대한수학교육학회지 수학교육학연구 제 27 권 제 4 호
Journal of Educational Research in Mathematics
Vol. 27, No. 4, 833 ~ 855. Nov 2017

라디안 개념의 역사적 분석과 수학적 분석

유 재 근* · 이 경 화**

본 연구는 삼각함수 각의 크기를 표현하기 위해 라디안 단위를 새로 도입하는 이유로서 호의 길이를 이용한 각의 측도라는 호도법의 의미와, 삼각함수의 정의역이 일반각을 나타내는 실수로 확장된 이유를 재조명하고자 한다. 이를 위해 라디안 개념의 다각적인 교수학적 분석을 하고자, 역사적, 수학적, 응용수학적 분석을 수행하였다. 이를 통해 첫째, 호도법은 각도에 내재된 본질이고, 라디안은 원주율(π)과 밀접한 이론적이고 절대적인 단위이며, 삼각함수를 실함수로 함을 밝혔다. 둘째, 라디안은 동심원에서 비와 비례 관계의 공변성을 거쳐 불변성을 인식하도록 할 것, 라디안으로 표현한 코사인과 사인의 직교성이 임의의 함수의 급수 표현을 가능하게 함, 라디안은 호의 길이를 반지름으로 측도하는 가장 단순화한 표준임을 인식하도록 할 것, 분할 전략을 통해 육십분법과의 연결성을 찾을 수 있음을 밝혔다. 셋째, 각과 각도의 구별로, 라디안 단위의 생략 여부에 대한 정당화와, 호와 반지름 사이의 곱셈 관계 전략이 필요함을 밝혔다. 이로써 도출한 교수학적 시사점은 라디안 개념의 유용성과 가치를 드러내고, 호도법의 실질적인 지도에 기여할 수 있다.

Ⅰ. 서론

학교수학에서 각의 크기를 나타내는 단위에는 도($^\circ$)와 라디안(rad)이 있다. Whitehead(2009: 167)는 학교수학에서 호도법의 원호의 개념이 원을 다루는 사소한 일부 내용인 듯 소홀히 취급되는데, 이는 수학적 이유에서건 명확한 설명을 위해서건 바람직하지 못하다고 하였다. 삼각형이 다각형의 기본이듯이, 원의 호가 전체 원의 근본 위치라 강조한 것이다. 각의 크기를 호의 길이에 의해 정의하는 것은 '본질적인' 수학적 근거가 있음을 알 수 있다. Toeplitz(1963: 114)도 Napier의 상용로그 10의 밑과 자연로그 e의 밑에 대한 상황에 비유하면서, 육십분법은 수치 계산의 실용적 목적에, 호도법은 수학의 이론적 목적에 적절하다고 하였다. 호도법은 육십분법의 또 다른 대안적인 표기 정도로만 보아서는 안 된다.

그러나 학교수학에서 라디안은 육십분법과의 변환공식 숙달에 치우쳐 있다(Moore, 2013). 그보다 더 큰 문제는 학생들에게 라디안 척도의 중요성을 납득시키는 방법을 아직도 찾지 못했다는 것이다. 학생들은 라디안 이전에, 육십분법의 실용적 편의성에 충분히 만족해 왔다. 학생들에게 각도기, 시계, 나침반, 지도 방위 등 육십분법은 일상생활에 녹아 있는 친숙한 것이다. 반면, 호도법은

$$\theta = \frac{l}{r} = \frac{(\text{호의 길이})}{(\text{반지름의 길이})}$$

* 서울대학교 대학원, kuki122@chol.com (제1 저자)
** 서울대학교, khmath@snu.ac.kr (교신저자)

로 계산하는 불편하고도 낯설고 생소한 각의 척도이다. 그런데 지금까지의 주된 설명은, 라디안을 각도의 새로운 단위로 도입하는 이유로써 미적분학의 공식을 단순화한 점, 단위를 생략하여 각이 실수가 되어야 삼각함수는 실함수를 정의역으로 갖도록 전개가 가능하다는 점 정도이다. 그러나 이러한 설명은 학생들에게 삼각함수 이후부터 각은 무조건 라디안이라는 강요일 뿐이었다. 그 결과 학생들은 각도를 실수로 표현하는 라디안의 가치를 인식한다기보다, 육십분법과의 변환 알고리즘을 억지로 따르고 마는 결과를 초래한 것으로 판단된다.

지금까지 국내에서 이루어진 라디안 관련 연구는 다음과 같다. 강향임, 최은아(2015: 310-311)는 라디안의 개념과 속성을 중심으로 예비교사와 교사들의 내용지식을 조사하고, 라디안 개념의 본질에 대해 연구자들마다 서로 다른 관점을 갖는다고 분석하였다. 남진영, 임재훈(2008)은 라디안이 각의 크기이자 동질양의 비라는 실수의 이중적 개념을 지녔다고 하였다. 반면에, 김완재(2009)는 라디안이 각의 크기로 이해되어야 한다고 반박하였다. 강미광(2011)은 도형인 각과 실수 표현인 각의 측도(angular measure, 이하 각도)를 혼용해온 학교수학의 풍토를 지적하면서, 각과 길이로 차원을 달리하는 라디안의 속성에, 보다 수학적으로 접근하였다. 즉, 각과 길이는 같거나 같아지는 결과인 것이 아니라, 둘 사이에는 각에서 호로, 다시 수직선 구간으로 가는 일대일 대응이 존재하므로, 호도법이 수학적으로 정당한 측도함수임을 증명한 것이다. 또한 라디안의 본질은 반지름의 길이를 단위로 하여 호의 길이를 측정하는 방법이며 이를 각의 크기를 나타내는 방법으로 차용한 것이고, 이로써 각에 대한 삼각함수를 실수에 관한 함수로 정당화하였다. 그러나 라디안의 수학적인 의미와 본질에서 한 발 더 나아가 다각도의 교수학적인 분석을 시도한 연구는 찾아보기 어렵다. 본고는 교수학적 분석의 일부분이기는 하나, 역사적, 수학적, 물리학적 분석을 다각도로 시도하면서, 보다 상위 수학의 관점에서 호도법을 사용해야 하는 이유와 라디안 단위명의 생략을 재조명하고자 한다.

선행연구들은 한편으로, 라디안의 의미와 유용성에 대한 이해가 부족함을 밝혀 왔다. 우리나라의 학생들은 육십분법과 호도법 사이의 기계적인 변환 계산은 잘 수행하지만 라디안을 잘못 이해한 결과, 삼각함수를 어려워한다는 것이다(송은영, 2008). 미국의 대학생들도(Moore, 2013) 각의 측정을 직각처럼 기하 대상이나, 보각처럼 계산($180-x$)에 의존하는 경향을 보였다. 호를 측정 가능한 속성으로 인식하지 못하고, 각에 이름을 붙이는 도구로만 생각했다. $\frac{(\text{호의 길이})}{(\text{원주})}$의 값을 원주와 호의 길이 사이의 곱셈 관계로써 비례적인 비교로 반영하지 못하며, 간단한 수로만 다루었다. 다시 말해 측정량 대신에, 계산수로 간주한 것이다. 우리나라의 예비교사들은 라디안의 정의, 라디안의 실수 속성에 대한 이해, 삼각함수가 왜 실함수로 정의되는지, 그리고 호도법의 필요성과 유용성을 매우 제한적으로 인식하고 있었다(강향임, 최은아, 2015). 터키의 예비교사와 현직교사들도(Akkoc, 2008; Topçu, Kertil, Akkoc, Kamil & Osman, 2006) 라디안의 이해가 고착되어 있었다. 라디안으로 주어진 각을, 의미를 찾기 쉬운 도(°)로 바꾸어 생각하는 경향이 있었다. 라디안은 항상 π로 표현된다고 믿거나, $\sin 30$에서 30을 당연히 도(°)로 여기는 오류도 보였다(Akkoc, 2008). 그러나 라디안의 의미와 유용성을 이해하지 못한 원인에 대한 연구는 매우 부족하다.

다른 한편으로는 라디안의 학습-지도 과정을 개선하는 방법에 대한 연구가 보고되어 왔다. 호의 길이에 의해 각의 크기를 잰다는 발상이 정착되도록 원 위에 감긴 선을 직선으로 펼쳐보는

구체적인 활동을 통해 호도법을 도입하도록 제안한 방법(강미광, 2011), 수직선으로 단위원을 감싸도록(wrapping) 제안한 방법(Akkoc, 2008), 테크놀로지를 이용하여 원주에 반지름의 길이와 같은 호의 길이가 몇 번 놓이는지를 탐구한 방법(Klein & Hamilton, 1997), 테크놀로지를 활용하여 각도의 비례관계를 탐구하고 호의 길이, 원주, 반지름의 길이 사이의 양적 관계에 주목하는 양적 추론의 역할을 강조한 방법(Moore, 2013) 등이 있다. 그러나 이들 연구에서 제안한 방법이 라디안 단위를 도입할 필요성과 중요성을 학습하는 데 얼마나 효과적인가에 대해서는 많은 후속연구가 필요한 실정이다.

이에 본고에서는 라디안 개념에 대한 다각적인 이론적 논의를 바탕으로, 삼각함수를 도입할 때 각의 크기를 라디안 척도로 표현해야 하는 교수학적 근거를 찾고자 한다. 이는 라디안 단위의 의미와 본질, 유용성과 중요성을 종합적으로 그리고 체계적으로 드러내는 데 기여할 것으로 기대한다.

II. 본론

이 장에서는 역사적, 수학적, 응용수학적 분석이라는 세 각도의 고찰을 통하여 라디안의 교수학적 분석을 시도한다.

1. 역사적 분석

각의 크기를 나타내는 방법으로 라디안이 도($^\circ$)에 비해 더 적절한 이유로, 기존의 답은 라디안이 좀 더 편리한 단위라는 장점을 내세웠다. 이를테면, 미적분학에서 라디안 단위계가 공식을 단순화한다는 점(Sherwood & Taylor, 1942: 26-27), 90°의 각은 1.57라디안의 크기와 똑같기 때문에 계산 수치가 간단해진다는 점(강향임, 최은아, 2015: 316)이었다. 이외에도 라디안은 각도를 실수로 표현한다는 점, $\frac{l}{r}$이라는 $\frac{(\text{길이})}{(\text{길이})}$의 비(ratio)에서 단위도 상쇄되기 때문에 라디안은 생략할 수 있으며 실함수로서 삼각함수를 보장한다는 점(남진영, 임재훈, 2008)이었다. 이 절에서는 역사적 맥락과 관련 선행연구의 분석을 통해 보다 개선된 답을 찾고자 한다.

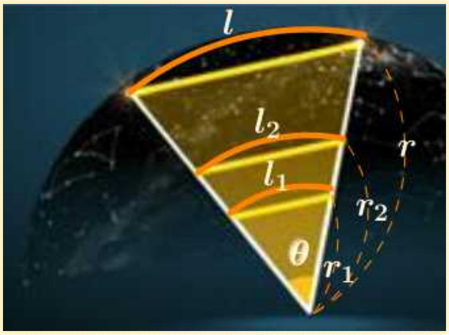
라디안을 나타내는 영어, radian은 radial-angle (반지름- 각)의 축약형이다. 각도로서 육십분법은 고대 바빌로니아인들로부터 유래되었다. 반면 라디안이라는 새로운 각도 체계의 등장 배경은, 근세에 와서야 각속도를 논하면서 물리학의 필요에 의해 도입되었다. 영국에서 수학자 Cotes[1)]는 1714년에 각의 크기에 대한 라디안 척도를 발명하였다(싱가포르 교과서 New Mathematics Counts for Secondary 4, 2015: 144). 물리학자 Thomson은 1871년에 형식적인 이름으로 정의했으며 1873년에 그의 대학 기말시험 출제에 공식적으로 사용하였다. Cotes는 '각이 도대체 무엇인가'의 질문에 대해, '각의 척도를 무엇으로 해야 하는가'의 문제를 제기하였다. 각의 척도를 '원의 크기에 의존하지 않는' 각의 두 변이 이루는 호의 길이로 제안하면서, '반지름의 길이에 대한 호의 길이의 비'가 가능함을 알았다. 이는 각의 동적인 관념이며, Euclid 원론에서 '두 직선의 기운 정도' 라고 정의한 정적인 관념과 오랫동안 공존하였다(Crossfield et al., 2009: 13-14). 이처럼 역사에는 각의 의미와, 각의 크기를 표현하는 방법에 대한 두 가지 문제가 동시에 제기되었다.

바빌로니아인들은 육십분법 체계로 각의 기본

1) Roger Cotes(1682-1716)는 유명한 Newton의 제자이며, 1714년에 Euler의 등식 $\exp(i\pi)=-1$을 처음 발견하였다. Euler는 1748년에 이 공식을 재발견한 것이다(https://ko.wikipedia.org/wiki/로저_코츠).

단위였던 직각 R을 잿다. 즉, R을 60, 60^2, $\cdots$로 분할하였다. 십진법이었다면, $0.1R$, $0.01R$ 등을 하위 단위로 사용했을 것이다. 이후 사람들은 한편으로 바빌로니아인의 분할을 채용하면서, 다른 한편으로 육십분법을 십진법 체계로 바꾸었다. 이로 인해 천문학자들은 번거로운 부조화를 겪었으나, 개선하지 못하였다. 육십분법 체계에서 만들었던 삼각함수표와 끝없는 계산오차를 감당하지 못하였기 때문이다(Toeplitz, 2006: 177-178).

Ptolemy는 현의 표를 만들 때, 각도가 호의 길이를 이용하는 과정임을 알았다. 즉, 각도는 천체거리를 구하기 위해 호의 길이와 반지름의 길이를 이용한 닮음을 활용하였다. 호도법의 발상이 이미 있었다는 것은 중요하다(유재근, 2014). Matos(1990)와 Bressoud(2010)의 역사적 분석에서도 각도의 발달은 호의 길이를 측정하는 문맥에서 발생하였다(Moore, 2013: 227에서 재인용). 따라서 각도에 호의 길이를 이용하는 맥락은 핵심적인 아이디어인 것이다. 본 연구에서 본질은 어떤 개념을 이해하는 현상 이면에 있는 핵심 개념, 수학 원리, 일반화된 지식, 기능의 조화라 규정한다. 이를테면, 각도의 역사적 본질은 [그림 II-1]과 같이 정한다.



[그림 II-1] 각도의 역사적 본질
(EBSMath 이미지 편집)

천문학 맥락에서 두 별 사이의 거리를 재기 위해 각도를 측정하게 된 핵심 개념으로, 천문학자들이 두 별 사이의 거리는 관측자에 따라 상대적인 길이로써 l_1, l_2, l로 변함을 오류라 생각하고, 닮음을 이용하여 각도의 일정함

$$\frac{l_1}{r_1}=\frac{l_2}{r_2}=\frac{l}{r}=\theta$$

을 활용하게 된 것을 의미한다.

이는 삼각측량법을 응용해서 지구로부터 멀리 떨어진 별까지의 거리를 재는 데에도 사용되었다. 본질의 상반된 표현은 피상적인 이해인 것이다. 각도가 역사적으로 발생하게 된 배경과 근거를 이해하지 못하고 단순히 측정 가능하다면, 온전히 각도를 활용하기는 어려울 것이다. 바꾸어 말하면, 각도의 배경과 근거를 명확히 인식한다면 각도를 활용하는 데 큰 도움이 된다는 것이다. 이런 관점에서 호도법은 각도에 내재되어 있는 본질인데 반해, 학교수학에서 호도법이 육십분법의 대안적 표현인 양 소홀히 취급되는 것은 문제라 판단된다. 또한 과거 천문학자들이 각도를 호의 길이(l)로 서로 다르게 측정한 오류와 같이, 오늘날 학생들도 각도(θ)가 각의 변(r_1, r_2, r)에 의존한다는 오개념(Watson, 2009a: 94)을 갖는 것은 당연하다고 할 수 있다.

Euclid 원론을 해설한 Heath는, 각의 현대적 개념이 비율이며(1998: 42), 각의 본질이 회전과 밀접한 관계가 있다고 하였다(1998: 46). Clairaut (2005: 43)는 각의 크기를 원의 호에 의해 측정한다고 하면서 호도법의 이른 도입을 시사하고 있다. 각이 벌어진 정도는 그 각의 변이 자르는 호의 길이에 비례하기 때문이다. Euclid 원론과 같이, 각은 한 직선이 다른 직선에 대해 기울어진 것으로 정의하였으나(같은 책, 24), 각의 크기는 고정된 변에 대해 회전하는 호의 길이로 측정하였다. 이는 각도를 축을 기준으로 해서 잰 것을 의미한다. Whitehead도 각의 크기는 그 기원부터 원의 호에 의해 정의된 것이며, 각의 크

기를 정의하는 호의 개념을 강조하였다. 원의 전체에서 그 부분을 이루는 호의 관계는 가장 근본적인 것이다(2009: 167-168). 또한 호의 길이를 반지름으로 나눈 분수는 각의 크기를 나타내는 적절한 이론적 수단이라 하였다. 이 비율은 동심원의 닮음에 의해 길이의 단위나, 일정한 크기의 각을 잘라내는 방식과는 무관하기 때문이다(같은 책: 168). Freudenthal(1983: 360) 역시, 각도의 자연스런 단위는 원('full' angle)과 관련되며, 이는 가장 자연스러운 접근이나 친숙하다는 의미가 아니라 하였다.

그러므로 각도의 아이디어에 라디안 측도의 수학적 원리가 명시적으로 드러난다고 할 수 있다.

$$\theta = \frac{l}{r}$$

로 정한 라디안 각도는 원주 위의 호의 길이와 반지름의 길이가 동시에 변하더라도 일정하게 유지되는 비를 말한다. 또한 육십분법이 지금까지 학생들에게 친숙했더라도, 호도법은 각을 잰다는 본질이 내재되어 있다는 의미에서 자연스럽다는 장점을 갖는 것이다.

Moore(2013)는 각도의 의미를 원의 호를 반지름으로 분할하는 측정활동에서 찾았다. 각도에는 호의 길이를 반지름의 길이에 대한 곱으로 측정한다는 의미를 부여할 수 있다. 라디안의 장점은, 라디안의 비를 표현할 때 호의 길이에 대한 양적 관계를 보다 직관적이고 명시적으로 파악하기 쉽다는 점을 들었다. 양적인 추론에 대한 이론, 삼각법과 각도에 관한 학습-지도 연구, 각도에 관한 역사를 바탕으로, 단위와 상관없이 호의 길이를 측정하는 절차를 통해 각도를 양화하는 것이, 각도의 일관적인 이해를 뒷받침할 수 있으리라는 시사점을 얻었다. 이처럼 각도를 동일한 양에 대해 단위변환과 상관없이 호에 반지름이 얼마나 들어있는지 측정하는 양적인 추론이라 한 것은, 호도법의 비례관계가 각도의 핵심 개념이라는 것이다. 그러므로 각도에 호도법의 의미가 내재되어 있음을 알 수 있다.

삼각함수는 Ptolemy의 현 표, 인도의 반현 표, 근세의 직각삼각형과 반현 표를 거쳐, Descartes의 해석기하학 이후에 현은 각의 함수로 발달하였다. Newton, Leibniz의 미분적분학 발달 이후에는 원함수, 주기함수, 해석함수가 호도법으로 표현된 각의 함수가 되면서, 라디안은 이론적으로 확고해졌다. 이처럼 물리학자가 제안한 호도법의 아이디어는 수학자들에게도 승인된 것이다.

수학자들은 정당화가 확보되지 못한 라디안의 아이디어를 일단 수용하였으나, 제대로 모르고 쓴 것에 비해 이후의 편리함은 극도로 컸다. 이를테면, 삼각함수의 x, y축 척도가 통일되어 천문학자들의 귀찮음을 해소할 수 있었다. 라디안의 위치는 이론적으로 육십분법을 능가한 것임을 알았으나, '왜 각의 척도가 라디안이어야 하는지' 명쾌하게 밝히지는 못하였다.

그러나 처음 'radian measure'를 기술했던 당시의 문헌에는 π값이 나타난다는 의미에서 'π-measure'나 원이나 호를 뜻하는 'circular-, arcual-'과 같은 용어가 함께 등장하였다고 한다(강향임, 최은아, 2015: 310). 이는 단편적 기록이더라도, 라디안이 원주율(π)이나 원의 속성을 따른 이론적이고 절대적인 단위임을 의미한다. 원의 속성을 갖는 호도법은 실용적인 육십분법에 비해 이론적인 수학의 발전에 적합했던 것이다.

각도의 호도법 표현은 수학적이어서 편리하다. 각도를 라디안으로 표현한 비($\frac{l}{r}$)의 관계는 임의의 원에서 원주의 길이 또는 호의 길이로 나타낼 수 있다. 원주 L, 반지름 r이라 하면,

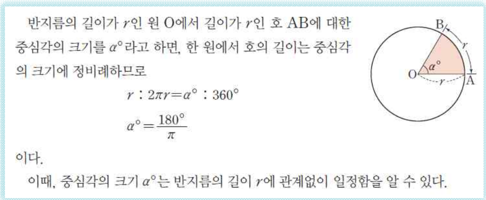
$$L = 2\pi r$$

원주율은 지름과 원주의 길이의 비이므로,

$$(\text{원주율}) = \frac{2\pi r}{2r} = \pi$$

이다.

[그림 II-2]는 교과서에서 1라디안에 대한 비례관계를 설명한 것이다.


반지름의 길이가 r인 원 O에서 길이가 r인 호 AB에 대한 중심각의 크기를 $\alpha°$라고 하면, 한 원에서 호의 길이는 중심각의 크기에 정비례하므로

$$r : 2\pi r = \alpha° : 360°$$

$$\alpha° = \frac{180°}{\pi}$$

이다.

이때, 중심각의 크기 $\alpha°$는 반지름의 길이 r에 관계없이 일정함을 알 수 있다.

[그림 II-2] 1라디안의 비례관계
(이준열 외, 2014: 59)

호의 길이는 중심각의 크기에 비례하므로, 일반적으로 θ라디안에 대하여

$l = r\theta$, 즉 $\theta = \dfrac{l}{r}$

원주의 길이도 중심각의 크기에 비례하므로

$$\frac{2\pi r}{l} = \frac{2\pi r}{r\theta} = \frac{2\pi}{\theta}$$

따라서 $360°$ 만큼 회전한 각도를 라디안으로 표현하면,

$\dfrac{2\pi r}{r} = 2\pi$ 또는

$360° = 2\pi$라디안 ⋯①

으로 놓을 수 있다. 육십분법에서 원의 전체를 360으로 둔 것은 임의성을 지닌다. 즉, 인간이 정한 경험적인 수치를 기준으로 비례하는 분할을 통해 $1°$를 찾았다. 그에 반해, 호도법에서 2π는 원주율(π)이라는 원의 속성에 따른 필연적인 이론적 수이다. Freudenthal(1983: 367)은 육십분법을 규약(convention) 그리고 호도법을 필연성(necessity)이라 구분한다. 남진영, 임재훈(2008)도 라디안이 본질적이고 절대적인 척도인데 반해, 육십분법은 공전 주기로 360을 논리적 근거 없이 택한 임의적인 성격을 지니고 있다고 설명하였다. 그러므로 ①식은 상대적인(relative) 360과 절대적인(absolute) 2π를 서로 같다(=)고 '약속으로 정한(defined by) 등식'임을 인식해야 한다.

각도의 호도법 표현은 삼각함수를 다루는 정의역과 치역의 공통단위가 되었다는 편리한 이유가 있다. Thompson, Carlson, Silverman(2007)은 호의 길이를 반지름의 길이에 대한 곱으로 측정하는 아이디어가, 각도의 단위와 삼각함수의 단위를 같게 한다는 의미가 있다고 하였다. 그 결과 삼각함수의 합성이 가능해진다는 것이다:

$\sin(\sin x)$

결국 삼각함수를 다룰 때 라디안은 함숫값과 공통규격을 맞춘다는 의미에서 매우 중요하다. 실함수로서 삼각함수는 주기현상을 표현하는 유용한 도구이며, 응용에서 움직임의 위치 변화를 정하는 방법은 직교좌표보다 거리와 삼각함수로 정의하는 극좌표가 유용하기 때문이다.

라디안은 각도를 실수화한 맥락이 보다 뚜렷하다. 이러한 라디안을 단순히 계산이나 측정상 편리한 각도의 단위로만 보아서는 안 된다. 각도 측정을 호의 측도로 해석하는 것은(최은아, 강향임, 2015), 각도의 발생 아이디어인 것이다. 원주율(π)과 밀접한 라디안은 수학적이어서 이론수학에 적합한 것이며, 삼각함수를 실함수로 한 유용성의 의미가 크다.

역사적 분석 결과, 호도법은 각도에 내재된 본질이라는 점, 임의로 정한 육십분법에 반해 호도법은 원주율(π)과 같은 원의 속성을 이용한 점, 삼각함수는 실함수가 되었다는 의의가 있다는 점을 알았다. 다음 절에서는 미적분 공식의 단순화와 관련하여, 라디안 의미에 대한 수학적 본질을 찾고자 한다.

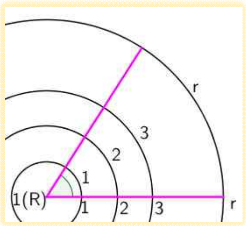
2. 수학적 분석

가. 비와 비례관계: 공변성

앞 절에 따르면, 라디안은 비($\dfrac{l}{r}$)로 표현한 각의 크기이다. 단위원을 사용하여 삼각함수의 정의

역을 확장하는 문제는, 직각삼각형의 변들의 비로 도입하는 것이 너무도 지나치게 단순하여 오히려 껄끄럽다고 여겨 왔다. 이러한 직각삼각형의 삼각비와 단위원의 삼각함수에서 연결성을 인식론적 장애라 하였다(유재근, 2014). 라디안의 도입을 주장했던 물리학자에게는 타당한 직관이 있었을 것이나, 라디안의 개념은 여전히 명쾌하지 못하다. 그동안 육십분법을 사용해도 충분히 편리했던 학생들을 설득시킬만한 논리를 세우려면, 라디안의 비와 비례관계로서의 본질을 밝힐 필요가 있다.

원주의 길이와 그 기본 요소인 호의 길이는 반지름의 길이에 비례한다. 원주와 호는 원주율(π)과 곱셈 관계에 있기 때문이다. 반지름의 길이와 비례한다는 의미는, 각도가 같더라도 반지름이 커지면 호의 길이도 길어진다는 것이다. [그림 II-3]과 같은 동심원에서 반지름의 길이가 2, 3,$\cdots$, r배 커지면 호의 길이도 2, 3,$\cdots$, r배로 커짐을 볼 수 있다.



[그림 II-3]

Watson(2008: 149)은 삼각법의 과제를 3단계로 분석하였다. 학교수학과 비교하면, 직각삼각형의 삼각비, 중간 단계, 원함수의 삼각함수에 해당된다고 할 수 있다. 첫째, 삼각형류를 탐구하는 것이다. 어떤 특정한 삼각형은 닮은 삼각형류에 속한다. 이는 유리수류에서 $\frac{6}{8}$이 $\left\{\frac{3}{4}\right\}$에 속하는 경우처럼, 분수와 유리수류의 관계와 유사하다. 닮은 삼각형류에서 만족하는 관계는 닮은 도형의 성질이다. 모양(shape)과 구조가 같고 크기(size)만 다름, 즉 대응하는 각이 같고 변의 비가 일정하다는 성질이 도출된다.

둘째, 특정한 길이가 아니라, 도형의 주요소로서의 비를 가진 도형을 탐구하는 것이다. $A:B$와 $a:b$가 같다는 관계에는, [표 II-1]과 같이 비(ratio)와 비례관계(proportion)의 두 가지 의미가 있다. 비는 그리는 척도에 의해서만 구별되는 각각의 삼각형에서 변들 사이의 관계인 반면에, 비례관계는 닮은 삼각형들 사이의 관계이다.

<표 II-1> (Watson, 2008: 149)

		ratio(비) 관계	
		$\Leftrightarrow$	
proportional (비례) 관계	$\Updownarrow$	큰 삼각형의 변 A	큰 삼각형의 변 B
		작은 삼각형의 변 a	작은 삼각형의 변 b

둘 사이에는 미묘한 차이가 있다. 비례관계는 모양이 확대 축소되는 관계인 반면에, 비는 구조가 같은 관계인 것이다. 다시 말해, 비례관계는 길이가 함께 변화하는 것인 반면에, 비는 일정한 비의 값이 유지되는 것이다. 이를 비와 비례관계의 본질로서 내적인 비의 보존과 외적인 비의 일정성(우정호, 2010: 395), 공변성(covariance)과 불변성(invariance)으로 구분한다. 라디안의 비($\frac{l}{r}$)에 대해, 비례관계의 공변성은 [그림 II-3]의 동심원에서 반지름 r이 커질 때 호의 길이 l도 동시에 커진다는 의미이다. 반면, 비의 불변성은 서로 다른 동심원의 부채꼴에서 각의 크기($\frac{l}{r}$라디안)가 일정하다는 의미이다. 교수학적으로는 자칫하면, 결과만 남기고, 과정은 간과되기 쉽다. 이러한 관점에서 라디안은 각의 크기를 비로 표현한 결과라 중시되지만, 반지름과 호의 길이의 변화는 비례관계의 공변성 과정이라 간과되기 쉽다.

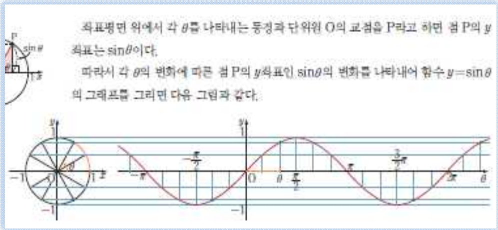
Jahnke와 Otte(1982)는 비와 비례관계를 함수와 변수로 일반화하였다. 비례관계에 의해 미지의 특정 길이를 구하는 것(measuring)을 변수로 본 반면, 불변의 비를 탐구하는 것을 함수로 보았다. 이를

테면, 함수는 [그림 II-3]의 동심원에서 동일한 (sameness) 비, 즉 라디안의 각도 표현을 가리킨다. 비는 일정한 비례상수(scaling), 예컨대 1라디안, 2라디안 등을 갖는 함수인 것이다. [그림 II-3]의 동심원에서 1라디안에 대한 변수는 부채꼴이 커질 때 호의 길이를 반지름의 길이와 같아지도록 각각 변화시키는 것인 반면, 1라디안에 대한 함수는 $l=1\cdot r$의 곱셈 관계에 있음을 깨닫는 것이다. 이때 선형 일차함수에서 기울기 1은 일정한 비례상수, 곧 라디안 각도(1)인 것이다.

Watson(2009a)은 각의 크기가 각의 변에 의존한다는 공통적인 오개념을 피하도록, 호의 길이는 반지름의 길이의 곱이므로 반지름과 함께 커진다는 공변성을 지도해야 한다고 하였다. 그러나 불변성의 규정은 어렵기 때문에, 동일성 감각을 표현하는 나누기(dividing)를 교수학적으로 고려해야 한다. 역사 발생적으로는 나누기보다 자연스러운 행동이 비의 관념이었다. 따라서 지도를 위해 교수학적으로 측정하기, 나누기가 있는 반면, 수학적으로 비교하기, 비의 불변성이 있음을 인식하고 선택해야 한다. 이를테면, 수학적 불변성을 경험적으로 발견할 수 있는지 질문함으로써, 학생들의 관심을 각도와 길이비로 유도할 수 있다.

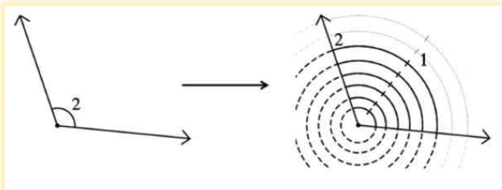
Watson(2008: 149)이 삼각법의 과제로써 마지막으로 제시한 것은 셋째, 삼각형의 성질을 벗어나, 각과 길이들의 관계에 놓인 사상(mappings)을 탐구하는 것이다. Jahnke와 Otte(1982)의 아이디어에 따르면, 변수에 의한 함수적 사고가 교수학적으로 필요하다고 할 수 있다. 따라서 비례관계의 공변성에 대한 변이 패턴을 유지시켜 가면서 비의 불변성을 파악하도록 가르쳐야 한다.

<표 II-1>은 비와 비례관계의 학습이 공변성의 과정을 거쳐 불변성의 인식으로 완성하는 절차라는 것으로 해석된다. 이를 토대로 하면, [그림 II-4]에서 교과서 서술방식은 단위원을 사용하여 삼각함수의 각(θ)을 단위원의 길이로 사상하는 것($\theta=l$)은 공변성을 생략하고 불변성을 '제시'하는 데 그친 것이라 볼 수 있다.



[그림 II-4] 이준열 외(2014: 67)

그러므로 학생들에게 'l은 r과 함께 커진다'는 공변성을 경험하는 과정을 학습하는 기회를 부여해야 한다. Moore(2013)도 [그림 II-5]와 같이 (2)라디안 각도를, 모든 원이 닮음인 상황으로 확장하여 단위원 외에도 여러 반지름을 갖는 동심원에서 동치류(eqivalence class)로 이해해야 한다고 주장하였다.



[그림 II-5] Moore(2013: 228)

게다가 삼각함수도 비와 비례관계의 공변성에 의해 재조명할 수 있다. 호도법을 호의 길이와 반지름의 길이의 양적 공변성으로 해석한 바, 삼각함수는 [그림 II-4]의 과정에서 각과 위치에 대한 양적 공변성 추론이 필요하다. 공변성은 두 양이 동시에 변하는 것이다. 일반적으로 추론은 수학적 사실을 추측하고 논리적으로 분석하고 정당화하며 그 과정을 반성하는 과정이다. 먼저, 단위원 위의 세 시 방향으로부터 출발하여 원주를 따라 반시계방향으로 회전하는 점 C를 생각한다. 그러

면 호의 길이와 높이는 모두 방향 있는 길이가 된다. 1사분면에서 높이는 증가하고, 같은 방법으로 2, 3사분면에서 높이는 감소한다. 마지막 4사분면에서 높이는 다시 증가한다. 호의 길이가 증가함에 따라 높이는 증가 또는 감소한다. 두 양은 방향 있는 공변성을 나타낸다. 같은 방식으로 변화율과 변화량을 추론하면, 사인함수의 그래프를 그릴 수 있다. 회전하는 1사분면 위의 변화와 나머지 사분면의 변화에서 공통점과 차이점을 분석하면, 두 양 사이의 공변하는 관계를 더 잘 이해할 수 있다. 또한 1회전 한 바퀴 전체를 도는 관계를 나타내는 데 유사한 추론을 할 수 있다.

이 절의 수학적 분석 결과, 단위원을 이용하여 삼각함수의 정의역을 일반각의 경우로 확장하는 문제는 비와 비례관계의 본질로서 공변성을 간과한 것이며, 라디안 각도 표현의 동치류를 나타내는 동심원은 공변성을 경험하는 적절한 문맥임을 알았다.

나. Fourier 급수: 직교성

18세기 수학자 Bernoulli(Daniel)와 Euler는 늘어나는 현의 진동운동 문제를 편미분방정식으로 표현하려 하였으나, ‘초등함수(elementary functions)’로는 그 답을 찾을 수 없음을 발견하였다. 이 문제는 사인과 코사인 함수의 무한급수를 도입하면서 해결되었다. 19세기 초 Fourier는 열 흐름에 관한 문제를 연구하면서 주기함수 무한급수의 결정이론을 개발하였다(Wrede & Spiegel, 2010: 349).

Fourier 급수는 주기함수를 코사인과 사인 항으로 표현하는 무한급수이다(Kreyszig, 2012: 4). 이에 대해 Whitehead는 다른 모든 주기함수들을 사인의 변형으로 보았다. 예컨대 코사인함수의 경우 사인함수와 근본적으로 다른 것이 없다. Whitehead의 설명은 다음과 같다:

$f(x)$가 주기 a인 주기함수라면, 그리고 $f(x)$가 특정한 조건들 즉 자연현상에 의해 제기되는 함수에서는 실제로 항상 전제가 되는 조건들을 충족시킨다면, 그때 $f(x)$는 다음 급수로 나타낼 수 있다:

$$c_0 + c_1 \sin\left(\frac{2\pi x}{a} + e_1\right) + c_2 \sin\left(\frac{4\pi x}{a} + e_2\right) + c_3 \sin\left(\frac{6\pi x}{a} + e_3\right) + \ldots$$

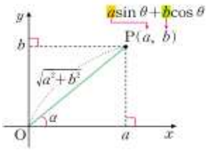
Whitehead의 설명은 주기함수에 대한 대부분의 추상 이론과 이를 물리학에 적용시킨 내용들이, Fourier 정리에 의해 운용된다는 것이다. 매일 반복되는 조수 현상, 바이올린 현이 진동하는 운동, 광파의 복사매질과 소리파의 공기매질이 진동하는 현상 등 대부분의 복잡한 주기현상은 단순한 사인함수의 합성으로 설명할 수 있다. 보다 많은 항들을 취함으로써 함숫값을 원하는 만큼 정밀하게 근접시킬 수 있으며, 이런 점진적 근사 과정은 무한급수론으로 이어진다. 어떤 주기함수를 일련의 사인함수의 합으로 나타내는 방식을 그 함수의 조화분석(harmonic analysis)이라 일컫는다. 이로써 수리물리학에서 상당한 비중을 차지하는 자연의 주기현상을 모두 다룰 일반적 방식을 보유하게 되었다(Whitehead, 2009: 174-177).

Fourier 급수의 가장 핵심적인 내용은 복잡한 파동을 $\sin$, $\cos$의 합 형태로 나타낼 수 있다는 것이다. 다양한 파형을 조화분석하면, $a\cos x + b\sin x$의 합성으로 해석할 수 있다. Fourier 해석은 비주기 현상에도 확대 적용한 것으로, 좌표계의 기저(basis)를 $\sin$, $\cos$으로 두었을 때, 임의의 함수를 근사시킬 수 있다는 의미이다. Fourier 급수의 이론은 복잡하나, 함수의 직교성에 의해 그 응용은 비교적 단순하다(Kreyszig, 2012; Stewart, 2016).

$a\sin\theta + b\cos\theta = \sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)$

단, $\cos\alpha = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$,

$\sin\alpha = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$



[그림 II-6] 직교 삼각함수의 합성
(Google 이미지; 우정호 외, 2014: 101)

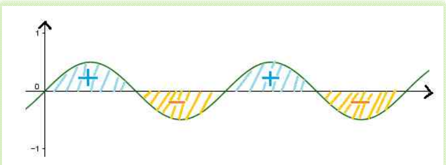
어떤 함수와 함수를 서로 곱하여 적분했을 때 값이 0이 나오면, 이 때 함수는 직교 관계라고 말한다(Newton Highlight 84, 2016: 124). 함수의 직교성(orthogonality)은 Fourier 급수를 쉽게 계산할 수 있도록 한다는 의미가 있다. 적분에 의한 직교성 정의는 정적분이 유사-내적(pseudo inner product)이기 때문이다(Newton Highlight 84, 2016: 126-129):

$$< f,g > = \int fg\,dx$$

코사인과 사인의 직교성은 형식적으로 가능한 것으로, 두 함수의 곱의 정적분이 0이 된다는 것이다. $\sin x$와 $\cos x$는 2π의 주기성이 있으므로, 길이가 2π인 구간에서 $\sin x \cdot \cos x$의 적분값은 0이 된다.

$$\int_0^{2\pi} \sin x \cos x\,dx = 0$$

$\sin x \cos x = \dfrac{1}{2}\sin 2x$이므로, 그래프는 [그림 II-7]과 같다. 이 그래프에서 마루와 골은 같은 크기의 넓이이지만 그 부호는 반대이므로, 적분값은 0이 된다.



[그림 II-7] (Shibuya, 2006: 152)

따라서 $\sin x$와 $\cos x$가 직교하고 있음을 직관적으로 쉽게 알 수 있다(Shibuya, 2006: 153). 증명은 피적분함수인 삼각함수 곱을 합으로 변환함으로써 가능하다. 이때 직교성은 x가 라디안이어야 성립한다. 만일 x가 도(°)라면, $x^\circ = \dfrac{\pi}{180}x(rad)$가 된다:

$$\int_{0^\circ}^{360^\circ} \sin x^\circ \cos x^\circ\,dx^\circ$$

$$= \int_0^{2\pi} \sin\frac{\pi}{180}x \cos\frac{\pi}{180}x\,\frac{\pi}{180}dx$$

「치환적분법에 의해

$d(\sin\dfrac{\pi}{180}x) = \cos\dfrac{\pi}{180}x\,\dfrac{\pi}{180}dx$이므로」

$$= \frac{1}{2}[(\sin\frac{\pi}{180}x)^2]_0^{2\pi}$$

$$= \frac{1}{2}(\sin\frac{\pi}{180}2\pi)^2 = \frac{1}{2}(\sin\frac{\pi^2}{90})^2$$

$$\neq 0$$

그러면 직교성이 성립하지 않음을 알 수 있다. 직교성을 이용할 수 없으면, Fourier 계수도 쉽게 구할 수 없는 것이다.

서로 주기가 다른 사인함수는 적분구간을 주기가 긴 쪽의 함수의 1주기만큼 계산하면 0이다. 이를테면,

$$\int_0^{2\pi} \sin x \sin 2x\,dx$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\{\cos 3x - \cos(-x)\}dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\{\cos(-x) - \cos 3x\}dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\{\cos x - \cos 3x\}dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\cos x\,dx - \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\cos 3x\,dx$$

$$= \frac{1}{2}[\sin x]_0^{2\pi} - \frac{1}{2}[\frac{1}{3}\sin 3x]_0^{2\pi}$$

$$= \frac{1}{2}(0-0) - \frac{1}{2}(0-0)$$

$= 0$

이다. 그러므로 주기가 다른 사인함수는 모두 직교하고 있다(Shibuya, 2006: 155). 마찬가지로, m과 n이 서로 다른 양의 정수일 때, $\cos mx$와 $\cos nx$도 직교하고 있다.

$$\int_0^{2\pi} \cos mx \cos nx\, dx = 0$$

일반적으로 서로 다른 양의 정수 m, n에 대하여 주기가 같은 사인과 코사인($\cos nx$, $\sin nx$), 주기가 다른 사인($\sin mx$, $\sin nx$), 주기가 다른 코사인($\cos mx$, $\cos nx$)은 모두 직교화 가능한 것이다(Shibuya, 2006: 156). 다시 말해, 사인함수는 모든 코사인함수와, 사인함수는 자신 이외의 사인함수와, 또한 코사인함수는 자신 이외의 코사인함수와 직교한다(Newton Highlight 84, 2016: 125). 이와 같이 삼각함수의 직교성을 보장하기 위해 정적분의 단순 공식이 성립해야 하며, x가 라디안이어야 한다는 필연성도 따른다.

Fourier 해석은 연속함수인 코사인과 사인을 이용해서 불연속함수도 표현할 수 있다는 의미가 있다. 즉, 연속함수의 무한급수가 불연속성을 나타낼 수 있다. 파동으로 국한하면, 어떤 복잡한 파형도 단순한 사인이나 코사인 파동이 겹쳐서 생기는 현상인 것이다. 은 어떤 함수라도 해석적인 급수 표현이 가능한 기저 역할을 한다.

함수의 직교성을 이용하면, 적분을 통한 Fourier 계수를 구할 수 있다. 두 함수 $\sin mx$와 $\sin nx$가 직교한다는 성질은 m, n이 서로 다른 양의 정수일 때는 언제나 0이며, $m = n$일 때는 0이 아니라는 의미이다. 만약 $f(x)$가 Fourier 급수로 전개된다면, 양변에 직교성이 성립하는 함수를 곱하여 적분을 하게 되면, 한 개의 항을 제외하고 모든 항은 사라진다. 이때 남은 항에서 Fourier 계수에 대한 Fourier 공식이 얻어진다. 이로써 Fourier 공식의 계산을 쉽게 만들고 유용하게 쓰인다(Stewart, 2016: 200-201).

함수의 직교성을 쉽게 표현하면, 다른 방법을 통해서는 나타낼 수 없다는 것을 의미한다. 즉, 한 쪽의 함수에 다른 쪽 함수의 성분이 전혀 들어 있지 않다는 것이다. 예컨대, $\sin x$는 $a\cos x$의 a를 아무리 변화시켜도 만들어 낼 수 없다. $\sin 2x$도 $\sin x$로부터 만들어 낼 수 없다. 모두 서로에게 직교하고 있기 때문이다(Shibuya, 2006: 171-172).

미적분 공식에서 사인과 코사인은 서로 역관계에 있다. 사인을 미분하면 코사인, 사인을 적분하면 다시 코사인이 된다는 공식이 알려져 있는데, 이때 각도의 단위는 반드시 라디안이어야 성립한다. 삼각함수의 직교성은 Euler 공식을 유도하여 Fourier 급수의 계산을 쉽게 만든다. 미분방정식을 포함하는 모델에서 Fourier 급수는, 강제진동과 관련되는 상미분방정식의 해가 주기함수들의 근사를 허용한다는 수학적 의미가 있다. 응용에서 자주 나타나는 주기함수는 Taylor 급수로 전개되지 않으나 Fourier 급수로는 전개할 수 있기 때문에, 미적분학에서 Fourier 급수가 Taylor 급수보다 보편적이라 할 수 있다(Kreyszig, 2012: 3).

이상과 같이 Fourier 급수는 응용에서 주기현상을 분석하는 유용한 수학적 도구이며, 급수 표현을 쉽게 계산하기 위해 삼각함수의 직교성이 중요하다. 그러나 초등함수의 Taylor 급수는 $\{1,\ x,\ x^2\}$ 등을 기저로 하므로, 계수 결정이 어렵다. 그에 반해, 주기함수의 Fourier 급수는 $\{1,\ \sin x,\ \cos x\}$ 등을 기저로 하므로, 이 경우 사인과 코사인의 직교성으로 인해 0으로 처리되는 항이 많아져서 계산이 쉽다는 편리성이 있다. 결국 사인과 코사인의 직교성은 x가 라디안 단위이어야 하는 결정적인 필연성을 부여한다.

이 절의 수학적 분석 결과, 각이 라디안이어야 하는 필연성은, 사인과 코사인이 주기함수의 직교 기저로서 역할을 한다는 본질이 있기 때문임

을 알았다.

다. 각도 측정: 구조

이 절에서는 각의 크기를 측정하는 개념적 아이디어를 통해 라디안 개념의 본질을 분석한다.

각도의 구조는 기하학적인 각의 대상을 다른 관점으로 전환하는 것이다. 즉, 각도는 호 또는 부채꼴로 전환하여 측정된다. 각도는 각도기와 상관없이, 각도 단위로 원이나 직각을 자연스럽게 이용할 수 있다는 아이디어를 구성하는 것이 중요하다. Freudenthal(1983: 360-361)은 각도가 이러한 논리적이고 자연스러운 단위의 존재성으로 인해, 길이 측도와는 근본적으로 다른 주제라고 말한다.

각도는 길이 측도에 비해 훨씬 더 포괄적(comprehensive)이다. 지형학적인 맥락에서 측량, 지도제작, 우주구조학 등의 보다 기술적인 단계로 올라가면, 각은 측정을 위한 가장 중요한 대상이 된다. 길이 측도는 불가능해지기 때문이다. 그러나 교수학적으로 길이 측도는 이른 시기부터 손, 끈, 막대기를 이용하여 비교하는 측정활동에서 시작한다. 반면, 각도는 늦은 시기에 도입하는 이유로 인해, 비형식적인 인식 과정이 빠져 있다. 예컨대, 문 열기, 계단 오르기, 사다리의 기울기, 팔다리의 움직임 등 직관적인(childish) 측정활동이 간과되었다고 지적할 수 있다. 그 결과, 성인조차 각도에 대한 부족한 이해를 드러내는 것이다. 각도를 비교하기 위해, 시계바늘, 파이나 케이크 조각을 이용할 수 있다. 방향의 변화를 깨닫기 위해, 잘못된 방향을 바라보는 아동의 머리를 올바른 방향으로 돌리게 할 수 있다. 손가락 끝으로 호를 그리면서 한 지점에서 다른 지점을 가리키는 것은 각도의 자연스러운 체화(embodiment) 아이디어이다. 이처럼 각도의 학습기회는 분할, 방향 감각, 회전 등 다양한 관점이 있는 것이다(Freudenthal, 1983: 360-361).

Euclid 기하학은 영어로 <Elements>라 표현하였듯이, 모든 것의 근간, 근본의 의미를 지닌다. 가장 중요한 수학교과서의 원형으로 인정받고 있는 486가지의 명제를 다루고 있는데, 특히 공리는 수학의 완성이자 바탕인 것이다. 5가지의 공리 중에 평행공리와 같은 의미이나 다른 표현인 닮은 삼각형의 존재성은, 그 속에 내재된 수학적 원리를 이해하는 깊은 통찰이 필요하다. 닮음은 포개어 겹쳐 놓으면 서로 같다는 상식으로 이해되는 합동과 달리, 확대나 축소하는 변환의 과정을 통하여 닮은 삼각형들을 겹쳐놓을 수 있다는 자명한 수학적 원리에 대한 논의인 것이다. 닮음에서 각도는 평행선의 유일성에 상응하는 구조적 닮음(AA)의 조건에 필연적인 과제이다. 구조적 닮음이면, 알려진 길이에 의해 모르는 길이를 측정한다. 그러나 본연의 의미는 각도를 비교하기 위해 길이를 측정한다는 '관점의 전환'인 것이다. Euclid 기하는 평행공리와 논리상 동치인 명제로, 동위각과 엇각의 크기가 같음, 피타고라스 정리, 직사각형의 존재성, 삼각형 내각의 합은 $180°$, 삼각형의 넓이는 $\frac{1}{2}\times(\text{밑변})\times(\text{높이})$, 코사인 정리처럼 달리 표현된 명제들을 다루었다. 이를 통해 각도는 공리체계에 모순이 아닌 구조를 다루는 것임을 인식해야 한다(최영기, 2016; 1999).

각도를 구조적으로 다루는 기회는 합동에서 각의 이동, 닮음에서 각이 같다는 경우이다. 합동과 닮음 정리는, 길이와 길이의 비, 각을 포함한다. 각은 길이 측정을 위한 수단이 될 수 있다. 각도는 다음 경우에 각을 비교하는 수단이 된다. 즉, 닮음비에 따라 재생산할 때, 재생산을 확인할 때, 현실에서 재생산을 재해석할 때, 일반적으로는 기본방향이나 기본평면에 대해 방향을 맞추고 확인할 때 각도를 측정한다는 것이다

(Freudenthal, 1983: 363).

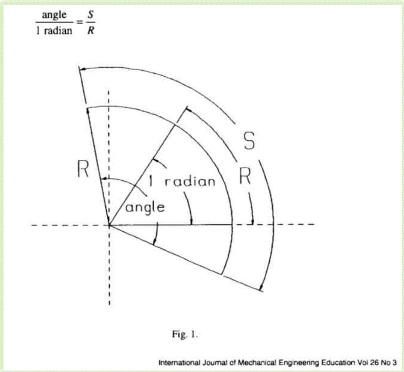
Freudenthal(1983: 363)은 각도 측정을 학습하는 과정이 측정 도구를 제조하는 것으로 시작해야 하며, 각도 측정을 위해 분할 외에 다른 방법이 거의 없다고 하였다. 분할은 원이나 원주에서 적절하게 작도해야 한다. 원에서 중심각의 상등, 부채꼴의 넓이가 같음, 호의 길이가 같음은 직관적으로 같은 부채꼴로 잘라냄을 의미하며, 원의 분할은 이들 사이의 비례관계로 쉽게 접근 가능한 것이다. 원은 각도 분할의 가장 자연스러운 토대가 된다. 1회전의 360°을 각도 측정 단위로 이용하면, $2\pi r$, πr^2에 대한 비율로 부채꼴의 중심각을 비교할 수 있다. 분할은 각도를 측정하기에 가장 자연스러운 방법이다.

그러므로 선행연구(송은영, 2008: 41)에서 호도법으로 나타낸 각도에 항상 π가 붙는다는 오개념을 지적한 것은, 학생들이 육십분법으로 나타낸 각도와의 구조적인 일관성을 따른 매우 자연스러운 결과라 추정할 수도 있다. 이 상황을 오히려 교수학적인 출발점으로 삼아야 한다. 교과서의 서술 방식에서 1라디안을 반복 덧셈하도록 하는 2, 3라디안 등은 분할과 반대로, 곱셈적인 전략이어서, 학생들에게 어색하고 지극히 수학적일 수 있다. 반면, 2π, π, $\frac{\pi}{2}$라디안 등은 분할 전략으로, 학생들에게 교수학적으로 보다 자연스러울 것이라 예측된다.

각도에는 호의 측도로 정하는 호도법의 의미가 본래 내재되어 있다. 지금까지 직각삼각형의 삼각비와 달리, 원함수의 삼각함수에서 생소한 호도법으로 각도 표현이 가능하다고 알고 있었다. 그러나 각도의 양적 구조를 비교해보면, 회전 관념의 각에 대한 크기를 호의 길이로 정하는 호도법 표현은 새롭지 않고, 오히려 일관성이 있음을 알 수 있다. 각도는 원과 부채꼴의 비례관계로 정해지는 양적 구조인 것이다. 즉, 단위와 상관없이, 원주의 분수 양에 해당하는 호와 마주보는 중심각의 크기로 정한다. 1라디안 부채꼴은 원주의 $\frac{1}{2\pi}$에 해당하는 호와 마주보는 중심각을 가지는 것과 같이, 1° 부채꼴은 원주의 $\frac{1}{360}$에 해당하는 호와 마주보는 중심각을 갖는다. 도($^\circ$)와 라디안은 단위의 차이만 있을 뿐, 원의 부채꼴에서 동일한 양을 측정하기 때문에 사실 삼각함수에 모두 쓰일 수 있다. 학생들은 도($^\circ$)와 라디안을 서로 호환되는 각도 단위로 이해해야 한다(Moore, 2013; Watson, 2009a).

라디안 척도는 각의 크기를 측정하는 다양한 방법이 필요했던 이유를 설명한다. 예컨대, 역사적으로 1회전의 한 바퀴를 360°로 정한 이유는, 1년 한 해의 날짜 수와 대략 같게 본 규약이기 때문이다. 반면, 직선과 곡선을 비교하는 상황은 원주율(π)에 유사하게 있었다. 이로써 호도법은 π와 밀접해진다. 도($^\circ$)와 라디안의 단위 변환은 단위 변환 계수가 ($\times$1라디안)에 해당하는 백분율을 찾는 기술일 뿐이다.

지금까지 각도의 구조적 분석에 따르면, 라디안은 각도의 여러 단위 중 하나일 뿐이다. 그러나 라디안은 각도의 '표준' 단위라 말한다. 흔히 수학에서는 변하는 것보다, 동일하게 일정한 것에 주목한다. 따라서 각도가 정해졌다고 가정하고, 라디안의 필연성을 분석한다. [그림 Ⅱ-8]은 각도의 구조적 일관성을 보여줄뿐더러, 라디안 각도의 표준화로서의 의미를 확인할 수 있다. 라디안은 다른 단위와 대비하여, 각도에 의미 있는 원에서, 그 반지름의 길이를 단위 호로 한다는 점이 표준화에 의미를 부여한다고 볼 수 있다. 즉, 라디안의 단위는 원의 반지름의 길이인 것이다.



[그림 II-8] (Clayton, 1998)

일반적인 각도(angle)는 단위와 상관없이, 동질양의 비, 곧 내적인 비로 표현된다:

$$\frac{(\text{각도})}{1\text{rad}} = \frac{S}{R} \quad \cdots②$$

각도의 일관적인 의미이자, Freudenthal(1983)이 말한 내적인 비의 보존성 관점에서, 라디안을 포함한 각도는 1라디안과 임의의 각에 각각 대응하는 호의 길이들 사이의 비라 할 수 있다.

②에서 만일 (각도)를 라디안 단위로 하지 않는다면, 호의 길이(S)와 반지름의 길이(R)를 비교하는 상황에서 1rad에 해당하는 단위 변환 계수를 반드시 곱해야 함을 알 수 있다. 따라서 라디안 각도이어야만 S와 R의 비교가 간단해진다. 즉, (각도)를 θ라 할 때, 라디안 각도이면 단위가 상쇄되므로

$$S = R\theta$$

이다. 그 결과, 호의 길이는 반지름과 같은 단위를 갖는다. 원주가 $2\pi R$이라는 사실은 $\theta = 2\pi$인 특별한 경우로 1회전한 360°의 라디안 각도이다.

②는 라디안의 필연성을 보다 쉽게 보여준다. 라디안 단위가 생략되는 이유를 $\frac{\text{m}}{\text{m}}$로 설명할 수 있으며, 단위 변환 계수가 $(\times 1)$로 가장 단순해진다. 또한 단위가 반지름의 길이임을 보다 명시적으로 드러낸다. 특히 R은 반지름이자 호가 되는, 직선과 동시에 곡선이 되는 이중성이 있다. 따라서 호(S)와 라디안 단위 호(R)의 비교라는 점에서, radian measure를 반지름 측도보다 '호도법'이라 해석한 것은, 매우 적절하다고 할 수 있다.

학생들은 각도의 양적 구조를 인식하기 어렵다고 알려져 있다. Moore(2013: 227)는 학생들이 각도의 단위가 반지름의 길이임을 인식하는 것을 어려워함을 확인하였다. 그러나 '라디안'은 앞서 서술하였듯이, 호도법의 단위로 반지름(radius)과 각(angle)의 합성어이다. 반지름을 단위로 하는 각도라는 의미가 핵심적이다. ②는 라디안 각도에 대해 S와 R의 양적 구조를 가장 단순화함으로써, 각도기 대신에 끈(string)으로 측정한다는 관점의 전환을 곧바로 인식하게 할 수 있다. 단순화는 필연적이라 할 수 있는데, 라디안이 각도의 자연스러운 논리단위인 원에서 그 반지름을 단위로 함을 드러낸다. 또한 닮음에서 각도를 위해 길이를 측정하는 관점의 전환도 있었으며, 이는 직각삼각형의 삼각비와의 연결성을 돕는 해석이라 예상된다.

라디안 각도는 호에 반지름이 얼마나 들어 있는지를 양적으로 측정한다. 단위가 반지름이 되면, 각과 사인, 코사인이 모두 같은 단위가 되므로, 삼각함수 합성은 의미 있으며, 삼각함수는 실함수가 된다. 학생들은 여행하는 거리 감각을 가지고 있어서, 반지름이 길어지면 각의 크기도 함께 커진다는 오개념을 갖기 쉽다. 그러나 각도를 길이로 관점을 전환한 것임을 인식해야 한다. 호의 길이는 반지름의 곱셈 관계이지만, 원의 크기에 관계없이 라디안 각도가 일정한 이유는, ②와 같이 라디안 각도가 호의 길이를 반지름의 길이로 분할하는 나눗셈 관계이기 때문이다(Watson, 2009a).

한편, 단위원은 삼각함수가 실함수라는 본질을

강조하고자 새수학(New Maths)에서 도입한 것이다. 역사적 맥락에서 단위원은 특정 선분의 일정한 길이를 표현하는 수가 존재하도록 하는 실수공리를 만족하는 역할을 하였다(Kendal & Stacey, 1998: 35).

라디안에서 단위원의 의미는 크다. 라디안은 호의 측도와 호의 길이에 같은 수를 사용하기 위해 창안되었다. 라디안 단위를 사용하는 주된 이유는 단위원에서 라디안 각도와 호의 길이가 같기 때문이다. 호도법은 각도를, 단위원에서의 호의 길이로 나타내는 방법이다. 호도법에서는 360°라는 각도를 2π라는 길이로 나타낸다. 원주의 길이와 밀접한 각도의 단위가 라디안이다. 라디안은 각도, 호도, 회전양 측도의 단위인 것이다(Senk et al., 1993: 592). 따라서 라디안은 단위원에서 원주율(π) 자체로 표현된다. 라디안은 호의 길이와 같은 단위를 갖게 된다. 이로써 학생들은 각에서의 π와 실수에서의 π를 같게 인식해야 한다(Watson, 2009a).

그러므로 각도의 일관적인 비례관계는 ②와 같이 단위 호와 측정 대상의 호, 또는 앞서 육십분법과 같이 전체 원주 사이의 상대적인 비교인 것이다. ②에서 라디안 각도인 경우, 단위 호와 비교하여, 측정 대상의 호는 단위의 '곱셈 관계'가 되는 측정인 것이다. 이로써 반지름이 라디안 단위의 역할임을 드러낸다. 반면, 전체 원주와 비교한다면, 호는 원 전체의 '분할' 측정이 된다. 이로써 구하려는 호에 대해 원주의 분수 양을 찾는다는 각도의 구조적인 일관성이 드러나서, 육십분법과의 연결성을 돕는다.

이 절의 수학적 분석 결과, 라디안은 각도의 구조적인 일관성이 있으나, 수학적으로 표준화한 의미가 있다. ②는 S(호의 길이)와 R(반지름의 길이)의 단순화, 라디안 단위의 생략, 단위 변환 계수로서 ($\times 1$라디안)의 처리 기술을 보여준다. 특히 R의 단위 역할은 라디안 의미에 내재되어 있으며, 라디안에 각도 단위로서 표준화 역할을 부여함을 알았다. R이 반지름이자 호가 되는 이중성은 호도법 해석이 적절함을 드러낸다. 또한 원주율 π와의 연결성, 각도가 길이 측도로 관점을 전환한 닮음과의 연결성에도 의미가 있음을 알았다.

교수학적으로는, 1라디안이 원에서 반지름과 호의 길이가 같은 부채꼴의 중심각의 크기로 호도법의 단위이기도 하지만, 이러한 출발은 육십분법과는 생소한 교수학적 단절이 있다. 육십분법에서 1°에 대한 곱셈 전략으로 각도를 구성한 적은 없었기 때문이다. 이를 해소하기 위해, 각도의 구조적인 일관성을 인식하면, 단위와 상관없이 원 전체를 자연스럽고 논리적인 각도 단위로 보고, 곡선 π를 분할하는 전략이 라디안 지도에 매우 적절한 교수학적 처치라 할 수 있다. 결국 호도법도 원의 절반, 반의 반과 같은 '분할' 부터 시작해야 학생들에게 친숙하리라 판단된다.

수학자들은 잘 모른 채 물리학에서 제안하는 라디안 단위를 가져왔으나, 삼각함수뿐만 아니라 학문적인 적용에서도 라디안이 육십분법보다 훨씬 더 편리함을 점차 알게 되었다. 라디안의 차별성은 다음 절에서 파동에 관한 분석을 통해 삼각함수의 활용 면에서 보다 분명하게 드러날 것이다.

3. 응용수학적 분석

우리 주변은 빛, 전자기파, 소리 등 여러 가지 파동으로 가득 차 있다. 삼각함수는 직각삼각형으로 취급하는 0°에서 90°까지 각도의 제한을 없애면, 파동의 성질을 나타낸다. 파동이나 원운동을 다루는 물리학이나 공학에서 삼각함수는 반드시 필요한 도구이다(Newton Highlight 84, 2016). 이 절에서는 이러한 응용수학적 분석을 통해 라디안 개념의 핵심적인 아이디어를 분석한다.

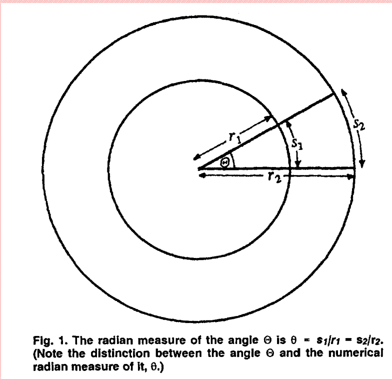
파동은 엄밀히 원운동이며, 위치와 시간의 함수로 기술되는 어떤 물리량의 변화를 수학적으로 나타낸 것이다. 원운동은 어떤 강체(rigid body)가 회전한 각도의 함수로 간단히 기술할 수 있다. CD 플레이어를 정해진 시간만큼 작동한 현상에서 CD상의 어떤 점을 선택하는가에 따라 회전거리는 변하는 반면, 그 각도는 일정하기 때문이다. 즉, 어떤 양은 CD상의 모든 점에 대해 동일하다는 표현이 유용하다. 그리하여 항상 일정한 양에 대한 각도 표현이 필요하다. 이를테면, 회전축에서 $6.0\,\mathrm{cm}$ 떨어진 점이 $1.3\,\mathrm{m/s}$로 움직인다고 하는 것보다, $210\,\mathrm{rpm}$(revolutions per minute; 매 분당 회전수)으로 회전한다는 표현이 간단하다. 앞서 서술한 여행하는 거리 감각의 오개념으로 인해, 동심원에서 거리 대신에 각도로 변위, 속도, 가속도에 해당하는 변수를 정의하는 것이다(Giambattista et. al., 2008: 130).

호도법에서 라디안 단위를 생략하여 각의 크기를 실수화한 것은 이와 관련된 이론적인 연구를 위해 고안된 방법이다. 각도의 실수 표현은 삼각함수의 정의역이 각의 크기만을 나타내는 것이 아니라, 길이나 시간 등을 표현할 수 있는 실수가 됨을 의미한다. 일반각에서 실수로, 다시 말해 도형을 수로 전환하는 것이다.

라디안 단위는 국제표준단위계 SI(Système International d'Unités)에서 각의 표준 단위이다. 그러나 물리학에서도 라디안 단위는 골치 아픈(troublesome) 단위이다. 라디안 단위의 표시와 생략은 물리 교사들과 학생들을 괴롭히는 문제가 되어 왔기 때문이다. 라디안 단위는 어디에 사용되어야 하고 어디에는 사용되지 말아야 하는지에 대한 합의된 처방이 없어, 상식적으로 관계없어 보이는 곳에도 출현하곤 했다. 그 이유는 각도 측정 방법에서 야기된 어려움 때문이다(Aubrecht et al., 1993). 프랑스 측도 체계를 종합한 저자 Danloux-Dumesnils에 따르면, 국제단위계에서 측정할 수 없는 라디안 단위를 선택한 것은 기이한 일이며, 이로 인해 라디안의 신비주의를 가져왔으나, 그 근원에는 각도와 각 사이의 혼동이 있다(Clayton, 2010).

[그림 II-9]는 앞서 비의 불변성이라 밝힌 바와 같이, 라디안 각도가 원의 크기에 관계없이 일정함을 나타낸다. 함수적 관계로 음미하기 위해 일정한 것을 찾아보면, 동심원의 부채꼴을 잘랐기 때문에 각(θ)이 일정하고, 부채꼴들이 닮음이기 때문에 길이비($\frac{s}{r}$)들이 모두 일정하다. 일정한 것들 사이의 관계가 라디안 각도인 것이다. 그러나 라디안 각도($\frac{s}{r}$)와 각(θ)은 서로 구별할 것을 강조한다(Aubrecht et al., 1993):

$$\theta\,\mathrm{rad} = \frac{s_1}{r_1} = \frac{s_2}{r_2} \quad \cdots ③$$



[그림 II-9] Aubrecht et al. (1993: 85)

③에서 각과 각도 사이의 등호(=)의 의미는 중심각(θ)의 라디안 각도를 비($\frac{s}{r}$)로 정한 것이다. 각도는 원의 닮음이 오직 크기만 다름으로 인해, 일정한 라디안의 비($\frac{s}{r}$)로 실수화하기에 적합하다(Whitehead, 2009: 168).

③은 수학적으로 닮음 이론에 따르면, 필연적으로 같다. 각이 정해지면 길이들의 상대적인 측도는 같으므로, 불변인 것끼리 서로 대응한 표현이기 때문이다. 반면, 물리학이나 천문학 등 활용에서는 상대적인 방향이 필요하며, 각도와 시간을 측정하는 현상에 해당된다.

물리 현상에서는 각도가 시간과 함께 변화한다고 의식하는 것이 쉽다. 시간과 위치의 변화를 다루기 위해

(속도)×(시간) = (거리)

의 관계와 일관성을 갖도록, 각도의 변수 θ에 '매초 몇 라디안 회전한다'는 단위를 만든 것이다. 물리학이나 전자공학에서는 이러한 단위를 가지는 변수를 흔히 ω로 나타낸다. 각도의 물리량 ω는 각속도이다. 각속도 ω(rad/s)는 단위 시간에 얼마만큼 회전했는지를 나타내는 물리량이다. 각속도는 단위 시간 안에 얼마만큼 진동하였는지를 뜻하므로, 주파수와도 관련이 있다. 속도의 단위는 m/s로 표현하므로, 각속도의 단위는 rad/s로 표현한다:

(각속도)×(시간) = (각도)

$$\omega t = \frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}} \times \mathrm{s} = \mathrm{rad}$$

이와 같이 각도의 시간변화는 원주 위의 회전하는 점의 회전속도라고 볼 수 있다. 이는 '매초 몇 라디안 회전한다'는 현상이 된다. 이런 해석에서 ω는 각주파수라고도 한다. 따라서 ωt는 각도라는 물리적 의미를 가지기 때문에 삼각함수의 변수로 이용할 수 있으며, 시간에 따라 변화하는 양(x나 y)을 각도의 단위(rad)로 고쳐서 다룰 수 있는 것이다(Shibuya, 2006: 71-72).

물리학에서는 라디안 단위를 '무차원(dimensionless)' 이라 말한다. 다시 말하여, 단위 없이 1로 대체해도 좋다는 것이다. 물리학에서 차원이란, 수학의 3차원 공간과는 다른 의미로, 어떤 양의 물리적 유형이고, 시간, 길이, 질량 등과 같은 단위의 기본적 형태를 뜻한다. 물리학에서 차원 분석은 어떤 방정식을 유도하거나 검증하는 데 쓰이며, 차원을 일치시키면 주어진 양들을 어떻게 결합해야 하는지 판단할 수 있어서 차원이 없는 상수를 제외하고는 흔히 해답을 얻는 데 편리하다(Giambattista et al., 2008: 12). 이러한 차원 해석과 달리, 라디안은 길이비로 유도한 단위이기 때문에, 길이 m나, 질량 kg 등과 구분한 것으로 판단된다.

라디안의 무차원성은 단위의 출현과 생략을 동시에 허용하였다. ③은 단순한 수만 생각하므로, 양변의 단위를 대조할 필요가 없다. 마찬가지로, 잘못 이해되지 않는 한 라디안을 생략해도 좋다. 1라디안의 정의에 따르면, 라디안은 m/m로 유도되는 단위이기 때문에 서로 상쇄되고 어떤 흔적도 남기지 않는다. 반면, m/s단위는 속도나 속력을 포함한 양임을 알려준다. 물리학자들은 라디안이 길이들의 비로 측정되더라도, 각이 들어 있는 양이라는 사실을 알리기 위해 '라디안'을 첨가하기로 하였다. 다시 말해, 라디안 단위가 각도를 표현할 때 명시적으로 드러나도록 덧붙여 왔다. 라디안의 출현은 각의 크기를 나타낸다는 '마크' 역할을 하는 것이다. 이런 의미에서 라디안 단위를 '추가(supplementary)' 단위로 구분하기도 한다. 대체로, 각의 양적 측도가 필수 정보일 때 라디안 단위는 제시되어야 하는 반면, 결과 양이 각의 측도에 의존하지 않을 때는 라디안 단위를 숨기고 생략해야 하는 것으로 정하였다. 예를 들어, 각, 각속도, 각 가속도의 단위는 홀로 출현하면 rad, rad/s, $\mathrm{rad/s^2}$인 반면, 공식에 다른 양과 섞여 나오는 항이 있으면 1, $\mathrm{s^{-1}}$, $\mathrm{s^{-2}}$로 단위가 생략되어야 한다. 그러나 라디안이 생략되어야 할 상황에도 라디안이 출현하기도 하므로, 비판적인 검토가 필요하다.

먼저 출현에 대해, 라디안은 유도단위의 양을 정하는 것이 필수적일 때에만 출현한다. 각이 양

적인 측도라면, 단위는 필수적으로 출현한다.

다음은 생략에 대해, 라디안은 방정식에서 단위를 흔히 생략하도록 한다. 결과 양이 계산의 일부로 들어간다면, 단위를 생략한다. 이를테면, 1초당 23rad이 분명하면, 단위를 생략하고 $\omega = 23s^{-1}$로 쓸 수 있다. 이처럼 잘못 이해되지 않는 한 라디안을 생략해도 무방하다. m/m로 재표현하는 것은 단위를 삭제하는 것에 대한 정당화가 될 수 있다. 라디안으로 표현한 각도는 길이들의 비이므로, 단순한 수, 즉 실수라는 것이다. 또한 상위 수학에서 회전양과 각도에 대해 단순히 자주 쓰이기 때문에 대개 생략한다는 정당화도 있다(Senk et al., 1993: 593).

물리학에서 단위 변환은 차원이 일치하는지 빠짐없이 확인해야 하는 중요한 방법이다. 방법적으로 라디안은 각의 크기를 측정하는 여러 단위 중 하나일 뿐이다. 라디안은 다른 단위와 동등하며, 특별하게 다루어지지 않는다. 다만 라디안은 각의 SI 단위이기 때문에, 표준으로서의 이점은 단위의 통일인 것이다. 따라서 적절한 단위 변환 계수를 사용할 수 있어야 한다. 라디안 단위에 대한 방정식은 공식에 속한 계수 외에 다른 부가적인 수가 곱해지지 않아서 단순해진다.

각도 단위가 바뀌면, 각도 역시 단위 변환 계수만큼 달라져야 한다. 각도 360°에 대한 호는 원주이므로 라디안으로 나타내면

$$360^\circ = \frac{s}{r} = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi\,\mathrm{rad}$$

이다. 도($^\circ$)와 라디안(rad) 사이의 단위 변환 계수(factor)는

$360^\circ = 2\pi\,\mathrm{rad}$ …①

인 것이다(Giambattista et al., 2008: 130-134). 방정식에서 라디안 단위를 유지하면, 단위 변환 계수만큼 차이를 항상 고려해야 한다. 따라서 잘못된 단위 변환을 하지 않도록 계산중에는 라디안 단위를 생략한다.

한편, 교과서에서는 각의 회전을 호도법으로 변환하면, 각의 크기를 호도법으로 표현할 때 라디안 단위가 생략됨을 [그림 II-10]과 같이 서술한다.

참고 호도법으로 각의 크기를 나타낼 때에는 흔히 단위인 라디안을 생략한다.

[그림 II-10] 이준열 외(2014: 59)

삼각함수의 각은 십진법이나 상용로그처럼 자주 라디안 단위로 측정되기 때문이라는 정당성을 간과하고, 미리 정해진 규약처럼 서술하였다.

물리교육에서도 학생들에게 라디안을 각의 '자연스러운' 단위라고 강조하도록 권고하고 있다(Aubrecht et al., 1993: 87). 물리학에서 파동의 위상은 라디안 단위로 대개 측정한다. 라디안을 사용할 때, 여러 가지 계산이 쉬워진다. 라디안의 편리성은, 원운동의 방정식을 매우 간단하게 처리하고 단위 변환 계수 없이 만족하는 형태로 바꿀 수 있다는 것이다.

학생들은 도($^\circ$) 단위에 익숙해 있더라도, 많은 경우에 라디안(rad)으로 표현하는 것이 훨씬 편리하다. 일상적인 예는 많지 않으나, 놀이공원의 회전관람차와 같이, 원운동의 각도변위나 각속도를 그 물체상의 한 점의 이동거리나 속력과 관련짓는 경우이다(Giambattista et. al., 2008: 131). 원운동의 삼각함수는 각도의 상대적인 크기에 대해, 수직 수평 거리의 상대적인 위치를 연결하는 관계인 것이다. 삼각함수의 상대적인 양적 추론은, 수학적으로 닮음과의 연결성에 의미가 있으며, 직각삼각형의 삼각비와의 교수학적 단절도 해소할 수 있다.

이 절의 응용수학적 분석 결과, 라디안 단위의 생략을 규약처럼 서술하는 문제는, 라디안이 일상적인 예가 드문 결과, 학문적인 실계수 방정식에 각도 단위로 흔히 쓰임을 간과한 것임을 알

았다. 도형인 각과 수량화한 각도는 구별할 필요가 있으며, 시간에 따른 위치 변화를 각도로 표현하는 것이 간단하기 때문에 각을 길이로 측도한 것임을 알았다. 라디안은 무차원 단위로, 단위의 출현과 생략을 허용함을 알았다. 각도의 양임을 상기시키는 마크 역할로 추가하는 것이다. 반면, 원운동에서 접선 속도, 회전운동에서 관성모멘트(회전축을 중심으로 회전하는 물체가 계속해서 회전을 지속하려고 하는 성질의 크기를 나타낸 것) 등 방정식은 대체로 단위 변환 계수만큼 차이를 고려하는 데 실수가 없도록 생략하는 것이다. 시간에 따라 변하는 원운동에서 라디안 단위는 각속도와 이동거리를 삼각함수로 연결하기에 편리함을 알았다.

교수학적으로, 길이비($\frac{s}{r}$)의 불변성은 삼각비의 $\tan 3$과 같이, 측정할 수 없다. 그러나 학생들에게 수학적 불변성을 경험적으로 찾을 수 있다는 인상을 주어야 한다. 호(s)나 반지름(r), 각과 같은 분리 요소가 아니라, 길이'비'($\frac{s}{r}$)에 학생들의 관심을 끌어야 한다. 따라서 $s=0.8r$과 같은 곱셈 관계 전략을 따르면, 0.8은 라디안 각도이자 비의 불변성으로 인식할 수 있다.

III. 논의 및 결론

우리는 고등학교에서 삼각함수를 배우면서, 아주 당연하게 라디안 각도로 표현을 바꾸어야 하는 것처럼 배운다. 그러나 그 필요성과 중요성에 대해서는 잘 알지 못해 왔다. 선행연구에서 밝혔던 호도법의 이해와 관련된 문제 상황은 대체로 세 가지였다. 첫째, 학생들은 육십분법의 변환 공식 숙달에 그쳐 있다. 둘째, 학생들은 라디안의 장점을 인식하지 못한다. 셋째, 학생들은 라디안이 단위를 생략하기도 한다는 이유를 잘 모른다. 이에 대한 교수학적 처방은 동질양의 비가 되는 라디안이 실수의 속성도 지녔음을 부각시켜 왔다. 동질양의 비는 단위가 서로 상쇄되는 결과를 가져오므로, 각의 크기를 나타내는 실수가 된다는 설명이었다.

본고는 이러한 설명이 학생들에게 라디안의 필연성을 설득시키기에 본질적이지 못했다고 판단하였다. 그 결과, 학생들은 호도법의 중요성을 제대로 인식하지 못한 채, 육십분법의 사용을 여전히 고수하고 보다 더 편하게 여긴다. 라디안 단위의 필연성을 학생들에게 교수학적으로 설득시켜야 한다. 그러므로 본 연구는 역사적, 수학적 분석을 바탕으로, 라디안의 각도 표현을 보다 본질적으로 정당화한 교수학적 시사점을 찾았다.

첫째, '1라디안 $= \frac{180^\circ}{\pi}$'은 동치 관계가 아니라, 변환 공식에 편리하도록 치환하기 위해 '정해진(defined by) 등식'임을 인식해야 한다. 이 표현식은 호도법과 육십분법의 단위변환에서 자주 이용된다. 그러나 (양변)을 비교하면, (우변)의 육십분법은 단순히 1라디안 각의 벌어진 정도만을 나타내는 각도일 뿐이다. 즉, (우변)의 육십분법에는 단위원에서 원주 위의 길이 또는 동심원에서 동치류라는 의미가 없다. 따라서 이 공식을 호도법을 이해하는 기초로 인식해서는 안 된다. 육십분법의 각도는 수학적인 호도법을 친숙하게 인식할 수 있도록 직관의 역할을 할 수 있는 것이다.

둘째, 비와 비례관계로서 호도법의 학습은 공변성의 과정을 거쳐 불변성의 인식으로 완성하는 절차이어야 한다. 지도를 위해서는 일정한 라디안 각도를 표현하는 동심원의 맥락을 살려 동치류의 공변성을 다루어야 한다.

셋째, 라디안 각도 표현은 Fourier 급수에서 코사인과 사인으로 직교화 함으로써 기저로서 역할을 한다는 수학적 본질이 있다. 라디안 각도

표현이 미적분학에서 공식의 단순화를 결과적으로 가져오는 가장 편리한 단위 체계라는 것은, 학생들에게 라디안의 유용성이나 가치로 인식되지 않는다. 코사인과 사인이 기저라는 본질은 코사인의 미분 또는 적분 결과가 사인으로 간단히 표현되지 않으면 안 되는 필연적인 이유인 것이다:

$$\frac{d}{dx}\cos x = \sin x$$

이는 가르침을 위한 교수지식으로서 작용할 수 있으나, 이에 따른 후속연구가 필요하다.

넷째, 라디안은 상위 고등수학(advanced mathematics)에 필연적이다. 라디안은 실용적인 측도에 쓸모가 없다. 라디안에 rad 단위를 붙이는 것도 선택적이다. 이를테면, 180°는 πrad이든 π이든 상관없다. Danloux-Dumesnils에 따르면, 국제단위계 SI에서 입체각을 나타내는 단위는 순수한 수로써 입체호도법 스테라디안(steradians)의 비($\frac{\text{구의 표면적}}{r^2}$)를 쓴다. 각은 원의 측도(circular measure)이듯이, 입체각은 구의 측도(spherical measure)인 것으로 각도를 일관성 있게 일반화하고 확장할 수 있다(Clayton, 2010).

그러나 마지막 두 가지의 시사점은, 순수수학을 더 배우면 나중에 가서야 깨닫게 된다는 차시 예고를 위한 설명으로 학생들에게 설득력이 약하다. 그럼에도 불구하고 교수지식으로서 의미가 있다. 교사가 교수학적으로 기저의 역할을 알고 주의 집중하여 의식적으로 다루는 것은 매우 중요하다. 역사적, 수학적 분석을 바탕으로 교수학적 본질에 닿는 것은 충분한 설득력이 있기 때문이다.

Freudenthal(1983: 359-360)은 삼각함수의 숙달과 삼각함수표를 사용하는 능력에 대한 선행지식으로서 '각이 무엇인지' 그리고 '각을 어떻게 측정하는지'에 대한 통찰이 필수적이라 하였다. 강미광(2011)도 삼각함수 지도에 앞서 라디안 도입의 필요성과 개념 이해가 선행되도록 강조하였다. 따라서 라디안의 본질적인 분석은 삼각함수의 어려움을 해소하는 데 필수적이라는 의의가 있다.

참고문헌

강미광(2011). 호도법에 관한 교수학적 고찰. **한국수학교육학회지 시리즈A <수학교육>, 50**(3), pp. 355-365.

강향임, 최은아(2015). 예비교사의 라디안에 대한 이해. **학교수학, 17**(2), pp. 309-329.

김완재(2009). 라디안의 속성에 관한 연구: $1rad$은 각인가 실수인가?. **수학교육학연구, 19**(3), pp. 443-459.

남진영, 임재훈(2008). 라디안에 대한 교수학적 분석. **수학교육학연구, 18**(2), pp. 263-281.

송은영(2008). **삼각함수 개념의 지도에 관한 연구**. 서울대학교 대학원 석사학위논문.

우정호(2010). **수학 학습-지도 원리와 방법 제2개정판**. 서울: 서울대학교 출판문화원.

우정호, 이광연, 박세원, 신범영, 이계세, 김정화, 박문환, 윤정호, 박상의, 서원호, 전제동, 이동흔(2014). **미적분Ⅱ**. 서울: 두산동아(주).

유재근(2014). 삼각함수 개념의 역사적 분석. **수학교육학연구, 24**(4), pp. 599-614.

이준열, 최부림, 이동재, 한대희, 전용주, 장희숙, 조석연, 조성철, 황선미, 박성훈(2014). **미적분Ⅱ**. 서울: (주)천재교육.

최영기(1999). 중학교 수학에서 평행공리의 의미. **학교수학, 1**(1), pp. 7-17.

최영기(2016). 교사를 위한 기하학의 공리론적 접근. **2016 수학 핵심교원 특별연수 자료집, 20~21주차**(한국과학창의재단 비출판물), pp. 1-10.

최은아, 강향임(2015). 호의 측도로 도(Degree)와 라디안 이해하기. **학교수학, 17**(3), pp. 447-467.

Akkoc, H. (2008). Pre-service mathematics teachers' concept image of radian. *International Jouranl of Mathematical Education in Science and Technology, 39*(7), pp. 857-878.

Aubrecht, G. J., French, A. P., Iona, M., Welch, D. W. & The AAPT Metric Education and SI Practices Committee. (1993). The radian- That troublesome unit. *The Physics Teacher, 31*, pp. 84-87.

Clairaut, A. C. (2005). **클레로의 기하학 원론**. (장혜원, 역). 서울: 경문사. (불어 원작은 1741년 출판).

Clayton, D. G. (2010). A trigonometrical ratio to replace the dimensionless angle in radians. *International Journal of Mechanical Engineering Education, 38*(2), pp. 132-134.

Clayton, D. G. (1998). Making the Radian Less Special. *International Journal of Mechanical Engineering Education, 26*(3), pp. 253-257. Available from: http://journals.sagepub.com/doi/pdf/10.1177/030641909802600310.

Euclid & Heath, T. (1998) **기하학원론 마**. 이무현 역, 서울: 교우사.

Fredenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.

Giambattista, A., Richardson, B. M. & Richardson, R. C. (2008). **대학물리학Ⅰ**. (김용은, 역). 서울: 북스힐.

Janke, H. N. & Otte, M. (1982). Complementarity of Theoretical Terms-Ratio and Proportion as an Example. *Conference on Function*, (pp. 97-113). SLO Foundation for Curriculum Development.

Kendal, M. & Stacey, K. (1997). Teaching trigonometry. *Australian Mathematics Teacher, 54*(1), pp. 34-39.

Klein, R. J. & Hamilton, I (1997). Using technology to introduce radian measure. *The Mathematics Teacher, 90*(2), pp. 168-172.

Kreyszig, E. (2012). **Kreyszig 공업수학 개정 10판**. (서진헌, 심형보, 이상구, 유일, 배현덕, 양영균, 김희택, 이성철, 허건수, 한광희, 함운철, 최항석, 박제남, 역). 서울: 범한서적. (영어 개정판 원작은 2012년 출판).

Moore, K. C. (2010). The role of quantitative reasoning in precalclus students learning central concepts of trigonometry. Ph.D. dissertation, Arizona State University, USA.

Moore, K. C. (2013). Making sense by measuring arcs: a teaching experiment in angle measure. *Educational Studies in Mathematics, 83*(2), pp. 225-245.

Moore, K. C. & LaForest, K. R. (2014). Approach to Circle Trigonometry. *Mathematics teacher, 107*(8), pp. 617-623.

Newton Highlight 84. (2016). **삼각함수의 세계**. 서울: ㈜아이뉴턴.

Shibuya, M. (2006). **만화로 쉽게 배우는 푸리에 해석**. (홍희정, 역). 서울: 성안당. (일본어 원작은 2005년 출판).

Stewart, I. (2016). **교양인을 위한 수학사 강의.** (노태복, 역). 서울: 반니. (영어 원작은 2008년 출판).

Toeplitz, O. (2006). **퇴플리츠의 미분적분학**. (우정호, 임재훈, 박경미, 이경화, 역). 서울: 경문사. (영어 원작은 1963년 출판).

Thompson, P., Carlson, M. and Silverman, J. (2007). The design of tasks in support of teachers' development of coherent mathematical meanings. *Journal of Mathematics Teacher*

Education. 10: pp. 415-432.

Topçu, T., Kertil, M., Akkoc, H., Kamil, Y. & Önder, O. (2006). Pre-service and in-service mathematics teachers' concept images of radian. *In J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká, & N. Stehlíková (Eds.), Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, (Vol. 5, pp. 281-288). Prague: PME.

Senk, S. L., Thompson, D. R., Viktora, S. S., Rubenstein, R. Halvorson, J. Flanders, J., Jakucyn, N., Pillsbury, G., & Usiskin, Z. (1993). *UCSMP Advanced Algebra*. Illinois: Scott Foresman.

Watson, A. (2008). Working group on trigonometry: meeting 1. In Joubert, M. (Ed.) *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics, 28*(3), pp. 148-150.

Watson, A. (2009a). Working group on trigonometry: meeting 2-3. In Joubert, M. (Ed.) *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics, 29*(2), pp. 94-97.

Watson, A. (2009b). Working group on trigonometry: meeting 4. In Joubert, M. (Ed.) *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics, 29*(3), pp. 121-123.

Watson, A. (2010). Working group on trigonometry: meeting 5. In Joubert, M. (Ed.) *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics, 30*(2), pp. 68-69.

Whitehead, A. N. (2009). **화이트헤드의 수학이란 무엇인가**. (오채환, 역). 서울: 궁리. (영어 원작은 1948년 출판).

A Historical and Mathematical Analysis on the Radian

Yoo, Jaegeun (Graduate School, Seoul National University)
Lee, Kyeong-Hwa (Seoul National University)

This study aims to reinvestigate the reason for introducing radian as a new unit to express the size of angles, what is the meaning of radian measures to use arc lengths as angle measures, and why is the domain of trigonometric functions expanded to real numbers for expressing general angles. For this purpose, it was conducted historical, mathematical and applied mathematical analyzes in order to research at multidisciplinary analysis of the radian concept. As a result, the following were revealed. First, radian measure is intrinsic essence in angle measure. The radian is itself, and theoretical absolute unit. The radian makes trigonometric functions as real functions. Second, radians should be aware of invariance through covariance of ratios and proportions in concentric circles. The orthogonality between cosine and sine gives a crucial inevitability to the radian. It should be aware that radian is the simplest standards for measuring the length of arcs by the length of radius. It can find the connection with sexadecimal method using the division strategy. Third, I revealed the necessity by distinction between angle and angle measure. It needs justification for omission of radians and multiplication relationship strategy between arc and radius. The didactical suggestions derived by these can reveal the usefulness and value of the radian concept and can contribute to the substantive teaching of radian measure.

* Key Words : radian(라디안), mathematical analysis(수학적 분석), arc measure(호의 측도), angle measure(각도), ratios and proportions(비와 비례관계)

논문접수 : 2017. 10. 16
논문수정 : 2017. 11. 5
심사완료 : 2017. 11. 8