이 나타난 수식은 3×□=15와 같은 곱셈식이었고, 나눗셈식이 뒤를 이었다.

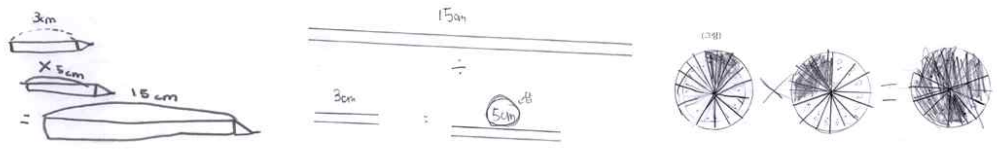
<표 2> 초등학생의 15÷3 마법연필문제 풀이

수식 유형	나눗셈식	곱셈식	덧셈식	뺄셈식
개수	65	92	37	10

그림 유형	타당한 그림						단순 상황 묘사	오류
	연필 그림	띠그림	선분도 (수직선)	칩	직사각형 배열	기타		
개수	49	15	8	16	5	4	30	53

아동들이 그린 그림은 모두 180개로, 이 중 풀이가 적절히 표현된 그림이 97개(54%), 3cm인 연필과 15cm인 연필을 하나씩 그려 놓은 것과 같은 단순 상황 묘사가 30개(17%)였다. 연필 그림을 이용하여 풀이를 설명한 경우가 가장 많았고(27%), 그 다음 바둑돌이나 사과, 별, 네모 등을 이용한 칩 모델이 많이 사용되었다. 길이를 추상화하여 나타낸 모델인 선분도나 수직선을 이용하여 풀이를 설명한 그림은 8개(4%)에 불과하였다.

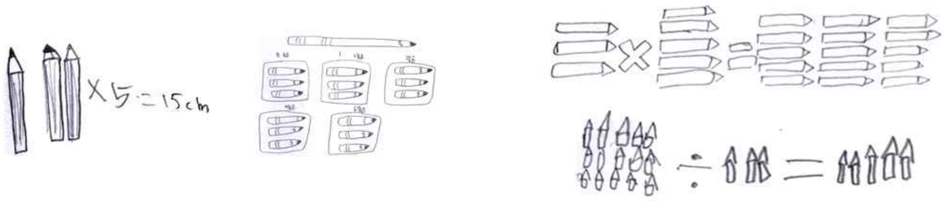
아동들의 그림 풀이에 나타난 오류 중에서 승수와 피승수를 같은 종류의 양으로 나타내는 오류(19명, 27개)와 연필 1자루와 1cm 혼동하여 나타낸 오류(4명, 6개)에 주목할 필요가 있다. 승수와 피승수를 같은 종류의 양으로 나타내는 오류의 예는 [그림 4]와 같다.



[그림 4] 승수와 피승수를 같은 종류의 양으로 나타내는 오류

동수누가 또는 배로서의 곱셈에서 피승수와 승수는 다른 의미를 지닌다. 3×5=15에서 피승수 3은 개수를 나타내고, 승수 5는 횟수를 나타낸다. 이와 같은 피승수와 승수의 의미 차이는 곱셈 개념 도입부터 강조되는 것이지만, 조사 대상인 초등학교 4-6학년 중 약 16%에서 승수와 피승수를 같은 종류의 양으로 나타내는 오류가 나타났다. [그림 5](a)와 같이 연필 1자루와 1cm를 혼동하는 오류도 일부 아동들에게서 나타났으며, [그림 5](b)와 같이

피승수와 승수를 같은 종류의 양으로 나타내는 오류와 연필 1자루와 1cm를 혼동하는 오류가 결합된 그림을 그린 아동도 있었다.



(a) (b)

[그림 5] (a) 연필 1자루로 1cm를 나타내는 오류 (b) 두 오류의 결합

초등학생들이 제시한 타당한 풀이는 모두 3을 단위로 하여 5번 반복하면 15가 됨을 보이는 풀이①에 해당하는 것이었고, 풀이②는 나타나지 않았다.

나. 15÷3 마법연필 문제의 예비교사 풀이

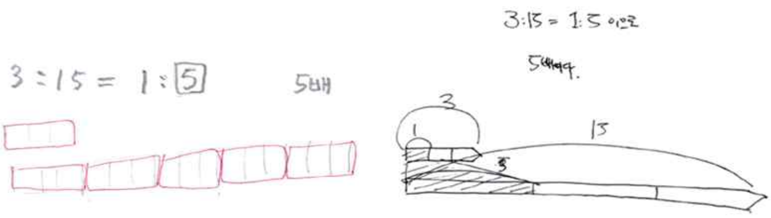
예비교사 34명의 15÷3의 마법연필 문제 풀이를 정리하면 <표 3>과 같다.

<표 3> 예비교사의 15÷3의 마법연필 문제 풀이

<table>
<tr><td>수식 유형</td><td colspan="2">나눗셈식</td><td colspan="2">곱셈식</td><td colspan="2">덧셈식</td><td>뺄셈식</td><td>비례식</td></tr>
<tr><td>개수</td><td colspan="2">17</td><td colspan="2">14</td><td colspan="2">16</td><td>6</td><td>5</td></tr>
<tr><td rowspan="2">그림 유형</td><td colspan="5">타당한 그림</td><td rowspan="2">단순 상황 묘사</td><td rowspan="2" colspan="2">오류</td></tr>
<tr><td>연필 그림</td><td>띠그림</td><td>수직선 (선분도)</td><td>칩</td><td>직사각형 배열</td></tr>
<tr><td>개수</td><td>8</td><td>21</td><td>19</td><td>3</td><td>1</td><td>0</td><td colspan="2">0</td></tr>
</table>

비례식을 세워서 푼 예비교사는 34명 중 5명(15%)이었다. 예비교사들이 그린 그림 52개 중 많이 사용된 그림 유형은 띠그림(40%)과 선분도(수직선)(37%)이었고, 연필 그림은 8개(15%)이었다. 단순 상황 묘사나 오류가 포함된 그림을 그린 예비교사는 없었다.

예비교사 34명 중 32명(94%)은 풀이①, 2명(6%)은 풀이②를 제시하였다. 풀이②는 비례식을 세운 예비교사들 중에서 나타났다. 비례식을 세운 5명 중 2명은 풀이②를 제시하였고, 3명은 풀이①을 제시하였다([그림 6] 참조).



(a) (b)

[그림 6] (a) 비례식과 풀이①, (b) 비례식과 풀이②

비례식을 세운 예비교사 중에서만 풀이②에 해당하는 그림을 그린 예가 있다는 것은 포함나눗셈을 비례 문제로 인식하는 것이 풀이②와 연결되어 있을 가능성을 시사한다.

다. 15÷3 마법연필 문제의 초등교사 풀이

초등교사 39명의 15÷3의 마법연필문제 풀이를 정리하면 <표 4>와 같다.

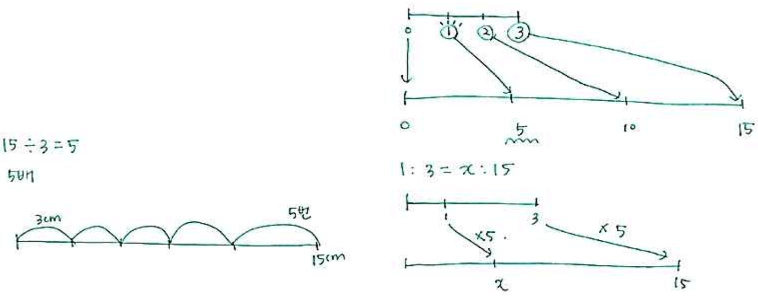
<표 4> 초등교사의 15÷3의 마법연필문제 풀이

수식 유형	나눗셈식	곱셈식	덧셈식	뺄셈식	비례식
개수	29	24	11	11	4

그림 유형	타당한 그림					단순 상황 묘사	오류
	연필 그림	띠그림	수직선 (선분도)	칩	직사각형 배열		
개수	10	27	31	1	0	0	0

비례식은 초등교사 3명(8%)에게서 4번 나타났다. 초등교사들이 가장 많이 사용한 모델은 선분도(수직선)로 전체 69개의 그림 중 31개(43%)이었으며, 이어서 띠그림, 연필 그림의 순으로 나타났다. 단순 상황 묘사나 오류가 포함된 그림을 그린 초등교사는 없었다.

풀이②에 해당하는 그림을 제시한 초등교사는 2명(5%)이었다. 비례식을 세워서 문제를 해결한 초등교사 3명은 첫 번째 풀이에서 나눗셈식이나 곱셈식을 세우고 풀이①을 제시하고, 두 번째 다른 풀이에서 비례식을 제시하였다. 이 중 2명은 비례식에 의한 수식 풀이만 제시하고 그림을 제시하지 않았고, 1명만 비례식과 더불어 풀이②를 제시하였다([그림 7]).



[그림 7] 풀이①과 풀이②를 제시한 초등교사의 예

풀이②를 제시한 다른 한 초등교사는 처음 풀이에서 풀이①을 제시하고, 두 번째 풀이에서 수식 3÷3=1, 15÷3=5를 제시하고 풀이②를 제시하였다.

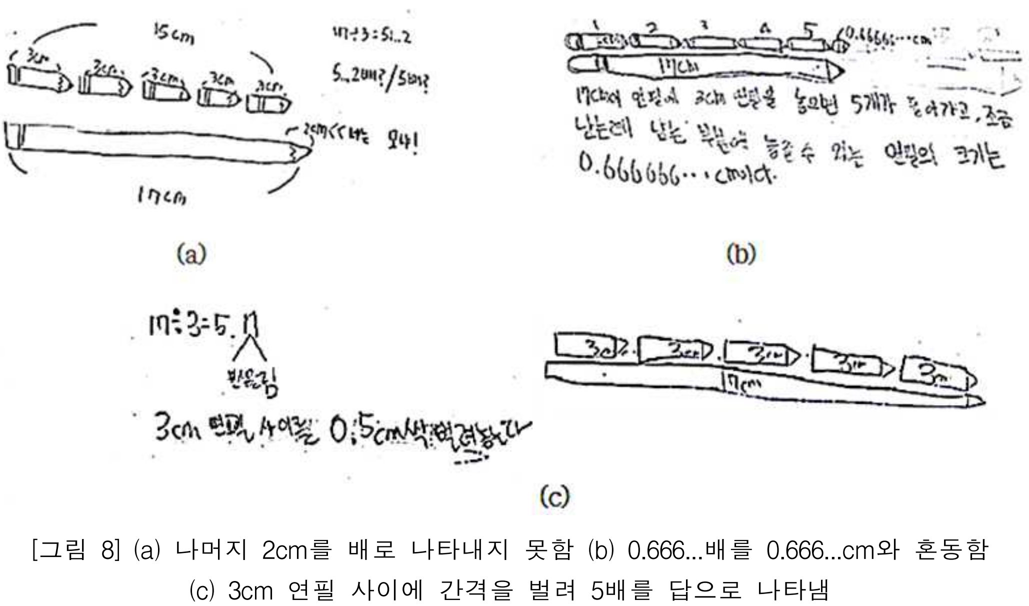
라. 17÷3 마법연필 문제의 초등학교 6학년 아동들의 풀이

비례식 단원을 학습한 초등학교 6학년 241명의 17÷3 마법연필 문제 풀이를 정리하면 <표 5>와 같다.

<표 5> 초등학교 6학년의 17÷3의 마법연필문제 풀이

<table>
<tr><td>수식 유형</td><td>나눗셈식</td><td>곱셈식</td><td>덧셈식</td><td colspan="2">뺄셈식</td><td>비례식</td></tr>
<tr><td>개수</td><td>218</td><td>67</td><td>15</td><td colspan="2">22</td><td>3</td></tr>
<tr><td rowspan="2">답의 유형</td><td>분수해</td><td>소수해</td><td colspan="3">자연수해</td><td rowspan="2">기타</td></tr>
<tr><td>$\frac{17}{3}$, $5\frac{2}{3}$</td><td>5.6, 5.7, 5.666…</td><td>6</td><td>5</td><td>5… 2</td></tr>
<tr><td>개수</td><td>43</td><td>132</td><td>37</td><td>16</td><td>25</td><td>40</td></tr>
<tr><td>그림 유형</td><td colspan="2">분수해(예, $5\frac{2}{3}$) 또는 소수해(예, 5.666…)를 나타냄</td><td colspan="2">5는 나타내었으나 $\frac{2}{3}$나 0.666…등을 나타내지 않음</td><td colspan="2">기타
(단순상황묘사, 오류, 실패)</td></tr>
<tr><td>개수</td><td colspan="2">37</td><td colspan="2">84</td><td colspan="2">117</td></tr>
</table>

비례식이 3명에게서 3개 나타났으나, 풀이②는 나타나지 않았다. 답의 유형은 총 293개 중 5.6, 5.7, 5.666...과 같이 소수로 나타낸 것이 132개(45%), 5, 6, 5...2와 같이 자연수로 나타낸 것이 78개(27%), $\frac{17}{3}$, $5\frac{2}{3}$와 같이 분수로 나타낸 것이 43개(15%)였다. 아동들이 그린 그림 238개 중 분수해 또는 소수해가 적절히 표현된 그림이 37개(16%), 5는 나타내었으나 $\frac{2}{3}$나 0.666…등을 나타내지 않은 그림이 84개(35%)였으며, 그 외 단순상황묘사나 오류, 시도하였으나 실패한 경우가 117개(49%)였다. 이것은 아동들이 분수배나 소수배를 그림으로 표현하기 어려워함을 시사한다([그림 8] 참조).



[그림 8] (a) 나머지 2cm를 배로 나타내지 못함 (b) 0.666...배를 0.666...cm와 혼동함
(c) 3cm 연필 사이에 간격을 벌려 5배를 답으로 나타냄

종합적으로, 초등학생, 예비교사, 초등교사 공통으로 풀이①이 지배적이었다. 초등학생에서는 풀이②가 나타나지 않았으며, 예비교사와 초등교사 73명 중 4명(5%)이 풀이②를 제시하였다. 풀이②로 푼 예비교사와 초등교사 4명 중 3명은 비례식을 세우고 풀이②를 제시하였다. 그러나 비례식을 세워서 풀었지만 풀이②를 제시하지 못한 사례가 보여주듯이, 비례식을 세우는 것이 풀이②를 보장하지는 않는다. 초등교사 한 명은 비례식을 세우지는 않았으나, '3÷3=1, 15÷3=5' 이라는 두 개의 나눗셈식을 제시하고 풀이②를 제시하였다. '3÷3=1, 15÷3=5' 은 3과 15와 그것을 각각 3으로 나눈 1과 5의 비례 관계를 함의하고 있다. 이로부터 주어진 마법연필 문제를 비례 상황으로 보는가가, 풀이②를 보장하지는 않지만, 풀이②로 나아가는 데 도움이 된다고 추측할 수 있다.

2. 인터뷰

인터뷰에서 초등교사 및 예비교사 10명 중 9명이 풀이①로 운동 문제와 마법연필 문제를 해결하였고, 1명만 운동 문제는 풀이①로 마법연필 문제는 풀이②로 해결하였다. 이 절에서는 마법연필 문제를 풀이②로 해결한 교사A의 사례를 중심으로, 확대 상황 포함나눗셈을 풀이① 또는 풀이②로 해결하는 데 어떤 인식이 관련되어 있는지 분석한다.

가. 맥락 중시와 탈맥락 중시

교사A는 운동 문제와 마법연필 문제의 공통점과 차이점에 대하여 다음과 같이 말하였다.

> 연구자: 두 문제의 공통점이 있다면?
>
> 교사A: 공통점은... 비를 물어보는 것? 어떤 양이 나오는 게 아니라. 3과 15 사이의 관계가 두 수 사이의 관계를 나타내는 수라는 것. 어떤 특정한 분이나 cm가 아닌 양과 양 사이의 관계를 나타내는 그냥 수라는 게 똑같고.
>
> 연구자: 두 문제의 다른 점이 있다면?
>
> 교사A: 다른 점은, 운동 문제는 15하고 3 사이에 특별한 관계가 없어요. 상황적으로 볼 때. 여기서의 3과 15는 그냥 독립적으로 보이고. 연필 문제는 아니예요. 연필 문제는 3cm와 15cm 사이에 관계가 계속 존재해요. 2일 때 10이고 1일 때 5이고. 이 양과 이 양 사이에 계속 대응되는 관계가 보이는데 얘(운동 문제)는 그게 잘 안 보여요.

이와 달리, 두 문제를 모두 풀이①로 해결한 교사들은 두 문제의 공통점으로 '수치가 같다. 둘 다 나눗셈 문제이다.' 를 들었다. 차이점으로는 '하나는 시간에 대한 문제이고 다른 하나는 길이에 대한 문제이다' 를 들었다. 두 문제가 시간과 길이라는 소재만 다를 뿐, 수학적으로 같은 나눗셈 문제라고 보고 두 문제를 동일한 방법으로 해결한 것이다.

> 교사B: 저는 둘 다 나눗셈 식이 먼저 떠오르거든요. 그래서 둘 다 나눗셈 식을 쓴 건데.

두 문제를 모두 풀이①로 해결한 교사들에게 3cm 연필 5자루를 이어붙이면 15cm 길이의 연필 한 자루가 되는 것은 아님에도 마법연필 문제를 풀이①과 같이 푸는 것은 적절하

다고 생각하는지, 다르게 풀 수는 없을지 질문하자, 다음과 같이 대답하였다.

교사B: 보통은 마법이라는 것에 주목하지 않잖아요. 좋은 건지 나쁜 건지는 모르겠지만.... 3, 15 이렇게 수를 보고, 바로 5배 이렇게 생각하잖아요.

교사C: 전체 15cm의 길이가 이 길이(3cm)의 몇 배냐만 물어봤기 때문에 큰 상관은 없지 않나요?

교사D: 몇 배... 몇 배냐고 길이만 물은 것... 몇 배, 여기서 물어보는 것은 길이니까. 모양이 아니니까.

이들에게 풀이②를 제시하고 두 문제와 두 풀이의 관계에 대한 인식을 조사하였다. 이들은, 다음 교사B의 인터뷰에서 볼 수 있는 바와 같이, 풀이①과 풀이②가 두 문제에 동일한 정도로 적합하다는 견해를 가지고 있었다.

연구자: 그러면 운동 문제를 이런 식으로 (풀이②의 그림을 가리키며) 풀어도 될까요?
교사B: 똑같이 해도 될 것 같아요. 얘도 15분 동안 줄넘기할 때 3분 동안 달리기하는 걸 몇 번 할 수 있는지를 물어보는 거잖아요. 똑같이 얘도 1분 동안 하는 것을 5분 동안 몇 번 할 수 있지 이렇게 생각해서 5번 할 수 있다.
연구자: 두 가지 풀이(풀이①, 풀이②)가 같은 정도로 운동 문제에 적합하다는 것인지?
교사B: 그럴 것 같아요.

이와는 달리, 교사A는 운동 문제를 풀이②처럼 풀어도 되는가라는 질문에 대해 그렇지 않다고 하면서 다음과 같이 말하였다.

교사A: 그러려면 다른 양이 계속 들어오게 되는데... 3분했을 때 100 칼로리가 소모되고 얘는 15분했을 때 100 칼로리가 소모되고... 뭔가 한 단계 더 관계를 들어서 생각을... 달리기를 1분 했을 때 정도는 줄넘기를 5분 했을 때의 정도와 같은가... 이상한데... (침묵) 만약 똑같은 칼로리를 소모하려면 달리기를 1분 했을 때 줄넘기를 5배 더 해야 하는 상황이다. (침묵) 이렇게 보면 5배를 설명할 수 있기는 한데... 어색해서... 이 상황에서 1분에 5분이라는 게 뭘 뜻하는 건지 모르겠어요.
연구자: 풀이②는 운동 문제에는 적절하지 않다?
교사A: 예.
연구자: 그러면 연필 문제를 풀이①처럼 풀어도 될까요?
교사A: 연필이 길어지지만 않았어도... 근데 길어져서...
연구자: 길어지지만 않았어도라는 것은 무슨 뜻인지?
교사A: 그냥 15cm의 연필은 3cm의 연필의 길이의 몇 배인가. 아까 15분 한 거는 3분 한 거의 몇 배인가. 이거는 확실히 포함제이고 푸는 방법도 다 3을 반복해서 풀었는데. 길어진다는 말없이 15cm의 길이는 3cm의 길이의 몇 배인가라고 하면, 3cm 연필 5자루를 놓은 결과랑 15cm 연필 결과랑 끝부분이 같아졌으니까, 포함제로 해도 되는데. 얘(마법연필 문제)는 길어지는 연필이라고 했으니까 그렇게

되지는 않고. 몇 배 늘어났는지를 구한다는 거는 이 연필이 몇 자루인지를 구하는 것이 아니니까.

교사A를 제외한 다른 교사들은 두 문제 모두 배를 구하는 동일한 문제라고 보고, 확대 상황인가 그렇지 않은 상황인가라는 맥락의 차이를 중요하게 고려하지 않았다. 이에 비하여, 교사A는 두 문제의 차이를 단순한 소재의 차이가 아닌 독립적인 두 양의 비교 상황(운동 문제)과 비독립적인 두 양의 비교 상황(마법연필 문제)의 차이로 보았다. 교사A는 이와 같은 맥락의 차이가 학습 지도시에도 중요하게 고려되어야 한다는 신념을 가지고 있었다.

연구자: 아동이 어차피 15가 3의 몇 배인지 구하는 거니까 아무 방법으로나 풀어도 되지 않아요라고 한다면 교사로서 어떻게 하겠어요?

교사A: 그렇게 풀어도 되기는 되요. 두 가지 마음이기는 한데. 다른 두 개를 다른 방법으로 이해하고 하기를 원하는. 마음 속으로는.

연구자: 이 문제는 이렇게 저 문제는 저렇게 따로따로?

교사A: 그런 상황을 각각 따로따로 이해하고 그렇게 할 수 있기를 바라는 거죠. 그 이유 중에 하나는, 기왕이면 해결하는 방식이 형식적으로만 하는 게 아니라 계속 문제 상황이랑 관련해서 해가기를 원하는 거하고. 수치가 3이나 15가 아니라 분수나 소수같이 유리수로 가게 되면 어느 한쪽만 고집하는 건 뭔가 또 문제를 생기게 할 수 있을 것 같아요.

다른 교사들의 인터뷰에서는 다음과 같이 탈맥락을 중시하는 현실을 반영한 응답이 나타났다.

교사D: 수학에서는 애들도 그렇고 선생님도 그렇고 상황을 별로 고려하지 않고 주어진 수에만 집중하는 경향이 있는 것 같아요. 아이들도 보면 그냥 빨리 수학에서는 빨리 푸는 게 잘 하는 거라고 생각하고 있는 것 같아요. 그래서 보이는 거 우선 찾고 그것으로 문제를 해결하려고 하는 것 같아요.

맥락은 단순히 한 차원만 있는 것은 아니다. 길이인가 시간인가라는 소재의 차이도 맥락이고, 두 양이 독립적인가 아닌가도 맥락이다. 독립적인 두 막대의 길이를 비교하는 상황과 늘어나기 전과 후의 고무줄의 길이를 비교하는 상황은, 길이라는 소재 맥락에서는 같지만 두 양의 독립성이라는 맥락에서는 다르다. 여러 차원의 맥락을 고려하며 그에 기인하는 과제의 특성을 인식하는 것은 과제가 지니고 있는 고유한 잠재력을 깊고 넓게 이해하는 데 도움이 된다.

나. 횟수로서의 배와 연산자로서의 배

배 개념은 곱셈과 포함나눗셈의 기반이 되는 중요 개념이다. 자연수배는 동수누가와 밀접한 관련을 맺고 있지만, 배 개념은 동수누가를 넘어선다(강흥규, 2009). 마법연필 문제와 운동 문제를 풀이①로 푼 교사들에게 몇 배인지를 어떻게 알아보는가 물었을 때, 다음과 같이 답하였다.

교사B: 그게 시작이 그거잖아요. 맨 처음에 곱셈 내용이.. 곱셈 처음 도입될 때... 동수누가였던 것 같아요.

교사C: 덧셈으로 시작해서... 덧셈 또 뛰어세기 이렇게 해서 곱셈을 가르치거든요. 덧셈부터 시작하고 그 다음 수직선 뛰어세기. 그러니까 15cm도 몇 배냐 하면 3으로 이렇게 (뛰어세는 동작을 손으로 묘사하며) 뛰어세기 하는 식으로 하면 5번이 해당되니까.

문제에 있는 배라는 표현은 이들로 하여금 초등학교에서 배가 도입되는 맥락을 떠올리게 하였고, 이로 인해 동수누가, 뛰어세기와 같은 지식이 활성화되었다. 배라는 표현으로부터 활성화된 동수누가, 뛰어세기는 풀이①이 마법연필 문제를 포함하여 배를 구하는 비교 상황의 포함나눗셈을 푸는 유일한 적절한 방법이라고 생각하도록 기능하였다.

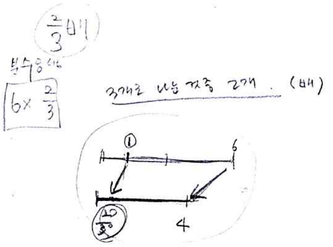
마법연필 문제를 풀이②로 해결한 교사A는 자연수배를 넘어선 분수배를 고려하며, 분수배를 가르치는 데 운동 문제보다 마법연필 문제가 더 적절하다고 보았다.

연구자: $\frac{2}{3}$배 이런 걸 가르치는데 연필 문제가 운동 문제보다 낫다고 생각하는 것 같은데, 이유는?

교사A: 이건(운동 문제) 이상적인 이야기니까. 몇 번. 배를 처음에 이렇게 3+3+3+3을 3의 4배라고 합니다. 이렇게 배우거든요. 그런데 $\frac{2}{3}$배는... 곱하기 $\frac{2}{3}$. 분수의 곱셈. 3개로 나누어진 것 중에 2개.

연구자: 6의 $\frac{2}{3}$배는 4를 예로 하여 그 이유를 좀더 구체적으로 설명한다면?

교사A: 6하고 4 사이의 관계가 궁금하면 ([그림 9]의 6에서 4로 가는 화살표를 그으며). 6이 4가 됐으니까.. 그러면 결국 1일 때 (1에서 시작하는 화살표를 그리며)의 값이 얼마인지 궁금해지는 건데. 결국에 1일 때의 값이 여기서 뭐든 될 수 있잖아요. $\frac{2}{3}$라는 수가 여기 수직선에 있잖아요. 그런데 얘(운동 문제 풀이 그림)는 $\frac{2}{3}$라는 수가 없어요. 그냥 1회 2회 3회 4회 5회. 그러니까 여기는(마법연필 문제) 유리수 소수 분수 다 올 수 있는데. 1일 때 어디든 대응하는 점이 있어서. 얘(운동문제 풀이 그림)는 $\frac{2}{3}$번을 찾아야 하는데. $\frac{2}{3}$번은 이상하니까.



[그림 9] 6의 $\frac{2}{3}$배는 4

풀이①은 1회, 2회, 3회, 4회, 5회라는 횟수로서의 배 개념과 밀접한 관련이 있고, 풀이②는 3을 15로 변환하는 곱셈 연산자로서의 배 개념과 밀접한 관련이 있다. 횟수로서의 배는 자연수와 잘 어울린다. 배 개념을 횟수로만 이해하면 자연수배는 잘 이해하지만, 분수배를 이해하는 데 어려움을 겪을 수 있고, 풀이①은 자연스럽게 느껴지지만 풀이②는

상대적으로 어색하게 느껴질 수 있다. 교사A의 사례는, 배를 곱셈 연산자로 이해하는 것이 분수배나 풀이②와 연결되어 있을 가능성을 시사한다.

Ⅳ. 논 의

이 장에서는 앞 장의 분석 결과를 바탕으로, 시각적 모델, 풀이①, ②와 연결된 인식, 포함나눗셈과 비례의 통합적 이해의 세 측면에서, 확대 상황 포함나눗셈에 대하여 논의한다.

1. 시각적 모델

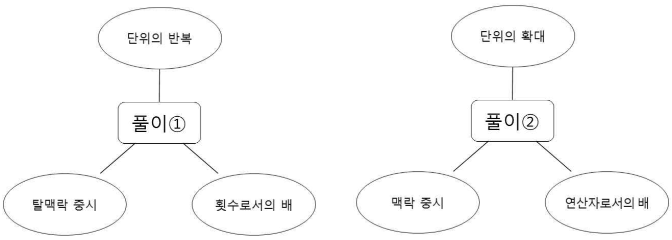
시각적 표현은 학생 스스로 문제 상황을 탐색하며 문제해결의 과정을 중시하게 하는 데 도움이 되며(김소희, 이광호, 구미영, 2013), 문제해결력이나 메타인지, 추론 능력 향상에 긍정적인 영향을 미친다(강창옥, 2013; 최경아, 2013). 이 연구에서 초등학교 학생들은 마법 연필 문제를 해결하면서 문제 상황 자체에 주어져 있는 연필 그림을 많이 그렸다. 또, 풀이가 나타나 있지 않은 단순 문제 상황을 묘사한 장면도를 그린 경우가 많았다. 전경희(2005)에 의하면, 아동들이 문장제 해결에서 사용하는 그림은 문제 상황을 단순히 묘사한 장면도나 비효율적인 그림인 경우가 많다고 하는데, 이 연구에서 아동들도 유사한 결과를 보이고 있다. 길이를 추상화한 시각적 모델인 선분도나 수직선을 사용하여 풀이를 제대로 표현한 아동은 소수였다. 초등교사 및 예비교사들의 풀이에서는 선분도나 수직선의 사용 빈도가 증가하였다. 특히 초등교사들은 선분도나 수직선을 가장 많이 사용하였으며, 단순 상황 묘사나 오류가 포함된 그림을 그린 교사는 없었다.

교사들은 길이를 추상화한 수직선이나 선분도로 주어진 문제의 구조와 풀이를 적절히 나타내는 모습을 보였지만, 아동들을 그와 같은 모습을 보이지 못하였다. 수직선은 고유한 표기법을 지닌 기호 체계로서 수 체계의 은유로 기능한다(서보억, 신현용, 나준영, 2013; Herbst, 1997), 수직선은 초등 수학에서 자연수, 분수, 소수 및 그 사칙계산 뿐 아니라 측정과 같은 다양한 단원에서 광범위하게 활용될 수 있다(장지영, 김성준, 2013). 그러나 우리나라 초등 수학 교과서에서 수직선은 단원이나 영역, 난이도에 따라 적절하게 활용되지 못하고 있다(홍진곤, 김양권, 2015). 초등학교 고학년 학생들이 길이를 소재로 한 확대 상황 포함나눗셈 풀이에 수직선을 제대로 활용하지 못하는 것은 이와 같은 실정과 무관해 보이지 않는다.

시각적 모델과 관련하여, 6학년 2학기 아동들을 대상으로 한 추가 조사를 포함하여, 이중수직선을 사용한 아동이 한 명도 없었다는 점에 주목할 필요가 있다. 이중수직선은 곱셈, 나눗셈, 비례를 비롯한 두 양 사이의 관계를 표현하고 탐구하는 유용한 모델이다(임재훈, 이형숙, 2015; Orrill & Brown, 2012; Van den Heuvel-Panhuizen, 2003). 미국의 Common Core State Standards (National Governors Association Center for Best Practices, & Council of Chief State School Officers, 2010)도 이중수직선의 사용을 권고하고 있다. 이중수직선을 초등 수학 교과서에 도입하는 것, 교육대학교의 수학과교육 강좌에서 이중수직선의 활용 및 지도 방안을 적극적으로 다루는 것에 대하여 전향적인 검토가 필요하다.

2. 풀이①, ②와 연결된 인식

풀이①은 3이라는 단위를 5번 반복하여 15를 만드는 것이므로, Beckmann과 Izsák(2015)의 다중묶음 관점과 통한다. 풀이②는 3을 구성하고 있는 단위 1이 5로 늘어났다고 보는 것이므로 변동부분 관점과 통한다. Beckmann과 Izsák은 비례 관계에 관한 기존의 논의가 다중묶음 관점에 치우쳐 있었다고 비판하였는데, 이 연구에서 초등학생, 예비교사, 초등교사 모두 다중묶음 관점에 치우친 것으로 나타났다. 마법연필 문제와 같은 확대 상황은 각각의 부분이 대응하는 각각의 부분으로 확대되는 상황이라는 점에서 단위의 확대에 기반한 풀이②와 더 잘 어울림에도 불구하고 풀이①이 지배적으로 나타났다는 것은, 많은 교사와 학생들에게 단위의 반복이라는 관념이 포함나눗셈과 매우 긴밀하고 강하게 연결되어 있음을 시사한다.



[그림 10] 두 풀이와 연결된 인식

교사A의 사례에서 볼 수 있듯이, 확대 상황이라는 맥락을 중시하는 인식은 풀이②를 향한다. 이에 비하여, 이와 같은 맥락의 차이를 무시하고 두 문제를 동일한 15÷3의 나눗셈 문제로 보는 탈맥락 중시의 인식은 단위의 반복이라는 인식과 연결되어 풀이①을 향한다. 교사A는 두 문제 모두 포함나눗셈 문제이지만 운동 문제는 풀이①이 더 어울리고 마법연필 문제는 풀이②가 더 어울린다고 보았는데, 이것은 운동 문제와 마법연필 문제 각각의 맥락의 특성을 고려하는 데에 기인하였다. 또, 동수누가나 뛰어세기와 연결되는 횟수로서의 배 개념은 풀이①을 향하게 하였지만, 연산자로서의 배 개념은 풀이②를 향하도록 하였다.

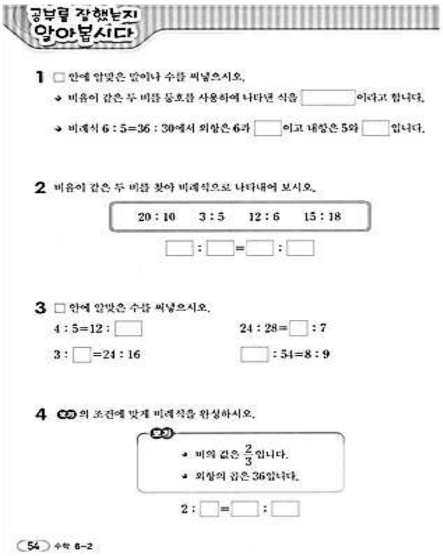
3. 포함나눗셈과 비례의 통합적 이해

지필 조사에서 초등교사 및 예비교사 73명 중 8명(11%)만이 마법연필 문제를 비례 문제로 보고 비례식을 세워 해결하였으며, 비례식을 학습한 초등학교 6학년 학생 241명을 대상으로 한 조사에서 나타난 비례식을 사용한 풀이는 3개뿐이었다. 이것은 비례와 포함나눗셈 사이의 연결성이 교사와 아동들에게 명확히 확립되어 있지 않을 가능성을 시사한다. 이와 관련하여, Tabart, Skalicky와 Watson(2005)이 지적한 바와 같이, 비례와 곱셈, 나눗셈의 학습 지도가 서로를 통합하려는 시도가 거의 없는 채로 이루어지고 있지 않은지 검토할 필요가 있다.

나눗셈과 비율, 비례는 $\frac{a}{b}$ 형태의 수를 다룬다는 표면적인 공통요소뿐 아니라 곱셈 추론을 요구한다는 인지적인 공통요소도 갖고 있다(Vergnaud, 1988). 이와 같이 공통요소가

있을 때, 하나의 학습이 다른 하나의 학습에 미치는 영향에 관심을 갖게 된다. Lobato(2012)는 학습 상황과 전이 상황에 대한 학습자의 해석이 전이의 대상이 되는 지식 및 전이의 정도 또는 유무에 대한 판단의 근거가 되어야 한다는 학습자 지향 전이(Actor-oriented transfer)를 제안하였다. Hohensee(2014)는, 학습자 지향 전이의 관점 위에서 통합적인 사고 교육의 문제를 이전 학습에서 다음 학습으로의 일방적인 방향이 아닌, 학습자 입장에서 현재의 학습이 이전에 경험된 학습에 미치는 영향으로 확장하고 역행적 전이(Backward transfer)를 제안하였다.

우리나라 초등학교에서 나눗셈은 비례에 앞서 가르쳐지므로, 학습 순서상 나눗셈이 이전 지식이 되고 비례가 새로운 지식이 된다. 역행적 전이의 관점에서 보면, 비례의 학습은 나눗셈에 대한 이해를 심화, 발전, 통합하는 기회로 여겨질 수 있다. 이전 지식은 이후 지식을 학습하는 기초가 된다는 순행적 전이 관점에 지나치게 얽매이면 앞에서 한번 다룬 내용은 다시 다루지 않기 쉬운데, 이러한 일회적 학습으로 깊은 이해에 도달하기는 어렵다. 더 높은 곳에서 조망할 때 아래에서는 보이지 않던 것들이 보이거나 동일한 대상이라도 다른 모습으로 보이듯, 새로운 지식의 학습은 기존의 지식을 전과 다른 관점에서 재음미하고 재이해하는 기회가 될 수 있다. 비례의 학습은 포함나눗셈의 이해에 이와 같은 역할을 할 수 있다.


공부를 잘했는지 알아봅시다

1 □ 안에 알맞은 말이나 수를 써넣으시오.

• 비율이 같은 두 비를 등호를 사용하여 나타낸 식을 □ 이라고 합니다.

• 비례식 6 : 5=36 : 30에서 외항은 6과 □ 이고 내항은 5와 □ 입니다.

2 비율이 같은 두 비를 찾아 비례식으로 나타내어 보시오.

20 : 10　3 : 5　12 : 6　15 : 18

□ : □ = □ : □

3 □ 안에 알맞은 수를 써넣으시오.

4 : 5=12 : □　　24 : 28=□ : 7

3 : □=24 : 16　　□ : 54=8 : 9

4 보기의 조건에 맞게 비례식을 완성하시오.

보기

• 비의 값은 $\frac{2}{3}$입니다.

• 외항의 곱은 36입니다.

2 : □=□ : □

54 수학 6-2

[그림 11] 비례식 단원말 종합문제(교육부, 2015b, p. 54)

Sun(2011)은 문제 세트의 구성 원리로 一題多變(OPMC, One problem multiple changes), 一題多解(OPMS, One problem multiple solutions), 多題一解(MPOS, Multiple problems one solutions)의 세 가지를 들었는데, 포함나눗셈과 비례의 통합적 이해와 관련하여 一題多變을 좀더 살펴 볼 필요가 있다. 一題多變의 한 예는, 새로운 개념의 학습 이후에 제공되는 종합 문제에서 학습한 새로운 개념과 관련 있는 개념들 사이에 연결성을 형성할 수 있도록 문제 세트를 구성하는 것이다. 이를테면 나눗셈 단원의 종합문제를 나눗셈 문제로만 구성하는 것이 아니라 비율 문제, 곱셈 문제, 뺄셈과 나눗셈이 결합된 문제 등 다양한 문제로 구성하는 것이다. Sun(2011)에 의하면, 一題多變은 한 개별 지식이 아니라 그 지식을 포함하는 지식 꾸러미(knowledg package)를 조명하여 학생들을 개념적 관계의 공간 속으로 이끈다.

一題多變의 관점에서 볼 때, 나눗셈 단원의 종합문제에서는 전형적인 나눗셈 문제만, 비례 단원의 종합문제에서는 전형적인 비례 문제만 다루는 것은 적절하지 않다. 우리나라 초등학교 수학 교과서의 비례식 단원말 종합문제는 一題多變의 원리에 따라 구성되어 있는 것으로 보이지 않는다([그림 11] 참조). 역행적 전이와 一題多變을 함께 고려할 때, 비례 단원의 종합문제에서 포함나눗셈 문제를 재조명하는 기회를 제공하는 것을 검토할 필요가 있다. 이러한 재조명은 포함나눗셈이라는 기존의 학습 내용을 비례라는 새로운 시각에서 재해석해보는 동시에 새로 학습한 비례의 유용성과 가치를 더 깊게 인식하게 하는 기회가 될 수 있다.

참 고 문 헌

강창옥 (2013). **시각적 표현을 강조한 수업이 문제해결력과 수학 학습 태도에 미치는 영향**. 서울교육대학교 석사학위논문.

강흥규 (2009). 배 개념에 기초한 자연수 곱셈 개념의 지도 방안. **학교수학, 11**(1), 17-37.

강흥규 (2014). 초등수학에서 분수 나눗셈의 포함제와 등분제의 정의에 관한 교육적 고찰. **한국초등수학교육학회지, 18**(2), 319-339.

교육부 (2015a). **수학 3-1**. 서울: 천재교육.

교육부 (2015b). **수학 6-2**. 서울: 천재교육.

김소희, 이광호, 구미영 (2013). 초등학교 4학년 학생들의 수학 문제해결과정에서의 시각적 표현. **초등수학교육, 16**(3) 285-301.

백수진 (2009). **카테시안 곱의 역 맥락에서 나타난 학생들의 분수 나눗셈 알고리즘 구성 활동 분석**. 경인교육대학교 석사학위논문.

서보억, 신현용, 나준영 (2013). 수직선 표기법에 대한 분석 연구. **수학교육학연구, 23**(2), 135-152.

임자선, 김성준 (2015). 곱셈과 나눗셈 문장제 유형에 따른 문제해결능력. **한국초등수학교육학회지, 19**(4), 501-525.

임재훈 (2016). 분수 포함제와 제수의 역수 곱하기 알고리즘의 연결성. **한국초등수학교육학회지, 20**(4), 521-539.

임재훈, 이형숙 (2015). 비례 추론을 돕는 시각적 모델에 대하여: 초등 수학 교과서의 비례식과 비례배분 실생활 문제를 대상으로. **수학교육학연구, 25**(2), 189-206.

장지영, 김성준 (2013). 측정 영역에서의 수직선 활용에 관한 고찰. **교과교육학연구, 17**(2), 297-321.

전경희(2005). **수학 문장제 해결에서의 그림 그리기 전략 연구**. 경인교육대학교 석사학위논문.

최경아 (2013). **시각적 표현을 강조한 문제해결지도가 문장제 해결에 미치는 영향 : 초등학교 5학년 중심으로**. 경인교육대학교 석사학위논문.

홍진곤, 김양권 (2015). 초등학교 수학 교과서의 수직선 활용과 문제점. **수학교육논문집, 29**(3), 353-372.

Beckmann, S., & Izsák, A. (2015). Two perspectives on proportional relationships: Extending complementary origins of multiplication in terms of quantities. *Journal for Research in Mathematics Education, 46*(1), 17-38.

Behr, M., Harel, G., Post, T., & Lesh, R. (1992). Rational number, ratio and proportion. In D. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 296-333). NY: Macmillan Publishing.

Harel, G., & Behr, M. (1988). Structure ad hierarchy of missing value proportion problems and their representations. *Journal of mathematical Behavior, 8*, 77-119.

Herbst, P. (1997). The number-line metaphor in the discourse of a textbook series. *For the Learning of Mathematics, 17*(3), 36-45.

Hohensee, C. (2014). Backward transfer: An investigation of the influence of quadratic functions instruction on students' prior ways of reasoning about linear functions. *Mathematical Thinking and Learning, 16*(2), 135-174.

Lamon, S. J. (1993). Ratio and proportion: Connecting content and children's thinking. *Journal for Research in Mathematics Education*, *24*(1), 41-61.

Lamon, S. J. (2007). Rational numbers and proportional reasoning: Toward a theoretical framework for research. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 629–667). Charlotte: Information Age Publishing.

Lobato, J. (2012). The actor-oriented transfer perspective and its contributions to educational research and practice. *Educational Psychologist, 47*(3), 232-247.

National Governors Association Center for Best Practices, & Council of Chief State School Officers. (2010). *Common core state standards for mathematics*. Retrieved from http://www.corestandards.org/Math/.

Orrill, C. H., & Brown, R. E. (2012). Making sense of double number lines in professional development: Exploring teachers' understandings of proportional relationships. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *15*(5), 381-403.

Sun, X. (2011). "Variation problems" and their roles in the topic of fraction division in Chinese mathematics textbook examples. *Educational Studies in Mathematics, 76*(1), 65-85.

Tabart, P., Skalicky, J., & Watson, J. (2005). Modelling proportional thinking with threes and twos. *Australian Primary Mathematics Classroom, 10*(3), 27-32.

Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2003). The didactical use of models in realistic mathematics education: An example from a longitudinal trajectory on percentage. *Educational Studies in Mathematics, 54*, 9-35.

Van de Walle, J. A., Karp, K. S. & Bay-Williams, J. M. (2009). *Elementary and middle school mathematics: Teaching developmentally*. Boston: Allyn & Bacon.

Vergnaud, G. (1988). Multiplicative structures. In J. Hiebert & M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (pp. 141-161). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

<Abstract>

Analysis of Quotitive Division as Finding a Scale Factor in Enlargement Context

Yim, Jaehoon[6]

It is necessary to understand the characteristics of each type of division problems in other to help students develop a rich understanding when they learn each type of division problems. This study focuses on a specific type of division problems; a quotitive division as finding a scale factor in enlargement context. First, this study investigated via survey how 4th-6th graders and preservice and inservice elementary teachers solved a quotitive division relating to scaling problem. And semi-structured interviews with preservice and inservice elementary teachers were conducted to explore what knowledge they brought when they tried to solve enlargement quotitive division problems. Most of participants solved the given quotitive division problem in the same way. Only a few preservice and inservice teachers interpreted it as a proportion problem and solved in a different way. From the interviews, it was found that different conceptions of context and decontextualization, and different conceptions of times (as repeated addition or as a multiplicative operator) were connected to different solutions. Finally, three issues relating to teaching enlargement quotitive division were discussed; visual representation of two solutions, conceptions connected each solution, and integrating quotitive division and proportion in math textbooks.

Key words: quotitive division, compare situation, enlargement, proportional reasoning, visual representation

논문접수: 2017. 01. 15
논문심사: 2017. 02. 20
게재확정: 2017. 02. 22

6) jhyim@ginue.ac.kr