한국초등수학교육학회지 *21*(2) 343-364. *Journal of Elementary Mathematics Education in Korea* *21*(2) 343-364.
2017. 05. 31 *May 31. 2017.*

함수적 사고를 지도하기 위한 초등학교 교사의 지식 분석: 수학 과제 및 수업 전략에 대한 지식을 중심으로

방정숙[1] · 선우진[2]

초등학교 수학에서 함수적 사고는 매우 중요하지만, 함수적 사고를 지도하는 데 중요한 역할을 하는 교사에 대한 연구는 부족한 편이다. 이에 본 연구에서는 함수적 사고를 지도하기 위한 수학 과제 및 수업 전략에 대한 지식을 살펴보기 위하여 검사 도구를 개발한 후 초등학교 교사 119명을 대상으로 조사하였다. 분석 결과, 초등학교 교사들은 대부분 곱셈 관계와 덧셈 관계의 과제를 적절하게 개발할 수 있었고, 비연속적인 대응표의 활용과 같은 수업 전략에 대하여 함수적 사고 지도의 측면에서 설명할 수 있었다. 반면 일부 교사들은 함수적 사고에 대한 중요한 아이디어를 충분히 이해하지 못했다. 연구 결과를 토대로, 함수적 사고를 지도하기 위한 초등학교 교사의 지식에 관하여 시사점을 논의하였다.

주제어: 함수적 사고, 초등학교 교사의 지식, 수학 과제, 수업 전략

Ⅰ. 서 론

함수적 사고는 초등학교부터 지속적으로 지도해야 하는 수학적 사고이다. Kaput(1998)은 함수를 통하여 기존에 배운 수학 내용을 ‘대수화(algebrafy)’할 수 있다고 주장하였으며, Blanton, Levi, Crites와 Dougherty(2011)는 대수적 사고를 신장하기 위한 핵심 아이디어 중 하나로 함수적 사고를 강조하였다. 또한 Carraher와 Schliemann(2015)에 의하면, 함수는 초·중등 수학을 아우르는 매우 강력한 아이디어이다. 이에 최근 초기 대수를 지지하는 연구자들은 초등학생의 함수적 사고를 규명하고 이를 신장하기 위한 구체적인 교수·학습 방안을 모색하고 있다(김정원, 2014; 방정숙, 선우진, 2016; Blanton, Brizuela, Sawrey, & Newman-Owens, 2015).

함수적 사고의 지도 방안을 모색하는 여러 연구는 공통적으로 현행 교육과정의 내용을 그대로 포함하면서 학생이 수학적 관계나 규칙성에 대하여 의미 있게 사고할 수 있는 기회를 제공하고자 노력한다. 예를 들어, 김정원(2014), 방정숙과 선우진(2016) 등은 우리나라의 초등학교 수학 수업에서 함수적 사고를 지도할 수 있는 교수·학습 방안을 도출하고, 그것을 실제 수업으로 구현한 사례를 제시하였다. 이러한 연구는 교사의 의도된 수업을

1) 한국교원대학교 초등교육과(수학교육)
2) [교신저자] 한국교원대학교 대학원

통하여 학생이 대응 관계나 변수에 대하여 더욱 깊이 있게 이해할 수 있다는 경험적 근거를 제공하고, 더불어 현행 수학과 교육과정에서 함수적 사고를 지도할 수 있는 가능성을 확인하였다는 점에서 의미가 있다.

최근 함수적 사고를 지도하는 데 중요한 역할을 하는 교사에 대한 관심이 높다. Wilkie(2014)는 호주의 초등학교 교사 105명을 대상으로 함수적 사고를 지도할 수 있는 지식 실태를 조사하였고, 이후 Wilkie와 Clarke(2015)는 이전 실태 조사 결과를 반영하여 함수적 사고에 대한 교사의 전문성을 신장할 수 있는 체계적인 교사 교육 프로그램을 고안하였다. 대수적 사고의 지도 방안을 제시한 여러 연구에서는 주로 연구자의 개입이 큰 영향을 끼쳤기 때문에, 일반 초등학교 교사가 함수적 사고의 아이디어를 어떻게 이해하고 수업으로 구현할 수 있는지 파악하는 것은 매우 중요한 일이다(Kieran et al., 2016).

우리나라에서는 초등학생의 함수적 사고를 분석하거나(예, 김정원, 2017; 최지영, 방정숙, 2012), 지도 방안에 대하여 논의하는 연구는 비교적 꾸준히 진행되어 온 반면, 함수적 사고를 지도하는 교사에 대한 연구는 별반 없다. 드물게 등호 개념에 대한 초등학교 교사의 지식을 연구한 사례가 있으나(정호정, 최창우, 2014), 대수적 사고의 맥락에서 살펴본 것은 아니었다. 이에 본 연구에서는 초등학교 교사를 대상으로 수학 수업에서 함수적 사고를 지도하기 위한 지식의 실태를 조사하였다. 구체적으로 본 연구에서는 초등학교 교사가 함수적 사고를 지도하는 데 필요한 수학 과제 및 수업 전략에 대한 지식을 중점적으로 살펴보았다. 연구의 결과를 토대로 함수적 사고를 지도하기 위한 초등학교 교사의 지식에 관한 기초적인 정보를 수집하고, 이에 대한 시사점을 논의하였다.

Ⅱ. 이론적 배경

1. 교사 지식 분석틀에 대한 선행 연구

초등학교 교사가 함수적 사고를 지도하는 데 필요한 교사의 지식을 연구하기에 앞서 교사 지식 분석틀에 대한 선행 연구를 검토할 필요가 있다. 이에 본 절에서는 수학 교사의 지식을 다룬 여러 연구 중에서 본 연구에 시사점이 있는 Ball, Thames 그리고 Phelps(2008), McCrory, Floden, Ferrini-Mundy, Reckase 그리고 Senk(2012)를 중심으로 교사 지식의 틀을 살펴보았다. 먼저 Ball 외(2008)의 '수학을 가르치는 데 필요한 지식(Mathematical Knowledge for Teaching [MKT])'은 교사의 지식을 측정하는 대규모의 연구에서 여러 차례 적용 및 검증되어 왔으며, 최근까지도 여러 국내외 연구에서 교사 지식을 측정하는 분석 기준으로 사용되고 있다(예, 전미현, 김구연, 2015; Wilkie, 2014). 구체적으로 Ball 외(2008)의 MKT는 크게 교과 내용 지식과 교수학적 내용 지식으로 구분되는데, 교과 내용 지식은 공통 내용 지식(Common Content Knowledge [CCK]), 전문화된 내용 지식(Specialized Content Knowledge [SCK]), 수학적 식견으로서의 지식(Horizon Content Knowledge [HCK])으로 구성되며, 교수학적 내용 지식은 내용과 학생에 대한 지식(Knowledge of Content and Students [KCS]), 내용과 교수에 대한 지식(Knowledge of Content and Teaching [KCT]), 교육과정에 대한 지식(Knowledge of Content and Curriculum [KCC])으로 구성된다. Ball 외(2008)의 MKT는 수학 교사의 지식을 여러 측면에서 체계적으로 측정할 수 있다는 장점이 있다.

한편 McCrory 외(2012)는 대수를 가르치는 데 필요한 중등 교사의 지식을 분석하기 위

하여 ‘대수를 가르치기 위한 지식(Knowledge of Algebra for Teaching [KAT])’ 을 개념화하였다. McCrory 외(2012)가 제안하는 KAT는 적어도 두 가지 측면에서 Ball 외(2008)의 MKT와 차이를 보인다. 첫째, KAT는 ‘대수’ 를 가르치는 데 필요한 지식이다. 다시 말해 KAT는 특정 내용 영역을 가르치는 데 필요한 지식으로 수학 교사의 지식을 더욱 특화했다는 점에서 주목할 만하다. 이는 교사의 지식이 가르치는 내용에 따라 다를 수 있다는 점을 시사하기 때문이다. 둘째, KAT는 교사에게 필요한 수학적 지식 뿐 아니라 교사가 지식을 어떻게 ‘활용’ 하는지에도 초점을 두었다. 이는 Ball 외(2008)가 교사의 교수학적 내용 지식을 KCS, KCT, KCC로 세분화한 것과 차이를 보인다. McCrory 외(2012)는 대수를 가르치기 위한 교사의 지식을 이해하기 위해서 교사의 수학적 내용 지식과 그것을 활용하는 교수 관행(teaching practices)을 함께 고려해야 한다고 주장하였다. 이에 따라 KAT를 ‘대수를 가르치기 위한 지식’ 차원과 ‘수학적 지식의 활용’ 차원으로 구분하였고, 각 차원을 <표 1>과 같이 세 개의 범주로 구체화하였다.

<표 1> KAT의 차원 및 범주

차원	범주
대수를 가르치기 위한 지식 (Knowledge of algebra for teaching)	학교 대수에 대한 지식
	상급 수학에 대한 지식
	가르칠 때 유용한 수학 지식 (Mathematics-for-Teaching Knowledge)
수학적 지식의 활용 (Use of mathematical knowledge)	분해하기(Decompressing)
	다듬기(Trimming)
	연결하기(Bridging)

‘수학적 지식의 활용’ 은 분해하기, 다듬기, 연결하기로 나누어지는데, 이는 가르치는 데 필요한 세 가지 주요 관행(key practices)이다. 먼저 분해하기는 연산 알고리즘이나 수학적 정의와 같이 압축적이고 일반화된 수학 내용을 학생의 사고 수준에 맞게, 또는 학생에게 접근가능하고 눈에 보이는 형태로 가르치는 일(work)이다. 다듬기는 수학적 온전함(integrity)을 유지하면서 학생의 현재 수준에 맞게 내용을 수정하는 일이다. 예를 들어, 수학적 엄격함(rigor)의 수준을 축소하거나 늘이기, 의도적으로 내용을 생략하거나 더하기, 수학 내용이 너무 지나치게 다듬어진 경우나 중요하거나 특별한 내용이 빠진 경우 등을 알아차리기를 포함한다. 마지막으로 연결하기는 교육과정에서의 수평적·수직적 아이디어, 주제, 교육과정, 개념, 학습 목표를 가로지르는 수학을 연결하여 가르치기 위한 교사의 일이다. McCrory 외(2012)는 다항식과 도함수에 대한 내용을 예로 들어, 대수를 가르치기 위한 지식 차원의 각 범주들이 수학적 지식의 활용 차원에 해당하는 각 범주들과 어떻게 연결되는지 제시하였다.

이상 Ball 외(2008)와 McCrory 외(2012)를 중심으로 교사 지식에 관한 연구를 비교·분석한 결과, 최근에는 특정 내용을 중심으로 교사의 지식을 더욱 구체화하여 분석한다는 점, 그리고 교사의 수학적 지식과 그 지식의 활용을 동시에 고려한다는 점 등을 알 수 있다. 이러한 경향성을 토대로 본 연구에서는 초등학교 교사의 함수적 사고에 관한 지식을 조사하는 데 중점을 두었다. 특히 본 연구에서는 함수적 사고에 대한 내용 지식 보다 초등학교 교사가 함수적 사고에 대한 지식을 수업에서 어떻게 활용하는지에 더욱 관심이 있다. 이에 McCrory 외(2012)가 교수 관행을 반영하여 대수를 가르치는 데 필요한 지식을 구체화

한 아이디어에 착안하여 본 연구에서는 초등학교 교사가 함수적 사고를 지도하는 맥락에서 관련 지식을 어떻게 활용하는지 살펴보고자 했다.

결과적으로 본 연구는 함수적 사고를 지도하는 맥락을 반영하기 위하여 수학 수업의 양상을 분석할 때 적용할 수 있는 방정숙(2010)의 기준을 참고하여, 수학 과제, 수업 전략, 수학적 담화를 기준으로 함수적 사고를 지도하는 데 필요한 초등학교 교사의 지식 틀을 구성했다. 그 중 본 연구에서는 수학 과제 및 수업 전략에 대한 지식을 중점적으로 살펴본다. 구체적으로 수학 과제에 대한 지식은 교사가 함수적 사고를 지도하기 위하여 수학 과제를 개발하거나 분석할 수 있는 지식이며, 수업 전략에 대한 지식은 학생의 함수적 사고를 신장할 수 있는 다양한 수업 전략의 장점과 의도를 파악할 수 있는 지식으로 규정한다. 다음 절에서는 관련 선행 연구를 토대로 초등학교에서 함수적 사고를 지도하는 데 필요한 교사 지식의 내용을 구체화하였다.

2. 초등학교에서 함수적 사고를 지도하기 위해 필요한 교사의 지식

함수적 사고는 공변하는 두 양 사이의 관계를 일반화하고, 그 관계를 다양하게 표현하며, 함수 행동(function behavior)을 분석하기 위하여 다양한 표현을 토대로 추론하는 과정을 포함한다(Blanton et al., 2011). 본 절에서는 이를 바탕으로 초등학교 교사가 함수적 사고를 지도하는 데 필요한 수학 과제 및 수업 전략에 대한 지식을 여러 선행 연구를 바탕으로 구체화하였다. 자세한 내용은 다음과 같다.

본 연구에서 함수적 사고를 지도하는 데 필요한 수학 과제에 대한 지식은 대응 관계에 관한 과제를 개발하고 분석할 수 있는 지식이다. 우리나라의 초등학교 수학 교과서에서는 두 양 사이의 관계가 곱셈 관계($y=ax$)이거나 덧셈 관계($y=x+a$)인 경우를 주로 다루며, 일부 차시에서는 선형 관계($y=ax+b$)를 다루기도 한다(방정숙, 선우진, 김은경, 2017). 이에 초등학교 교사는 함수적 사고를 지도하기 위하여 곱셈 관계, 덧셈 관계, 선형 관계의 과제를 충분히 이해하고 지도할 수 있어야 한다. 본 연구에서는 이러한 관계를 적절한 과제로 개발하거나 분석할 수 있는지 살펴본다. 대응 관계는 수로 표현된 대응 관계(수 패턴)와 도형이나 그림, 모양 등으로 표현된 대응 관계(기하 패턴)를 골고루 균형 있게 다루어야 하며(권성룡, 2007; 김정원, 2014; 방정숙 외, 2017), 이때 동일한 대응 관계를 서로 다르게 표현된 과제로 다루는 것은 학생들의 함수적 사고를 신장하는 데 도움이 된다(Beatty, 2010). 한편 기하 패턴 과제를 다룰 때에는 패턴의 구조를 분석하는 활동이 중요하므로(Rivera, 2013; Warren & Cooper, 2008), 교사는 학생들이 기하 패턴의 구조를 어떻게 분석할 수 있는지, 그리고 그것을 바탕으로 어떻게 패턴의 규칙을 일반화할 수 있을지 예상할 수 있어야 한다.

수업 전략에 대한 지식은 학생의 함수적 사고를 신장하는 데 유용한 지도 전략에 대한 지식이다. 우리나라 교과서에서는 주로 대응표를 사용하여 두 양 사이의 대응 관계를 탐구한다(방정숙 외, 2017). 이에 대응표 지도와 관련된 선행 연구를 살펴보면, Blanton 외(2015), Billings(2008) 등은 두 양 사이의 대응 관계를 비연속적 또는 비순차적으로 탐색한다는 공통점이 있다. 이러한 대응표의 활용은 학생들이 두 양 사이의 대응 관계에서 한 양의 변화에만 초점을 두기 보다는 두 양의 변화를 동시에 고려할 수 있도록 지도하는 데 유용하다(방정숙 외, 2017). 한편 Ferrara와 Sinclair(2016)는 독립변수에 대한 대응값 뿐 아니라 종속변수에 대한 대응값을 역으로 확인하는 과정의 필요성을 주장하였다. 또한 두 양 사이의 대응 관계를 탐구할 때에는 충분한 사례를 탐구해야 하며, 이를 위하여 큰 수에 대한 대응값을 탐구하는 과정을 포함하는 것이 바람직하다(김정원, 2014; Blanton et al,

2015). 이는 Radford(2010)가 강조하는 대수적인 패턴 일반화의 정의와도 부합한다. Radford(2010)는 몇 개의 항 사이에서 파악한 공통성(commonality)이 그 외의 모든 항에서도 항상 적용된다는 것을 이해해야 하며, 나아가 그러한 공통성을 다양한 방법으로 표현할 수 있어야 한다고 주장하였기 때문이다.

한편 기하 패턴을 다룰 때에는 패턴의 구조를 분석하는 활동이 패턴에서 두 양 사이의 관계를 일반화는 데 도움을 준다(방정숙, 선우진, 2016; Moss & McNab, 2011; Rivera, 2013). 특히 Rivera(2013)는 기하 패턴의 형태가 대칭적일수록 일반화를 인식하는 데 효과적이라고 보았으며, Moss와 McNab(2011)은 기하 패턴에서 계속 변하는 부분과 변하지 않는 부분을 파악하는 활동을 통하여 학생들이 패턴의 증가량과 상수를 파악할 수 있다고 제안하였다. 이와 더불어 Moss와 McNab(2011), Warren과 Cooper(2008) 등은 숫자 카드를 사용하여 블록을 놓는 순서를 위치 번호(position number)로 나타냈다. 이를 통하여 어린 학생들도 블록을 놓는 순서와 블록의 수 사이의 관계를 명시적으로 인식할 수 있고, 나아가 위치 번호를 사용하여 블록의 구조를 효과적으로 분석할 수도 있기 때문이다.

이상 선행 연구를 통하여 초등학교 교사가 함수적 사고를 지도하는 데 필요한 수학 과제 및 수업 전략에 대한 지식을 살펴보았다. 본 연구에서는 위의 연구들을 반영하여 <표 2>와 같이 검사 문항의 소재를 추출하였다.

<표 2> 수학 과제 및 수업 전략에 대한 지식을 검사하기 위한 문항 소재 추출

영역	내용	문항 소재	주요 선행 연구
수학 과제	수학 과제를 개발하거나, 분석할 수 있는 지식	· 수 패턴, 기하 패턴 (곱셈 관계, 덧셈 관계) · 패턴 간의 수학적 동치 (덧셈 관계, 선형 관계)	권성룡(2007), 김정원(2014) 방정숙 외(2017), Beatty(2010) Warren & Cooper(2008)
수업 전략	초등학생의 함수적 사고를 신장할 수 있는 다양한 수업 전략의 장점과 의도를 파악할 수 있는 지식	· 비연속적인 함수표 · 큰 수에 대한 대응값구하기 활동 · 위치 번호 카드의 활용	김정원(2014), 방정숙 외(2017) 방정숙 & 선우진(2016) Billings(2008), Blanton 외(2015) Ferrara & Sinclair(2016) Moss & McNab(2011) Radford(2010), Rivera(2013) Warren & Cooper (2008)

Ⅲ. 연구 방법 및 절차

1. 연구 대상

본 연구의 연구 대상은 수도권, 충청 지역, 호남 지역, 영남 지역 등에 근무하고 있는 초등학교 교사 119명이다. 연구에 참여한 교사들의 근무 지역별 분포는 <표 3>과 같다.

<표 3> 연구에 참여한 교사들의 근무 지역별 분포

근무지	수도권	충청	호남	영남	기타	합계
빈도 (%)	41 (34.5)	41 (34.5)	17 (14.3)	19 (15.9)	1 (0.8)	119 (100)

2. 검사 도구

본 연구에서는 함수적 사고를 지도하는 데 필요한 초등학교 교사의 지식을 살펴보기 위하여 선행 연구를 바탕으로 검사 문항을 개발하였다(<표 2> 참조). 그리고 내용을 문항으로 구현할 때에는 2009 개정 수학과 교육과정에 따른 4학년 수학 교과서(교육부, 2014a, 2014b)와 6학년 수학 교과서(교육부, 2015a)에 제시된 대응 관계의 활동을 활용하였다. 이때 현행 교과서의 내용을 활용하여 문항을 개발한 이유는 연구에 참여하는 초등학교 교사들이 검사지의 문항을 현행 교육과정과 밀접하게 인식할 수 있도록 하기 위한 의도에서였다. 문항은 수학 과제 영역 3문항, 수업 전략 영역 3문항으로 구성하였으며, 모두 서술형이었다.

먼저 수학 과제 영역은 초등학교 수학 교과서에서 다루는 대응 관계를 지도하기 위하여 교사가 적절한 과제를 개발할 수 있는지, 그리고 대응 관계에 대한 과제를 분석할 수 있는지를 확인하는 문항으로 구성하였다. 그리고 수업 전략 영역은 선행 연구에서 함수적 사고를 지도하는 데 유용하다고 제안되는 세 가지 전략의 장점을 묻는 문항으로 구성하였다. 검사지는 연구자가 먼저 초안을 개발한 후에 초등수학교육 전공 석・박사 과정의 현직 초등학교 교사들과의 수차례 검토를 통하여 문항의 타당성, 문항 기술의 오류 등을 수정・보완하였다. 이후 초등학교 교사 15명을 대상으로 예비 검사를 실시한 후 그 결과를 바탕으로 문항의 의도가 정확하게 전달될 수 있도록 일부 문항의 기술을 수정・보완하여 최종적으로 검사지를 완성하였다. 검사지의 구성은 <표 4>와 같으며, 구체적인 문항은 지면의 한계를 고려하여 결과에 제시하였다.

<표 4> 검사지의 구성

영역	문항		문항 의도
수학 과제 (3문항)	1		・4학년 학생이 y=x+2 및 y=2x 관계를 탐구할 수 있도록 적절한 과제를 만들 수 있는가?
	2	1)	・대응 관계가 y=x+1인 수 패턴과 기하 패턴 과제를 비교하여, 공통점을 파악할 수 있는가?
		2)	・대응 관계를 탐구할 때 기하 패턴 과제의 장점을 아는가?
	3	1)	・대응 관계가 y=2x+2인 두 양 사이의 관계를 적절한 수식으로 표현할 수 있는가?
		2)	・대응 관계가 y=2x+2인 과제를 4학년 수준에 맞게 만들 수 있는가?
수업 전략 (3문항)	4		・비연속적인 대응표 활용의 장점을 아는가?
	5		・두 양 사이의 관계를 식으로 나타내기 전에 큰 수에 대한 대응값을 구하는 활동의 장점을 아는가?
	6		・기하 패턴을 다룰 때, 위치 번호 카드를 사용하는 장점을 아는가?

3. 자료 수집 및 분석

본 연구에서는 함수적 사고를 지도하기 위한 초등학교 교사의 지식을 조사하는 데 주목적이 있다. 그런데 검사지의 문항이 대부분 서술형이라서 불특정 다수의 교사들로부터 응답을 수집하기에 어려움이 있을 것으로 예상되었다. 이에 검사지를 개발한 후에 여러 지역별로 부탁이 용이한 초등학교 교사를 중심으로 검사지를 배포한 후 수거하는 편의 표

집을 실시하였다.

우선, 연구자는 검사에 참여한 초등학교 교사에게 본 설문의 목적에 대하여 설명한 후 검사지를 직접 전달하거나, 우편 또는 메일의 형태로 배포하였다. 총 150부의 검사지를 배포한 후에는 2016년 12월 5일부터 2017년 1월 31일까지 약 두 달 동안 우편 또는 메일의 형태로 수거하였다. 결과적으로 총 119부의 검사지를 수거하여 분석하였다.

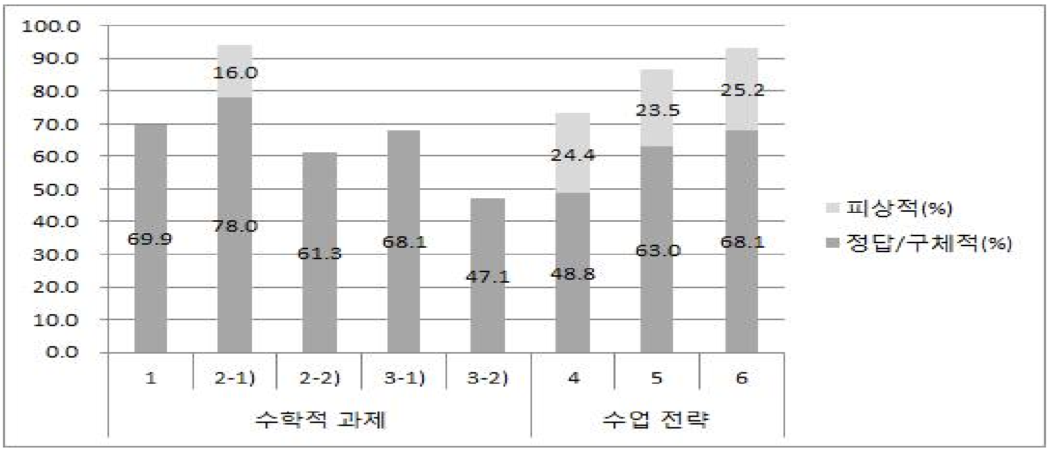
자료 분석의 과정은 다음과 같다. 먼저 검사지의 반응을 분석하기 위하여 각 문항별 반응을 엑셀 파일에 전사한 후 유사한 반응을 중심으로 각 문항별 반응을 유형화하였다. 이때 문항별 반응을 분석한 기준은 크게 두 가지 방식이다. 먼저 1, 3-1), 3-2)번 문항은 반응을 정답과 오답으로 구분하였는데, 그 중 1번과 3-1)번은 문항에서 요구한 두 가지 반응이 모두 적절한 경우에만 정답으로 인정하였다. 그 외 나머지 문항은 문항의 의도에 따라 적절한 반응과 부적절한 반응으로 구분한 후 각각의 반응을 세분화하였다. 예를 들어, 수업 전략에 대한 반응 유형 중에는 '피상적인 장점 기술' 과 '수학적 사고력 신장' 이라는 반응 유형이 있다. 먼저 적절한 반응의 유형 중 '피상적인 장점 기술' 은 수업 전략의 장점이 대응 관계 탐구와 관련은 있으나, 그 내용이 구체적이지 않고 다소 모호한 유형이다. 예를 들어, 비연속적인 대응표의 활용과 관련해서 '[비연속적인 대응표가] 두 양 사이의 관계에 더 중점을 둘 수 있다' 라고 기술한 경우가 이에 해당한다. 다음으로 부적절한 반응의 유형 중 '학생의 수학적 사고력 신장' 은 수업 전략의 장점을 대응 관계의 탐구와 관련 없이, 수학적인 문제 해결력, 추론 능력, 탐구력 등의 측면에서 효과적이라고 기술한 유형을 통칭한다.

위와 같이 각 문항별 반응 유형을 세분화한 후에는 각 유형을 코딩하여 빈도 분석을 실시하였으며, 비율(%)은 소수 둘째 자리에서 반올림한 값으로 나타냈다. 이때, 4번 문항에서는 한 명의 교사가 두 가지의 반응 유형에 해당하는 내용을 기술하는 경우가 있어, 반응 유형에 따라 0.5점씩 빈도를 기록하였다.

Ⅳ. 연구 결과

1. 전반적인 반응 분석

함수적 사고를 지도하기 위한 초등학교 교사의 수학 과제 및 수업 전략에 대한 지식을 검사한 전반적인 결과는 [그림 1]과 같다. [그림 1]은 연구에 참여한 교사 119명의 각 문항별 반응 중 정답 및 적절한 반응에 대한 비율(이하, 정답률)을 그래프로 나타낸 것이다. 구체적으로 1, 3-1), 3-2)번은 정답률을 나타내며, 2-1), 2-2), 4, 5, 6번은 적절한 반응의 비율을 나타낸다. 이때 2-1), 4, 5, 6번의 적절한 반응은 구체적인 반응의 비율과 피상적인 반응의 비율로 나누어 제시하였다. 그 이유는 교사들의 '피상적인 장점 기술' 은 분석 기준 상으로 '적절' 하다고 구분은 하였으나, 검사지에 기술한 내용만으로는 교사의 함수적 사고에 대한 지식을 판단하기가 어려웠다. 이에 구체적이고 타당한 근거를 제시한 교사들의 비율과 구분할 필요가 있었다.



[그림 1] 전반적인 반응 결과

전반적인 정답률을 살펴보면, 대부분의 문항에서 60% 이상의 정답률을 보였다. 이를 통하여 연구에 참여한 교사들은 함수적 사고를 지도하기 위한 수학 과제 및 수업 전략에 대한 지식이 대체로 양호한 수준이라고 짐작된다. 각 문항 영역별로 정답률을 살펴보면, 먼저 수학 과제의 영역에서는 3-2)번을 제외한 대부분의 문항에서 60% 이상의 정답률을 보였다. 3-2)번 문항은 두 양 사이의 대응 관계가 y=2x+2인 과제를 보고 그와 동일한 대응 관계의 과제를 개발하는 문항이었는데, 모든 문항 중 가장 낮은 정답률을 보였다.

다음으로 수업 전략 영역에 대한 전반적인 결과를 보면, 적절한 반응은 약 70% 이상이며, 그 중 구체적인 반응의 비율은 약 50% 이상이었다. 문항별로 살펴보면, 비연속적인 대응표의 활용(4번)에 대한 정답률이 비교적 낮은 편이며, 큰 수에 대한 대응값 구하기(5번), 기하 패턴을 지도할 때의 위치 번호 카드의 활용(6번)에 대해서는 대응 관계를 탐구하는데 어떤 장점이 있는지 비교적 적절하게 이해하고 있었다.

2. 문항 영역별 반응에 대한 분석

가. 수학 과제 영역

수학 과제 영역에 대한 문항별 정답률과 오답률을 정리하면 <표 5>와 같다. 이 중 1번과 3-2)번 문항은 대응 관계를 지도하기 위한 과제를 개발하는 문항이며, 2-1), 2-2), 3-1)번 문항은 과제 분석에 대한 문항이다.

<표 5> 수학 과제 영역에 대한 전반적인 반응 결과

N=119

반응 \ 문항		1	2		3	
			2-1)	2-2)	3-1)	3-2)
정답/적절	빈도 (%)	82 (69.9)	113 (95.0)	73 (61.3)	81 (68.1)	56 (47.1)
오답/부적절	빈도 (%)	37 (31.1)	6 (5.0)	46 (38.7)	38 (31.9)	63 (52.9)

1) 과제의 개발

1번 문항에서는 초등학교 4학년 학생이 두 양 사이의 관계를 △=□+2, △=2×□으로 나타낼 수 있도록 적절한 과제를 만들어 보게 하였다. 이에 대한 구체적인 반응을 정리하면 <표 6>과 같다.

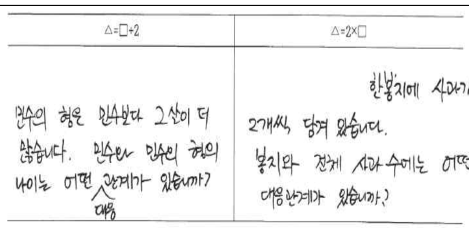
<표 6> 1번 문항에 대한 구체적인 반응 결과

1. 초등학교 4학년 학생들이 두 양 사이의 관계를 □, △를 사용하여 식으로 나타낼 수 있도록 알맞은 문제를 1가지씩 만들어 보십시오.

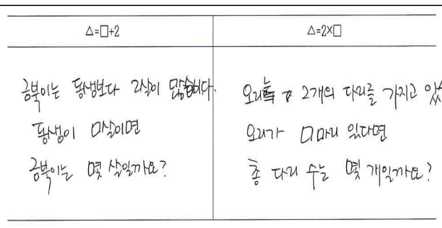
△=□+2	△=2×□

문항	반응 유형		빈도(%)	
1. 대응 관계가 y=x+2, y=2x인 과제 개발	정답	두 양 사이의 대응 관계를 묻는 유형	52(43.7)	82 (68.9)
		종속변수에 해당하는 양을 묻는 유형	30(25.2)	
	오답	구체적인 수에 대한 대응값을 묻는 유형	21(17.6)	37 (31.1)
		기타(예, 두 양만 기술한 경우)	10(8.4)	
		무응답	6(5.0)	
	합계		119(100)	

<표 6>에서 알 수 있듯이, 교사의 약 69%는 두 대응 관계에 대한 과제를 적절하게 개발하였다. 이 때 교사들이 만든 과제는 크게 두 가지 유형으로 분류할 수 있다. 구체적으로 두 양 사이의 대응 관계를 묻는 유형과 종속변수에 해당하는 양을 묻는 유형이다. 예를 들어, [그림 2]의 <교사 38>은 두 양 사이의 대응 관계를 묻는 반면, <교사 29>는 '금북이의 나이', '오리 다리의 수'와 같은 종속변수에 해당하는 양을 묻고 있다. 즉 문항에서 주어진 덧셈 관계와 곱셈 관계를 모두 이해하고 있는 교사라 할지라도, 두 양 사이의 관계를 나타내도록 과제를 개발한 교사는 약 44%에 그쳤다.



두 양 사이의 대응 관계를 묻는 유형
<교사 38>



종속변수에 해당하는 양을 묻는 유형
<교사 29>

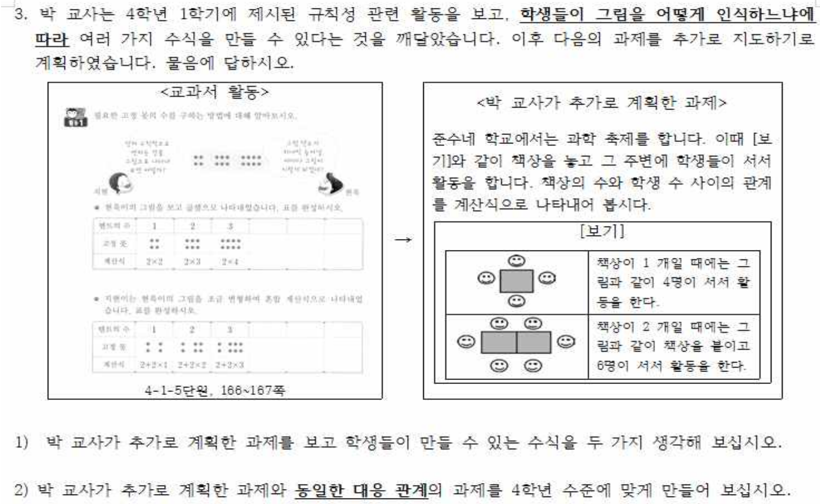
[그림 2] 1번 문항에 대한 정답 반응의 예

한편 오답 반응 중에는 구체적인 수에 대한 대응값을 구해보게 하는 경우가 비교적 높은 비율을 차지하였다(약 18%). 예를 들어, ○○의 언니는 ○○보다 2살이 많은 상황에서

○○가 10살일 때 언니의 나이를 묻는 문항을 개발한 경우이다. 이와 같이 반응한 교사들도 앞서 종속변수에 해당하는 양을 묻는 교사들과 마찬가지로 두 양 사이의 관계보다는 종속변수에 해당하는 양에 더 초점을 두고 있었다.

3-2)번 문항에서는 두 양 사이의 대응 관계가 y=2x+2인 과제를 제시한 후 그와 동일한 대응 관계의 과제를 4학년 수준에 맞게 만들어 보게 하였다(<표 7> 참조). 그 결과 적절한 과제를 개발한 경우는 약 47%로, 앞서 1번 문항의 정답률과 비교하여 약 22%p 감소하였다. 이러한 결과를 통하여 연구에 참여한 초등학교 교사들이 y=ax+b와 같은 선형 관계의 과제를 개발하는 데 어려움을 느끼는 것으로 추측된다. 주목할 점은 3-1)번 문항에서 교사의 약 68%가 책상의 수와 학생의 수 사이의 대응 관계가 y=2x+2일 때 두 양 사이의 관계를 두 가지의 서로 다른 수식으로 일반화하여 표현할 수 있었음에도 불구하고 3-2)번 문항에서 동일한 대응 관계의 과제를 만드는 데 어려움을 겪었다는 것이다.

<표 7> 3-2)번 문항에 대한 구체적인 반응 결과


3. 박 교사는 4학년 1학기에 제시된 규칙성 관련 활동을 보고, **학생들이 그림을 어떻게 인식하느냐에 따라** 여러 가지 수식을 만들 수 있다는 것을 깨달았습니다. 이후 다음의 과제를 추가로 지도하기로 계획하였습니다. 물음에 답하시오.

<교과서 활동>

4-1-5단원, 166~167쪽

<박 교사가 추가로 계획한 과제>

준수네 학교에서는 과학 축제를 합니다. 이때 [보기]와 같이 책상을 놓고 그 주변에 학생들이 서서 활동을 합니다. 책상의 수와 학생 수 사이의 관계를 계산식으로 나타내어 봅시다.

[보기]

책상이 1 개일 때에는 그림과 같이 4명이 서서 활동을 한다.

책상이 2 개일 때에는 그림과 같이 책상을 붙이고 6명이 서서 활동을 한다.

1) 박 교사가 추가로 계획한 과제를 보고 학생들이 만들 수 있는 수식을 두 가지 생각해 보십시오.

2) 박 교사가 추가로 계획한 과제와 **동일한 대응 관계**의 과제를 4학년 수준에 맞게 만들어 보십시오.

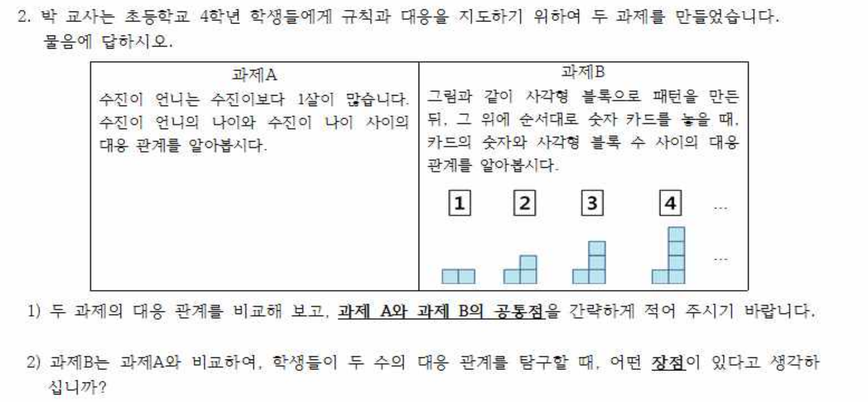
<table>
<tr><th>문항</th><th colspan="2">반응 유형</th><th colspan="2">빈도(%)</th></tr>
<tr><td rowspan="5">3-2)
대응 관계가
y=2x+2인
과제 개발</td><td rowspan="2">정답</td><td>두 양 사이의 관계를 나타내는 유형</td><td>51(42.9)</td><td rowspan="2">56
(47.1)</td></tr>
<tr><td>구체적인 답을 계산하는 유형</td><td>5(4.2)</td></tr>
<tr><td rowspan="3">오답</td><td>부정확한 상황 진술</td><td>10(8.4)</td><td rowspan="3">63
(52.9)</td></tr>
<tr><td>동일한 대응 관계가 아닌 경우</td><td>16(13.4)</td></tr>
<tr><td>모름 / 무응답</td><td>37(31.1)</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="2">합계</td><td colspan="2">119(100)</td></tr>
</table>

2) 과제의 분석

2번 문항은 두 양 사이의 대응 관계가 y=x+1인 수 패턴과 기하 패턴 과제를 분석하는 문항이다. 그 중 2-1)번 문항은 두 과제의 공통점을 기술하게 하였고, 2-2)번 문항은 기하 패턴 과제와 수 패턴 과제를 비교하여 기하 패턴 과제의 장점을 기술하게 하였다. 먼저 2-1)번에 대한 구체적인 반응은 다음과 같다. <표 8>에서 알 수 있듯이, 대부분의 교사는 두 과제의 공통점을 파악할 수 있었다(약 95%). 하지만 구체적인 반응 유형을 살펴보면, 교사의 약 41%만이 두 양 사이의 대응 관계가 y=x+1이라는 것을 구체적으로 기술한 것을

알 수 있다.

<표 8> 2-1)번 문항에 대한 구체적인 반응 결과



2. 박 교사는 초등학교 4학년 학생들에게 규칙과 대응을 지도하기 위하여 두 과제를 만들었습니다. 물음에 답하시오.

과제A	과제B
수진이 언니는 수진이보다 1살이 많습니다. 수진이 언니의 나이와 수진이 나이 사이의 대응 관계를 알아봅시다.	그림과 같이 사각형 블록으로 패턴을 만든 뒤, 그 위에 순서대로 숫자 카드를 놓을 때, 카드의 숫자와 사각형 블록 수 사이의 대응 관계를 알아봅시다. 1 2 3 4 …

1) 두 과제의 대응 관계를 비교해 보고, **과제 A와 과제 B의 공통점**을 간략하게 적어 주시기 바랍니다.

2) 과제B는 과제A와 비교하여, 학생들이 두 수의 대응 관계를 탐구할 때, 어떤 **장점**이 있다고 생각하십니까?

문항	반응 유형		빈도(%)		
2-1) 수 패턴과 기하 패턴 과제의 공통점	공통점 파악	두 양 사이의 대응 관계가 y=x+1이라는 것을 구체적으로 기술	49 (41.2)	94 (79.0)	113 (95.0)
		1씩 증가에 초점을 두어 기술	45 (37.8)		
		대응 관계 및 규칙이 동일하다는 것을 피상적으로 기술	19(16.0)		
	공통점을 파악하지 못함 / 무응답		6(5.0)		
	합계		119(100)		

반면에 교사의 약 38%는‘1씩 증가’한다는 사실에만 주목하여 공통점을 기술하였다. 예를 들어, ‘숫자가 늘어날 때마다 1씩 늘어난다’, ‘1씩 증가하는 규칙’등으로 기술하는 경우이다. 이처럼‘1씩 증가’에 초점을 둔 반응은 두 양의 차이가 1이라는 데 주목한 경우와 종속변수에 해당하는 양이 1씩 증가한다는 것에 주목한 경우로 나누어진다. 먼저 두 양 사이의 차이가 1이라는 데 주목한 교사는 ‘두 수의 관계가 1 차이’,‘두 변수 사이에 +1 관계’등과 같이 기술하였으며, 종속변수에 해당하는 양이 1씩 증가한다는 것에 주목한 교사는‘옆으로 갈수록 1씩 커진다’, ‘하나씩 수가 더해진다’등과 같이 기술하였다. 이러한 반응을 통하여, 전자의 경우에는 두 양을 동시에 고려한 반면에 후자의 경우에는 한 양의 변화에만 초점을 둔 것으로 추측된다. 이처럼 일부 교사들은 대응 관계를 기술할 때 두 변수를 명확하게 진술하지 않거나 재귀적으로만 파악하는 경향이 있다는 점에 주목할 필요가 있다[3]. 교사의 이러한 경향성은 학생에게 함수적 사고를 지도하는 과정에

3) 함수 관계는 재귀적 패턴(recursive pattern), 공변적 사고(covariational thinking), 대응 관계(correspondence relationship)로 탐구될 수 있다(Blanton et al., 2011). 재귀적 패턴은 한 양의 변화에만 초점을 두어 변화를 탐구하는 것을 일컫는다. 공변적 사고는 두 양이 서로 관련되어 어떻게 변하는지 아는 경우로, 예를 들어 x값이 1씩 증가할 때, y값은 2씩 증가한다고 설명하는 경우가 이에 해당된다. 대응 관계는 함수 규칙으로 표현되는 두 양 사이의 상관관계로 두 양의 변화를 탐구하는 것을 일컫는다. 예를 들어 x값이 1일 때, y값은 3, x값이 2일 때, y값은 5라고 설명하고 임의의 x값에 해당하는 y값을 추론할 수 있다(자세한 내용은 Blanton 외(2011, pp. 52-54) 참조).

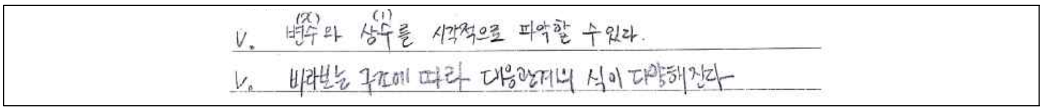
서 반영될 수 있기 때문이다.

다음으로 2-2)번 문항에 대한 구체적인 결과는 <표 9>와 같다. 2-2)번 문항에서는 교사가 기하 패턴의 장점을 어떻게 이해하는지에 초점을 두고 살펴보았다. 그 결과, 교사의 약 61%는 기하 패턴 과제의 장점을 대응 관계를 탐구하는 활동과 관련지어 기술하였고, 약 39%는 대응 관계의 탐구와 관련 없는 내용을 기술하였다. 전자와 관련하여 약 35%는 기하 패턴 과제를 사용하면 증가량을 눈으로 확인할 수 있다는 시각적 측면의 장점을 기술하였고, 약 5%는 기하 패턴을 직접 조작해 볼 수 있다는 장점을 언급하였다. 즉 교사의 약 40%는 기하 패턴 과제가 대응 관계를 탐구할 때 시각 자료나 구체물 활용의 측면에서 효과적이라고 인식하는 경향이 있었다. 반면에 약 21%는 숫자 카드와 패턴 블록의 구조 사이의 관련성을 근거로 기하 패턴 과제의 장점을 기술하였다. 구체적인 반응의 예는 [그림 4]와 같다. 이처럼 반응한 교사는 기하 패턴 과제의 장점을 시각적 측면과 구체물 조작의 측면에서 기술한 교사보다 문항에서 제시된 기하 패턴 과제가 대응 관계를 탐구할 때 어떤 장점이 있고, 어떻게 활용될 수 있는지를 명확하게 이해하고 있다고 사료된다.

한편 교사의 약 39%는 문항에서 제시된 기하 패턴 과제가 대응 관계를 지도할 때 어떤 장점이 있는지 정확하게 이해하지 못했다. 구체적으로 약 26%는 기하 패턴 과제가 수 패턴 과제보다 더 쉽다고 인식하거나, 약 8%는 기하 패턴 과제가 학생의 문제 해결력, 탐구 능력과 같은 수학적 사고력을 신장하는 데 효과적이라고 모호하게 기술하였기 때문이다.

<표 9> 2-2)번 문항에 대한 구체적인 반응 결과

문항	반응 유형		빈도(%)		
2-2) 기하 패턴 과제의 장점	대응 관계 탐구와 관련된 장점	위치 번호 카드와 블록 구조 사이의 관련성을 파악하여 기술	25(21.0)	73 (61.3)	119 (100)
		시각적 효과를 중심으로 기술	42(35.3)		
		구체물 조작의 효과를 중심으로 기술	6(5.0)		
	대응 관계 탐구와 관련 없는 장점	수 패턴 과제보다 더 쉬움	31(26.1)	46 (38.7)	
		학생의 수학적 사고력 신장	10(8.4)		
		학생의 흥미 유발	4(3.4)		
		오답/무응답	1(0.8)		



[그림 4] 기하 패턴 과제의 장점을 정확하게 분석한 예(교사 97의 반응)

나. 수업 전략 영역

수업 전략 영역에 대한 문항별 반응을 표로 정리하면 <표 10>과 같다. 전반적인 결과를 살펴보면, 수업 전략 영역에 해당하는 세 문항의 정답률은 모두 70% 이상으로 수학 과제 영역의 정답률과 비교하여 고르게 높은 편이다. 이에 연구에 참여한 많은 교사들은 비연속적인 대응표, 큰 수에 대한 대응값, 위치 번호 카드의 활용이 대응 관계를 지도할 때 어떤 장점이 있는지 비교적 적절하게 이해하고 있다고 짐작된다.

<표 10> 수업 전략 영역에 대한 전반적인 반응 결과

N=119

반응 \ 문항		4 (비연속적인 대응표)	5 (큰 수에 대한 대응값)	6 (위치 번호 카드)
정답/적절	빈도 (%)	87 (73.1)	103 (86.6)	111 (93.3)
오답/부적절	빈도 (%)	32 (26.9)	16 (13.4)	8 (6.7)

1) 비연속적인 대응표 활용

비연속적인 대응표 활용에 대한 구체적인 반응 결과는 〈표 11〉과 같다. 〈표 11〉에서 알 수 있듯이, 약 26%는 연속적인 대응표를 사용할 때에는 그림의 수가 20씩 증가한다는 사실에 초점을 두어 대응 관계를 재귀적으로 탐색할 수 있지만, 비연속적인 대응표를 사용할 때에는 두 양을 모두 고려하여 대응 관계를 파악할 수 있다는 장점을 구체적으로 이해하고 있었다([그림 5]의 〈교사 77〉 참조). 약 13%는 종속변수에 대한 대응값을 역으로 탐색할 수 있는 기회가 있기 때문에 두 양 사이의 대응 관계를 고려하게 된다고 기술하기도 하였다. 즉 위와 같이 응답한 교사들은 공통적으로 대응 관계를 탐구할 때에는 학생이 두 양을 동시에 고려할 수 있도록 지도해야 한다는 것을 이해하고 있다고 사료된다. 한편 일부 교사들은 대응표가 비연속적으로 구성되어 있는 것 보다는 대응표의 마지막 칸에 변수(□)를 제시하였다는 점에 주목하는 경우도 있었다. 이러한 교사들은 변수를 제시하는 것이 두 양 사이의 관계를 표현해야 할 필요성을 부각한다고 적절하게 응답하였다(약 10%).

한편 적절한 반응 중에는 "대응 관계를 더 명확하게 탐구할 수 있다" 와 같이 '피상적인 장점' 을 기술한 유형이 약 24%로 비교적 높은 비율을 차지하였다. 이처럼 수업 전략에 대하여 피상적인 장점을 기술한 교사들이 비연속적인 대응표 활용의 장점을 타당하게 이해하고 있는지를 판단하기는 어렵다. 문항에서 비연속적인 대응표를 활용하는 것이 탐구하는 데 어떤 장점이 있는지 질문했기 때문에 막연하게 응답했을 가능성이 있기 때문이다. 이에 비연속적인 대응표 활용의 장점을 피상적으로 기술한 교사보다는 위와 같이 구체적이고 타당한 근거를 제시한 약 49%의 교사들이 함수적 사고를 지도하기 위한 지식이 더 높은 것으로 사료된다.

반면에 일부 교사들은 비연속적인 대응표의 활용에 대하여 부정적으로 인식했다. [그림 5]의 〈교사 119〉와 같이, 일부 교사들은 비연속적인 대응표를 활용하는 것이 학생에게 '인지적인 부담' 을 주는 어려운 문제이기 때문에 적절하지 않다고 보았다. 이러한 교사들은 대응 관계를 탐구할 때에 두 양을 고려해야 하는 중요성을 이해하지 못하고 있으며, 학생들이 쉽게 해결할 수 있는 문제가 좋은 문제라고 인식하고 있었다.

<표 11> 4번 문항에 대한 구체적인 반응 결과

4. 최 교사는 다음 과제를 지도하기 위하여 두 종류의 대응표를 생각했습니다.

영화가 1초 동안 상영되려면 그림이 20장 필요합니다. 영화 상영 시간과 필요한 그림의 수 사이에는 어떤 관계가 있는지 알아보시오.

㉠

시간(초)	1	2	3	4	5	6	7	⋯
그림의 수	20	40						⋯

㉡

시간(초)	1	2	5		9	⋯	□
그림의 수				120		⋯	

㉡대응표를 사용하는 것은 ㉠대응표를 사용할 때와 비교하여, 학생이 대응 관계를 탐구하는 데 어떤 **장점**이 있다고 생각하십니까?

<table>
<tr><th>문항</th><th colspan="2">반응 유형</th><th colspan="4">빈도(%)</th></tr>
<tr><td rowspan="7">4.
비연속적인
대응표
활용의
장점</td><td rowspan="4">적절</td><td>재귀적인 탐색과 비교하여 장점을 구체적으로 기술</td><td>31
(26.1)</td><td rowspan="3">58
(48.8)</td><td rowspan="4">87
(73.1)</td><td rowspan="7">119
(100)</td></tr>
<tr><td>역관계 파악에 초점을 두어 기술</td><td>15.5
(13.0)</td></tr>
<tr><td>변수(□) 표현에 초점을 두어 기술</td><td>11.5
(9.7)</td></tr>
<tr><td>피상적인 장점 기술</td><td colspan="2">29(24.4)</td></tr>
<tr><td rowspan="3">부적절</td><td>학생의 수학적 사고력 신장</td><td colspan="2">18(15.1)</td><td rowspan="3">32
(26.9)</td></tr>
<tr><td>장점 없음/부적절한 장점</td><td colspan="2">8(6.7)</td></tr>
<tr><td>모름/무응답</td><td colspan="2">6(5.0)</td></tr>
</table>

과제는 $y=x\times 20$의 대응을 알아보고자 하는 과제이지만 ㉠ 대응표는 20씩 더해나가도 대응표를 완성할 수 있어서 교사가 목표달성 여부를 쉽게 파악하기가 어려운 반면, ㉡ 대응표는 대응을 정확히 알아야 해결할 수 있어서 목표달성여부를 쉽게 파악

장점을 타당하게 기술한 경우
<교사 77>

~~쉽게 이해할 수 있음.~~ ㉠이 이해하기 더 쉬움 ㉡은 인지적부담이 커서 일반화하는 학생들의 실수 유발 가능성이 더 커서 사용하기 어려움.

장점 없음/부적절한 장점을 기술한 경우
<교사 119>

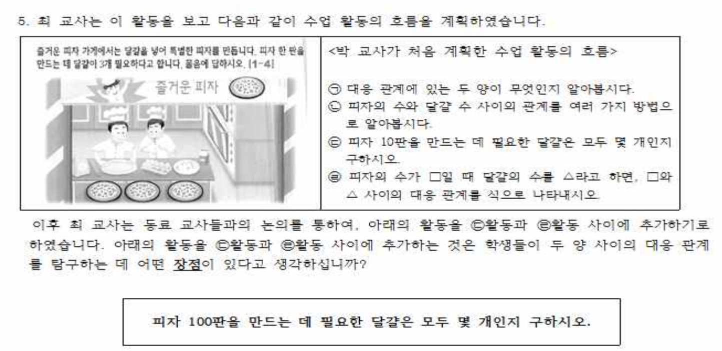
[그림 5] 문항 4에 대한 반응

2) 큰 수에 대한 대응값 구하기 활동

큰 수에 대한 대응값 구하기 활동에 대한 교사들의 반응을 살펴보면 <표 12>와 같다. 구체적으로 약 46%는 큰 수에 대한 대응값을 구하는 활동이 대응 관계를 일반화하거나 수식으로 표현하는 활동에 도움을 준다고 이해했다. 예를 들어, 많은 교사들은 [그림 6]의 <교사 29>와 같이 작은 수에 대한 대응값을 구하는 활동에서는 학생들이 두 양 사이의 관계를 명확하게 이해하지 못하거나 일반화된 규칙을 알지 못해도 문제를 해결할 수 있지만, 큰 수에 대한 대응값을 구하기 위해서는 두 양 사이의 관계를 일반화할 필요성이 드러난다는 점을 구체적으로 이해하고 있었다. 이는 두 양 사이의 관계를 □, △를 사용하여 나타내는 후속 활동과의 연계성을 이해하고 있는 것이라고도 볼 수 있다. 한편 약 17%는 큰 수에 대한 대응값을 구하는 활동이 앞서 파악한 대응 관계나 규칙을 적용해 보거나 검증해 볼 수 있는 기회를 제공한다고 설명했다. 즉, 약 63%의 교사들은 두 양 사이의 관계

를 변수를 사용하여 수식으로 나타내기 전에 큰 수에 대한 대응값을 구하는 활동의 필요성에 대하여 적절하게 이해하고 있다고 사료된다.

<표 12> 5번 문항에 대한 구체적인 반응 결과


5. 최 교사는 이 활동을 보고 다음과 같이 수업 활동의 흐름을 계획하였습니다.

즐거운 피자 가게에서는 달걀을 넣어 특별한 피자를 만듭니다. 피자 한 판을 만드는 데 달걀이 3개 필요하다고 합니다. 물음에 답하시오. [1-4]

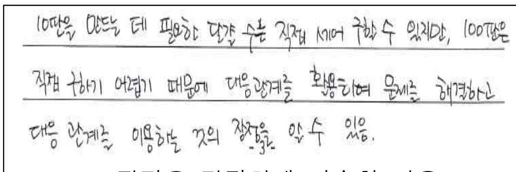
<박 교사가 처음 계획한 수업 활동의 흐름>

㉠ 대응 관계에 있는 두 양이 무엇인지 알아봅시다.
㉡ 피자의 수와 달걀 수 사이의 관계를 여러 가지 방법으로 알아봅시다.
㉢ 피자 10판을 만드는 데 필요한 달걀은 모두 몇 개인지 구하시오.
㉣ 피자의 수가 □일 때 달걀의 수를 △라고 하면, □와 △ 사이의 대응 관계를 식으로 나타내시오.

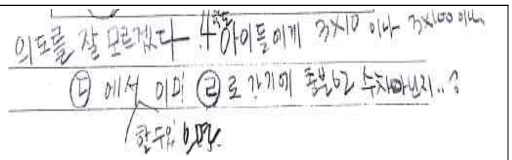
이후 최 교사는 동료 교사들과의 논의를 통하여, 아래의 활동을 ㉢활동과 ㉣활동 사이에 추가하기로 하였습니다. 아래의 활동을 ㉢활동과 ㉣활동 사이에 추가하는 것은 학생들이 두 양 사이의 대응 관계를 탐구하는 데 어떤 장점이 있다고 생각하십니까?

피자 100판을 만드는 데 필요한 달걀은 모두 몇 개인지 구하시오.

문항	반응 유형		빈도(%)			
5. 큰 수에 대한 대응값 구하기 활용의 장점	적절	일반화 및 수식 표현의 필요성	55 (46.2)	75 (63.0)	103 (86.6)	119 (100)
		대응 관계(규칙)의 적용 및 검증	20 (16.8)			
		피상적인 장점 기술	28(23.5)			
	부적절	학생의 수학적 사고력 신장	8(6.7)		16 (13.4)	
		장점 없음/부적절한 장점	5(4.2)			
		모름/무응답	3(2.5)			



장점을 적절하게 기술한 경우
<교사 29>



장점 없음/부적절한 장점을 기술한 경우
<교사 97>

[그림 6] 문항 4에 대한 반응

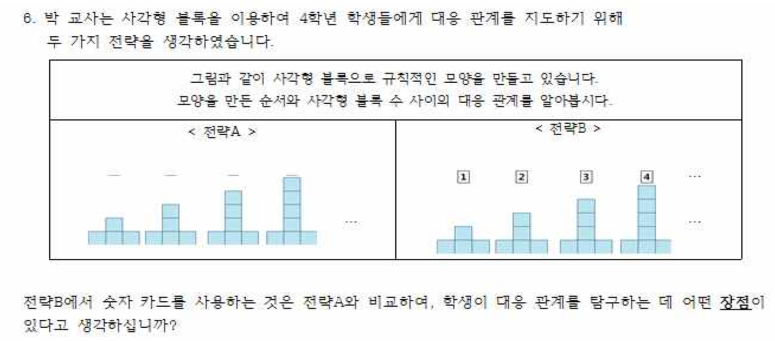
반면 일부 교사들은 큰 수에 대한 대응값을 구하는 활동이 대응 관계를 탐구하는 데 어떤 장점이 있는지 제대로 이해하지 못했다. 예를 들어, 일부 교사들은 [그림 6]의 <교사 97>처럼 10번째에 대한 대응값을 구하는 활동만으로도 학생이 두 양 사이의 대응 관계를 명확하게 파악할 수 있으며, 대응 관계를 수식으로 나타낼 수 있다고 이해하고 있었다.

3) 기하 패턴 지도 시 위치 번호 카드 활용

기하 패턴을 지도할 때 위치 번호 카드를 활용하는 것에 대한 반응 결과는 <표 13>과 같다. 먼저 약 25%는 패턴 블록을 놓은 순서를 나타내는 위치 번호와 블록의 구조 사이의 관련성을 파악하여 구체적인 장점을 기술하였다. 예를 들어 [그림 7]의 <교사 76>, <교사

95>와 같이 반응한 교사들은 위치 번호가 주어질 때에는 모양에서 계속 변화하는 블록의 수와 위치 번호 사이의 관계를 파악하는 데 용이하다는 것을 이해하고 있었다. 또한 약 43%는 위치 번호가 주어지면 학생이 대응 관계에서 ‘모양을 만든 순서’와 ‘블록의 수’라는 두 변수를 명확하게 인식할 수 있다는 장점에 주목하였다. 예를 들어 [그림 7]의 〈교사 70〉, 〈교사 82〉의 반응에서 알 수 있듯이, 교사들은 위치 번호와 블록의 구조 사이의 관련성 보다는 ‘위치 번호’라는 독립변수가 명확하게 드러난다는 데 초점을 두는 경우가 많았다. 이러한 두 가지 반응 유형은 모두 두 양을 고려해야 하는 필요성을 바탕으로 기하 패턴 지도 시 위치 번호 카드의 장점을 적절하게 파악한 것으로 이해된다. 다만 두 반응을 비교했을 때에는 위치 번호가 기하 패턴에서 계속 증가하는 부분이라는 것을 파악한 교사가 그렇지 않은 교사보다 학생이 두 양 사이의 대응 관계를 다양하게 파악할 수 있도록 지도할 가능성이 높다고 판단된다.

<표 13> 6번 문항에 대한 구체적인 반응 결과

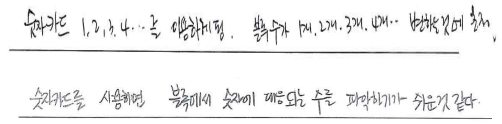

6. 박 교사는 사각형 블록을 이용하여 4학년 학생들에게 대응 관계를 지도하기 위해 두 가지 전략을 생각하였습니다.

그림과 같이 사각형 블록으로 규칙적인 모양을 만들고 있습니다.
모양을 만든 순서와 사각형 블록 수 사이의 대응 관계를 알아봅시다.

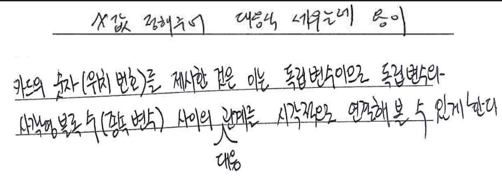
전략B에서 숫자 카드를 사용하는 것은 전략A와 비교하여, 학생이 대응 관계를 탐구하는 데 어떤 장점이 있다고 생각하십니까?

<table>
<tr><th>문항</th><th colspan="2">반응 유형</th><th colspan="4">빈도(%)</th></tr>
<tr><td rowspan="5">6.
위치 번호
카드 활용의
장점</td><td rowspan="3">적절</td><td>위치 번호와 블록의 구조를 관련지어 대응 관계를 탐구</td><td>30
(25.2)</td><td rowspan="2">81
(68.1)</td><td rowspan="3">111
(93.3)</td><td rowspan="5">119
(100)</td></tr>
<tr><td>두 변수를 명확하게 인식</td><td>51
(42.9)</td></tr>
<tr><td>피상적인 장점 기술</td><td colspan="2">30(25.2)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">부적절</td><td>장점 없음/부적절한 장점</td><td colspan="2">6(5.0)</td><td rowspan="2">8
(6.7)</td></tr>
<tr><td>무응답</td><td colspan="2">2(1.7)</td></tr>
</table>

한편 피상적인 장점에 대한 반응은 앞서 비연속적인 대응표의 활용이나 큰 수에 대한 대응값 구하기 활동에 대한 반응과 차이를 보였다. 구체적으로 앞의 두 전략에서는 대응 관계를 더 명확하게 인식할 수 있다는 측면에서 피상적인 장점을 기술한 반면, 본 문항에서는 “숫자카드가 힌트가 되어 대응 관계를 알아내기 쉬울 것 같다(교사 14).” 와 같이 대응 관계를 더 ‘쉽게’ 파악할 수 있는 측면에 대하여 기술하였기 때문이다. 즉 이러한 반응을 통하여 많은 교사들은 기하 패턴을 탐구할 때 위치 번호 카드를 사용하는 것이 대응 관계의 파악을 더 쉽게 한다고 인식하는 경향을 알 수 있다.



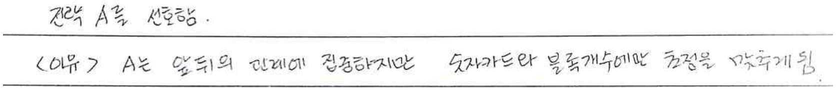
위치 번호와 블록의 구조를 유용하게 활용
<교사 76, 교사 95>



두 변수를 명확하게 인식할 수 있음
<교사 70, 교사 82>

[그림 7] 문항 6에 대한 적절한 반응의 예

반면 위치 번호 카드를 사용하는 것이 오히려 대응 관계를 탐구하는 데 방해가 된다고 생각하는 교사도 있었다. 예를 들어 [그림 8]의 <교사 19>는 학생들이 기하 패턴을 다룰 때 위치 번호와 블록의 수를 고려하는 것 보다는 모양의 전후를 비교하는 것이 더 효과적이라고 이해하고 있었다. 대응 관계에서 두 양이 서로 어떻게 변하고, 어떤 관계가 있는지 탐색하는 것 보다는 블록 수가 어떻게 변하는지 재귀적으로 탐색하는 것이 대응 관계를 탐구하는 데 더 적절하다고 본 것이다. 이러한 반응을 통하여, 일부 교사들은 대응 관계나 함수적 사고에 대한 주요 아이디어에 대하여 명확하게 이해하고 있지 못하다는 것을 알 수 있다.



[그림 8] 문항 6에 대한 장점 없음/부적절한 장점 기술의 예(교사 19)

Ⅴ. 결론 및 논의

본 연구에서는 함수적 사고를 지도하기 위한 초등학교 교사의 지식 실태를 조사하였다. 연구에 참여한 교사들은 모든 문항에서 약 60% 이상의 정답률을 보였는데, 이를 통하여 우리나라의 초등학교 교사들은 함수적 사고를 지도하기 위한 수학 과제 및 수업 전략에 대한 지식이 대체로 양호하다고 사료된다. 하지만 일부 교사들은 함수적 사고에 관한 주요 아이디어를 제대로 이해하지 못하고 있었다. 분석 결과를 토대로 초등학교 수학 수업에서 함수적 사고를 지도하기 위한 교사의 지식에 관한 시사점을 논의하면 다음과 같다.

첫째, 초등학교 교사들은 곱셈 관계와 덧셈 관계에 해당하는 과제는 적절하게 개발할 수 있는 반면, 선형 관계에 해당하는 과제를 개발하는 데에는 상대적인 어려움을 겪었다. 구체적으로 연구에 참여한 교사의 약 69%는 곱셈 관계와 덧셈 관계에 대한 과제를 적절히 개발하였으나, 두 양 사이의 대응 관계가 y=2x+2인 과제를 적절히 개발한 교사는 약 47%에 그쳤기 때문이다. 이는 초등학교 수학 교과서에서 주로 곱셈 관계와 덧셈 관계를 중심으로 대응 관계를 다룬다는 점과 관련이 있을 것으로 추측된다.

2015 개정 수학과 교육과정에서는 두 양 사이의 대응 관계를 식으로 나타낼 때 하나의 연산으로만 표현되는 간단한 경우만 다루도록 명시하고 있으나(교육부, 2015b), 현행 초등

학교 수학 교과서에서는 두 양 사이의 관계를 □, △등과 같은 기호를 사용하여 나타내지 않는 정도에서 선형 관계나 제곱 관계 등 여러 가지의 대응 관계를 다룬다(예, 교육부, 2014a). 나아가 선행 연구에서는 어린 학생도 적절한 지도를 통하여 두 양 사이의 대응 관계가 선형 관계인 패턴을 충분히 다루고 일반화할 수 있었다(Moss & McNab, 2011). 이에 초등학교 교사들이 선형 관계에 대한 다양한 과제를 접하고 다룰 수 있는 기회를 제공할 필요가 있다고 사료된다.

둘째, 연구에 참여한 교사들의 반 이상은 함수적 사고를 지도하는 데 유용한 수업 전략에 대하여 명확하게 이해하고 있었다. 본 연구에서는 비연속적인 대응표의 활용, 큰 수에 대한 대응값 구하기 활동, 기하 패턴 과제에서 위치 번호 카드의 활용이 대응 관계를 탐구하는 측면에서 어떤 장점이 있는지 기술하게 하였는데, 이러한 전략들은 현행 초등학교 수학 교과서에서는 거의 다뤄지지 않는다(방정숙, 선우진, 2016). 즉 대부분 생소한 전략임에도 불구하고 연구에 참여한 교사들의 약 49~68%가 각 수업 전략이 대응 관계를 탐구하는 측면에서 어떤 장점이 있는지 비교적 구체적이고 적절하게 이해하고, 이를 학생의 반응과 연결하여 설명했다는 점은 매우 고무적이다.

특히 주목할 점은 위와 같이 반응한 교사들은 함수적 사고에서 강조되는 주요 아이디어를 명확하게 이해하고 있다는 것이다. 예를 들어, 교사들은 비연속적인 대응표나 기하 패턴 과제에서 위치 번호 카드를 사용하면 두 양을 동시에 고려할 수 있다는 점을 파악했는데, 두 양의 공변은 함수적 사고를 지도하기 위하여 교사가 알아야 하는 필수적인 아이디어이다(Blanton et al., 2011). 또한 큰 수에 대한 대응값을 구하는 활동이 대응 관계의 일반화를 도모한다는 점을 이해하고 있었는데, 이는 Radford(2010)가 주장하는 일반화의 정의에도 부합한다. 이러한 결과를 통하여 우리나라의 초등학교 교사들이 함수적 사고의 의미나 그 중요성에 대하여 명시적으로 인지하지 못할지라도, 많은 교사들은 함수적 사고를 지도하기 위한 주요 아이디어에 대하여 공감하고 이해하고 있는 것으로 사료된다.

셋째, 일부 교사들의 반응을 살펴보면, 함수적 사고를 지도하기 위한 수업 전략과 관련하여 이해가 부족한 측면을 확인할 수 있었다. 약 20% 남짓의 교사들은 대응 관계 탐구와 관련된 피상적인 장점을 기술하거나, 약 5~22%의 교사들은 대응 관계와 관련없는 부적절한 답변을 기술하였기 때문이다. 그 중 비연속적인 대응표의 활용에 대하여 부적절하게 답변한 경우가 약 22%로 가장 많았는데, 이를 통하여 일부 교사들은 두 양을 비연속적으로 탐색해 보는 것의 의미와 그 필요성을 이해하지 못한다는 것을 알 수 있었다. 그 외에 곱셈 관계와 덧셈 관계를 일반화할 때에는 작은 수에 대한 대응값을 구하는 활동만으로도 충분하다고 생각하거나, 기하 패턴을 다룰 때에는 위치 번호 카드를 활용하는 것보다 블록의 수의 변화만을 재귀적으로 탐색하는 것이 더 나은 지도 방안이라고 생각하는 교사들도 있었다.

하지만 함수적 사고는 두 양 사이의 공변을 다룬다는 점에서 교사는 학생이 두 양을 대응적으로 탐색할 수 있도록 지도해야 한다(Blanton et al., 2011). 이러한 측면에서 한 양의 변화만을 기록하는 대응표보다 비연속적이거나 비순차적인 대응표를 사용하는 것이 두 양 사이의 대응 관계를 파악하는 데 도움이 된다(방정숙 외, 2017). 그리고 교사는 학생이 대응 관계를 일반화하고 이를 기호를 사용하여 나타내는 과정에서 겪는 어려움 등에 대하여 충분히 이해할 필요가 있다. 이에 초등학교에서 함수적 사고의 지도가 폭넓게 구현되기 위해서는 무엇보다 초등학교 교사들에게 함수적 사고의 중요성과 함수적 사고에서 강조되는 주요 아이디어에 대하여 교수 자료나 연수 등을 통하여 적극적으로 안내할 필요가 있다. 더불어 함수적 사고를 지도하는 것은 학생에게 더 어려운 내용을 지도하는 것이 아니

라, 학생이 대응 관계에 대하여 수학적으로 더욱 의미 있게 사고할 수 있도록 지도하는 방안이라는 인식이 확산되어야 할 것이다.

마지막으로, 본 연구에서 개발한 검사 도구를 활용하여 함수적 사고를 지도하기 위한 교사 지식의 다양한 측면을 확인할 수 있었다. 먼저 과제의 분석 및 개발에 대한 지식을 통하여 일부 교사들은 수학 내용에 대한 지식과 교수학적 내용 지식이 불일치한다는 것을 확인하였다. 구체적으로 교사들의 약 68%는 y=2x+2 관계를 서로 다른 두 가지의 수식으로 일반화할 수 있었지만 그와 동일한 대응 관계의 과제를 개발한 교사들은 약 47%에 그친 것을 확인하였기 때문이다. 그리고 수업 전략에 대한 지식을 통하여 교사의 함수적 사고에 대한 이해 정도, 학생에 대한 지식, 교수 전략에 대한 지식을 통합적으로 살펴볼 수 있었다. 예를 들어, 교사는 수업 전략의 장점을 기술하는 문항에서 함수적 사고의 지도에 관한 주요 아이디어를 어떻게 이해하고 있는지 뿐 아니라 활동에 대한 학생의 반응, 교수 전략을 활용할 때의 효과 등을 함께 기술하였기 때문이다. 이와 같은 결과는 교사가 수학 수업에서 활용하는 지식은 교사 지식의 여러 측면이 복합적으로 영향을 미친다는 점을 반증한다(정유경, 방정숙, 2015). 그리고 본 논문에서 개발한 문항이 그러한 지식의 복합적인 측면을 평가할 수 있다는 가능성을 보여주었다.

초등학생의 함수적 사고를 신장할 수 있는 수학 수업을 구현하기 위해서는 무엇보다 체계적인 교사 교육 프로그램이 필요하다. 본 연구는 그 과정의 일환으로 초등학교 교사의 지식을 살펴보는 데 초점을 두었다. 비록 본 연구의 대상이 결과를 일반화하는 데 무리가 있으나, 우리나라의 상황에 적합한 교사 교육의 방안을 모색하는 데 기초적인 정보로 활용될 수 있기를 바란다. 나아가 본 연구에서 개발한 검사 도구가 함수적 사고를 지도하기 위한 교사의 지식을 더욱 체계적으로 측정할 수 있도록 후속 연구를 통해 수정・보완되기를 기대한다.

참 고 문 헌

교육부(2014a). **수학 4-1**. 서울: 천재교육.

교육부(2014b). **수학 4-2**. 서울: 천재교육.

교육부(2015a). **수학 6-2**. 서울: 천재교육.

교육부(2015b). **수학과 교육과정**. 교육부 고시 제 2015-74호.

권성룡(2007). 초등 수학 교과서의 규칙성과 함수 영역의 활동 고찰. **초등수학교육, 10**(2), 111-123.

김정원 (2014). **초등학교 학생들의 함수적 사고의 특징 및 지도 방향 탐색**. 한국교원대학교 대학원 박사학위 논문.

김정원(2017). 초등학생들은 표를 어떻게 이해할까?: 함수적 사고의 관점에서. **초등수학교육학회, 20**(1), 53-68.

방정숙(2010). 교실친화적 교사 양성을 위한 초등 수학과 수업 평가 기준. 한국교원대학교 교육연구원(편집), **교실친화적 교육실습 프로그램 개발**: **초등학교**(pp. 140-162).

방정숙, 선우진(2016). 초등학생의 함수적 사고 신장을 위한 기하 패턴 지도 사례의 분석. **수학교육학연구, 26**(4), 769-789.

방정숙, 선우진, 김은경(2017). ‘규칙과 대응’에 대한 2007 개정 및 2009 개정 초등학교 수학 교과서 분석. **학교수학 19**(1), 117-136.

전미현, 김구연(2015). 예비교사들의 수학교수지식(MKT) 측정 및 분석 연구. **수학교육학연구, 25**(4), 691-715.

정유경, 방정숙(2015). 수학을 가르치는 데 발현되는 교사 지식에 관한 선행연구 고찰. **수학교육학연구, 25**(4), 617-630.

정호정, 최창우(2014). 초등학교 교사의 등호 개념에 관한 지식분석 사례 연구. **한국초등수학교육학회지, 18**(1), 211-236.

최지영, 방정숙(2012). 초등학교 2, 4, 6학년 학생들의 함수적 관계 이해 실태 조사. **학교수학, 14**(3), 275-296.

Ball, D., Thames. M., & Phelps. G. (2008). Content knowledge for teaching: what makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389-407.

Beatty, R. (2010). Supporting algebraic thinking: Prioritizing visual representations. *Ontario Association for Mathematics Education Gazette, 49*(2), 28-34.

Billings, E. (2008). Exploring generalization through pictorial growth patterns. In C. E. Greenes, & R. Rubenstein (Eds.), *Algebra and algebraic thinking in school mathematics* (70th yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics, pp. 279-293). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Blanton, M., Brizuela, B. M., Sawrey, K., & Newman-Owens, A. (2015). A learning trajectory in six-year-olds’ thinking about generalizing algebraic relationships in functions. *Journal for Research in Mathematics Education, 46*(5), 511-558.

Blanton, M., Levi, L., Crites, T., & Dougherty, B. (2011). Developing essential understanding of algebraic thinking for teaching mathematics in grades 3-5. In B. J. Dougherty, & R. M. Zbiek (Eds.), *Essential understandings series*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Carraher, D. W. & Schliemann, A. D. (2015). Powerful ideas in elementary school mathematics. In L. D. English & D. Kirshner (Eds.), *Handbook of international research in mathematics education* (pp. 191-218). New York: Routledge.

Ferrara, F., & Sinclair, N. (2016). An early algebra approach to pattern generalisation: Actualising the virtual through words, gestures and toilet paper. *Educational Studies in Mathematics, 92*(1), 1-19.

Kieran, C., Pang, J., Schifter, D., & Ng, S. F. (2016). *Early algebra: Research into its nature, its learning, its teaching*. New York: Springer.

McCrory, R., Floden, R., Ferrini-Mundy, J., Reckase, M. D., & Senk, S. L. (2012). Knowledge of Algebra for Teaching: A Framework of Knowledge and Practices. *Journal for Research in Mathematics Education, 43*(5), 584-613.

Moss, J., & McNab, S. L. (2011). An approach to geometric and numeric patterning that fosters second grade students' reasoning and generalizing about functions and co-variation. In J. Cai, & E. Knuth (Eds.), *Early algebraization* (pp. 277-301). New York: Springer.

Radford, L. (2010). Layers of generality and types of generalization in pattern activities. *Pentose Nucleic Acid (PNA), 4*(2), 37-62.

Rivera, F. (2013). *Teaching and learning patterns in school mathematics: Psychological and pedagogical considerations*. New York: Springer.

Warren, E., & Cooper, T. J. (2008). Patterns that support early algebraic thinking in the elementary school. In C. E. Greenes, & R. Rubenstein (Eds.), *Algebra and algebraic thinking in school mathematics* (70th Year book of the National Council of Teachers of Mathematics, pp. 113-126). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Wilkie, K. J., & Clarke, D. (2015). Pathways to professional growth: Investigating upper primary school teachers' perspectives on learning to teach algebra. *Australian Journal of Teacher Education, 40*(4), 87-118.

Wilkie, K. J. (2014) Upper primary school teachers' mathematical knowledge for teaching functional thinking in algebra. *Journal of Mathematics Teacher Education, 17*(5), 397-428.

<Abstract>

An Analysis of Elementary School Teachers' Knowledge of Functional Thinking for Teaching: Focused on Mathematical Tasks and Instructional Strategies

Pang, JeongSuk[4]; & Sunwoo, Jin[5]

Despite the significance of functional thinking at the elementary school level there has been lack of research on teachers who play a major role in making students be engaged in functional thinking. This study surveyed 119 elementary school teachers to investigate their knowledge of functional thinking for teaching. A written assessment for this study was developed with a focus on the knowledge of mathematical tasks and instructional strategies to teach functional thinking. The results of this study showed that many teachers were able to design tasks corresponding to both the additive relationship and the multiplicative relationship, and to justify some strategies to promote functional thinking. However, some teachers had lack of understanding with regard to the core ideas of functional thinking. Based on these results this study is expected to suggest implications on what aspects of knowledge are further needed for elementary school teachers to promote students' functional thinking.

Key words: functional thinking, primary school teachers' knowledge, mathematical task, instructional strategy

논문접수: 2017. 04. 14
논문심사: 2017. 05. 05
게재확정: 2017. 05. 22

4) jeongsuk@knue.ac.kr
5) camy17@naver.com