대한수학교육학회지 수학교육학연구 제 27 권 제 4 호
Journal of Educational Research in Mathematics
Vol. 27, No. 4, 791 ~ 810. Nov 2017

시각적 모델을 활용한 비례 추론 수업 분석 : 비표, 이중수직선, 이중테이프 모델을 중심으로

서 은 미* · 방 정 숙** · 이 지 영***

본 연구는 비례 추론에서 형식적 절차의 기계적 사용에 대한 비판과 이에 대한 대안으로 제시되는 시각적 모델의 사용에 대한 연구를 바탕으로 비례 추론 수업에서 시각적 모델의 활용 가능성을 탐색했다. 이를 위해 6학년 2학기 비례식과 비례배분 단원을 비표, 이중수직선, 이중테이프 모델을 활용한 수업으로 구성하여 한 학급에 적용하였다. 그 결과 시각적 모델이 비례의 의미를 이해하고 비의 성질 및 비례식의 성질을 발견하는 데, 그리고 비례식 문제 및 비례배분 문제를 해결하는 데 중요한 역할을 할 수 있음을 알 수 있었다. 또한 이러한 시각적 모델을 활용하는 데 학생들이 겪는 어려움과 이를 지도할 때 유의할 점이 있음을 확인하였다. 이를 통해 시각적 모델을 적극적으로 활용한 교과서 개발 및 비례 추론 수업에 대한 지도 방안을 마련하는 데 시사점을 제공할 수 있기를 기대한다.

Ⅰ. 서론

비례는 초등학교 교육과정에서 규칙성 영역의 중요한 요소로 규칙 찾기, 규칙과 대응, 비와 비율, 정비례 및 반비례와 밀접하게 연결되고, 중학교에서 학습하게 되는 함수의 토대가 된다.

이런 중요성으로 인해 비와 비율, 비례의 의미뿐만 아니라 이를 종합적으로 사고할 수 있는 비례 추론에 대한 논의가 국내·외에서 지속적으로 진행되어왔다(예, 정영옥, 2015; 정은실, 2013; Cramer & Post, 1993; Lamon, 2007). 비례와 비례 추론에 관한 다양한 연구에서 찾을 수 있는 공통점 중 하나는 형식적 절차의 조기 도입을 비판하고 비형식적 전략을 촉진하는 시각적 모델의 적극적인 활용을 제안하는 것이다. 이에 대해 많은 연구들은 비례 문제를 해결하는 방법으로 학생들이 다양한 비형식적 전략을 탐색하기 전에 형식적 절차를 도입하는 것이 비례 추론 능력을 향상시키는 데 도움이 되지 못하며(김경선, 박영희, 2007; 정영옥, 정유경, 2016; 정은실, 2013; Baroody & Coslick, 2005; NCTM, 2007, Reys, Lindquist, Lamdin, & Smith, 2012), 비례 상황에서 시각적 모델을 활용하는 것이 학생들이 비형식적 전략을 탐색하고, 비례적으로 사고하는 데 유용함을 주장해왔다(김민경, 2007; 임재훈, 이형숙, 2015; 정영옥, 2015; Beckmann & Izsák, 2015). 그러나 형식적 절차, 즉 비례식의 성질을 기계적으로 활용하는

* 한국교원대학교 대학원, edmos83@gmail.com (제1 저자)
** 한국교원대학교, jeongsuk@knue.ac.kr
*** 팔달초등학교, ez038@naver.com (교신저자)

것에 대한 비판이 지속적으로 제기되어왔음에도 불구하고, 현행 교과서에서는 여전히 비형식적 전략의 개발보다는 형식적 전략을 활용해 문제를 해결하는 것에 집중하고 있는 것으로 보인다. 또한 비표(ratio table) 외에는 비례 추론을 위한 시각적 모델을 제시하지 않고 있다.

한편, 비례 문제에서 활용 가능한 시각적 모델과 관련하여 많은 국외 연구가 이루어진 것에 비해(예, Beckmann & Izsák, 2015; Küchemann, Hodgen, & Brown, 2014; Middleton & van den Heuvel-Panhuizen, 1995; Orrill & Brown, 2012; Streefland, 1985), 국내에서는 이에 대한 연구가 비교적 적은 편이다. 김민경(2007)은 비례 문제를 제시할 때 영상적 표상을 함께 제공하는 것이 문제 해결에 도움이 됨을 밝혔고, 임재훈과 이형숙(2015)은 비례식과 비례배분 단원의 실생활 문제를 해결하는 데 이중수직선(double number line)과 이중테이프(double tape diagram) 모델이 어떻게 활용될 수 있는지 그 방향을 탐색하였다. 이처럼 국내의 비례 문제 해결을 위한 시각적 모델에 대한 연구는 제한적이고, 실제 초등학교 수학 수업에서 학생들을 대상으로 이루어진 것이 아니다.

이에 본 연구에서는 본격적으로 비례를 다루는 6학년 2학기 비례식과 비례배분 단원 수업에서 시각적 모델의 활용에 집중하였다. 특히 시각적 모델 중 비표, 이중수직선, 이중테이프 모델에 중점을 두었는데, 비표는 교과서의 비례 추론과 관련된 단원에서 가장 빈번하게 활용하고 있는 모델이고, 이중수직선과 이중테이프는 최근의 연구에서 비례 추론에 유용하게 활용할 수 있는 모델로 제시된 바 있으므로(임재훈, 이형숙, 2015; Beckmann & Izsák, 2015), 본 연구에서 활용하였다. 세 가지 시각적 모델을 활용한 수업 사례를 분석하여 시각적 모델이 비례 추론 수업에서 어떻게 활용될 수 있는지 살펴보았고, 학생들이 시각적 모델을 어떻게 활용하여 비례 추론을 하는지 알아봄으로써, 시각적 모델을 수업에서 활용할 때의 유의점에 대해 탐색하였다.

이를 통해 비례 추론 수업과 관련하여 시각적 모델을 활용한 교과서 개발 및 지도 방향 탐색에 시사점을 제공할 수 있기를 기대한다.

II. 이론적 배경

1. 비례 추론

많은 연구자들이 비례와 비례 추론에 대한 연구를 진행해왔고, 각 용어에 대해 다양한 의미를 부여해왔다. 예를 들어, Lamon(2007)은 비례 추론을 “비의 불변과 양의 공변을 포함하는 것으로, 두 양 사이의 곱셈적 관계를 식별하고, 같은 관계를 가지는 다른 양으로 확장하는 능력”이라고 주장했다(pp. 637-638).

정은실(2013)은 많은 연구자들의 주장을 정리하여 비례 추론을 “비례, 비, 비율, 비례식과 관련된 추론으로서, 공변과 다중비교의 의미를 포함하는 양적 및 질적 추론”(p. 507)으로 정의하였고, 정영옥(2015) 역시 여러 연구자들의 의견을 종합하여 “다양한 비례 상황에서 곱셈적 관계와 공변성 및 일정성을 이해하며, 비례 상황과 비 비례 상황(nonproportional situation)을 인식하는 수학적 추론의 한 유형”(p. 23)으로 정의하였다. 또한 임재훈과 이형숙(2015)은 비례에서 변하는 측면, 즉 공변 관계를 이해하는 것과 변하지 않는 측면, 즉 불변을 이해하는 것이 중요하다고 제안했다.

본 연구에서는 위에서 언급한 비례 추론에 대한 의미 중 공통적인 요소를 종합하여 비례 추론을 ‘비와 비례 관계를 알고, 비례 상황에서

두 양의 곱셈적 공변과 불변의 관계를 이해하는 것'으로 정의한다.

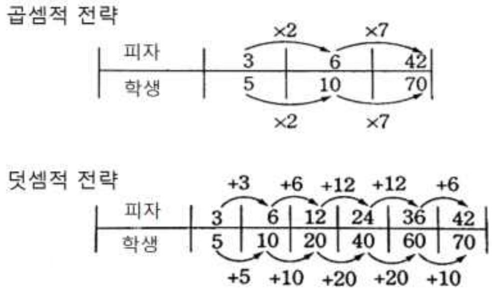
2. 비례 추론을 위한 시각적 모델

비례 추론을 위해 적절한 모델을 사용하는 것은 학생들의 비형식적 전략의 개발과 형식적 전략을 이해하는 데 도움이 된다(정영옥, 2015). 비례 추론을 위해 활용할 수 있는 모델은 구체물, 그림, 닮은 도형 등 다양하지만 이 절에서는 본 연구에서 활용한 비표, 이중수직선, 이중테이프 모델에 한정하여 살펴본다.

비표는 비와 비례에 대한 학생들의 이해를 촉진하기 위해 개발된 것으로, 각 행에서 제시한 수의 의미가 무엇인지 나타나야 하고, 각 열은 동치관계를 이루는 비의 순서쌍으로 채울 수 있다(Broekman, Valk, & Wijers, 2000).

[그림 II-1]처럼 비표에서 동치비는 곱셈이나 덧셈 또는 그 역연산인 나눗셈과 뺄셈을 활용하여 구할 수 있고(Broekman et al., 2000; Middleton & van den Heuvel-Panhuizen, 1995), 학생들에게 두 양의 관계를 탐색할 수 있는 시각적 패턴을 제공함으로써(Dole, 2008), 비의 성질, 비례식의 성질 등의 알고리즘을 만들어 내도록 돕는다(정영옥, 2015; Baroody & Coslick, 2005; Streefland, 1985). 또한 비표는 문제를 어떻게 해결했는지 화살표를 이용해 연산 과정을 표현할 수 있으므로 학생들의 문제 해결 과정을 파악하는 데 유용하게 활용할 수 있고, 비례 문제를 해결할 때 다양한 방식으로 접근할 수 있다는 장점이 있다(정영옥, 2015; Middleton & van den Heuvel-Panhuizen, 1995).

그러나 학생들이 비표에 나타난 수 패턴에만 집중하여 비와 비례 관계를 일반화하는 것을 어려워할 수 있으므로 주의해야 할 필요가 있다(Lobato, Ellis, Charles, & Zbiek, 2016).



[그림 II-1] 비표에서 동치비를 찾는 계산 전략(Middleton & van den Heuvel-Panhuizen, 1995, p. 283)

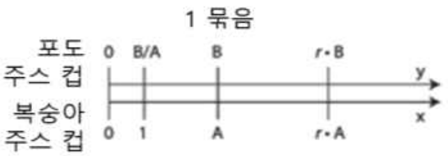
Beckmann과 Izsák(2015)은 비와 비례 관계에 대한 두 개의 양적 관점을 구별하고자 다중 묶음 관점(multiple-batches perspective)과 변동 부분 관점(variable-parts perspective)[1)]을 제안하였다. 다중 묶음 관점은 비 A:B가 있을 때, A와 B를 하나의 합성 단위 또는 묶음(batch)으로 고정하고, 두 양이 공변하는 것은 묶음의 수(batches)를 r로 변화시켜 얻는 관점이고, 변동 부분 관점은 A:B에서 각각 A부분과 B부분이라는 부분의 수를 고정하고, 두 양이 공변하는 것은 각 부분의 크기를 r로 변화시켜 얻는 관점이다(Beckmann & Izsák, 2015). 이때 다중 묶음 관점은 이중수직선 모델과, 변동 부분 관점은 이중테이프 모델과 연결하여 제시하였다.

[그림 II-2]처럼 복숭아주스와 포도주스를 A:B의 비로 섞어서 펀치를 만들 때, 이중수직선 모델을 활용하면 복숭아주스 A컵과 포도주스 B컵이라는 묶음을 고정하고, 이 묶음의 수를 r로 변화시켜 공변하는 양을 얻는다. 이중수직선에서 불변하는 양은 묶음의 수 r이 변화하더라도

1) 본 논문에서는 임재훈, 이형숙(2015)이 번역한 용어를 사용하여 'multiple-batches perspective'를 '다중 묶음 관점'으로, 'variable-parts perspective'를 '변동 부분 관점'으로 제시하였다.

두 대응하는 양의 비율이 $\frac{B}{A}$ 또는 $\frac{A}{B}$로 유지된다는 것에서 찾을 수 있다. 즉, 이중수직선은 두 양을 곱셈적으로 늘이거나 줄이는 아이디어로 만들어지는데, 두 양의 비례적 관계는 유지가 되어야하기 때문에 같은 비율을 유지하며 늘어나거나 줄어든다(Orrill & Brown, 2012). 또한 이중수직선에서 각각의 수직선에 [그림 II-2]처럼 같은 속성을 가진 양을 배열할 수 있지만, 다른 속성을 가진 양을 배열할 수도 있다.

이렇듯 이중수직선은 학생들에게 같은 비율로 양을 움직이는 경험을 제공함으로써 양의 공변에 관해 추론하게 할 수 있고, 두 양이 변하더라도 두 양 사이의 곱셈적 관계는 불변한다는 것을 통해 비례의 의미를 파악하도록 도울 수 있다.

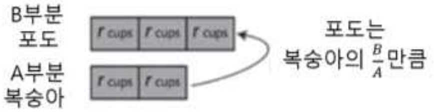


[그림 II-2] 이중테이프 모델의 예 (Beckmann & Izsák, 2015, p. 22)

그러나 이중수직선에서 공변하는 두 양은 시각적인 길이로 잘 표현이 되지만 두 양의 비율 즉, 두 양 사이의 곱셈적 관계는 명시적으로 드러나지 않는다는 특징이 있다(Beckmann & Izsák, 2015). 또한, 이중수직선은 학생들이 두 양에 대한 덧셈적 접근에서 곱셈적 접근으로 이행하는 데 효과적인 모델이지만 학생들이 곱셈적 구조를 확인하는 데 준비가 되어있지 않다면 이런 추론이 자연스럽게 이루어지지 않는다는 것에 유의해야 한다(Küchemann, Hodgen, & Brown, 2011).

이중테이프는 양과 양 사이의 관계를 시각적으로 보여주는 테이프처럼 생긴 모델이다 (Murata, 2008).

[그림 II-3]처럼 복숭아주스와 포도주스를 2:3의 비로 섞어서 펀치를 만들 때, 이중테이프 모델을 활용하면 복숭아주스와 포도주스의 테이프 수를 2부분과 3부분으로 각각 고정하고, 각 부분의 크기 즉, 컵의 크기를 r컵으로 변화시켜 새로운 양을 얻는다. 이때, 모든 테이프 안에 들어가는 수는 r로 고정된다. 이중테이프에서 두 양의 공변은 테이프 안의 r과 각 테이프 수의 곱으로 추론할 수 있고, 두 양 사이의 불변성은 테이프의 수가 고정되므로 두 양 사이의 곱셈적 관계($\frac{3}{2}$ 또는 $\frac{2}{3}$)가 변하지 않음으로 알 수 있다. 즉, 이중테이프는 두 양의 상대적인 규모와 두 양 사이의 곱셈적 관계를 부분의 수로 명시적으로 나타내지만(Beckmann & Izsák, 2015), 공변하는 양이 시각적으로 명확하게 드러나는 것은 아니다.



[그림 II-3] 이중테이프 모델의 예 (Beckmann & Izsák, 2015, p. 22)

임재훈과 이형숙(2015)은 2009 개정 교육과정을 반영한 6학년 2학기 수학 교과서(실험본)의 비례식과 배례배분의 실생활 문제에서 다중 묶음 관점과 변동 부분 관점, 이중수직선과 이중테이프 모델이 어떻게 관련되는지 고찰했는데, 이중수직선과 이중테이프가 다중 묶음 관점과 변동 부분 관점에서 두 양의 공변과 불변을 이해하는 데 기여할 수 있음을 보고하였다.

본 연구에서는 두 양의 곱셈적 공변과 불변의 관계를 파악하는 데 도움이 될 수 있는 비표, 이중수직선, 이중테이프 모델이 비례 추론의 의미 및 형식적 절차 발견, 비례 문제 해결

에 어떻게 활용될 수 있는지 살펴본다.

3. 비례식과 비례배분 단원의 시각적 모델 분석

본 절에서는 6학년 2학기 비례식과 비례배분 단원에서 시각적 모델을 어떻게 제시하고 활용하고 있는지 살펴본다. 분석에 앞서 본 단원을 개관하면, 총 11차시의 본 차시와 2차시의 보충 차시로 구성되어있고, 이 중 1차시는 스토리텔링을 활용하여 비례식과 비례배분이 필요한 상황을 이해하는 것이다. 또한 9차시는 '공부를 잘했는지 알아봅시다', 10차시와 11차시는 문제해결과 놀이 마당 차시이므로 본 절에서는 2~8차시의 비례식과 비례배분 관련 시각적 모델의 제시 및 활용을 분석하였다. 그림이나 단순한 표처럼, 비례 추론을 위한 것이라기보다는 문제를 이해하기 위해 제시된 것으로 판단되는 표현은 분석에 포함시키지 않았다. 교과서에 제시된 2~8차시의 학습 내용과 시각적 모델의 종류, 빈도를 정리하면 <표 II-1>과 같다.

<표 II-1> 교과서 제시된 시각적 모델 분석표

차시	학습내용	시각적 모델	빈도
2	• 비례식 도입 및 관련 용어 학습	비표	1
3	• 비의 성질	비표	2
4	• 간단한 자연수의 비로 표현	·	·
5	• 비례식의 성질	·	·
6	• 비례식을 이용하여 문제해결	·	·
7	• 비례배분 도입	비표	1
8	• 비례배분을 이용하여 문제해결	·	·

본 단원에서는 8차시 중 총 4번의 비표가 사용되었는데, 2차시 비례식의 도입에서는 방의 설계 도면과 실제 길이를 나타낸 비표를 활용하여 축척비율을 확인하고, 비례식, 항, 전항, 후항, 내항, 외항 등의 용어를 정의한다. 이때, 제시된 비표는 [그림 II-4]와 같다. 이 비표를 활용해 도면상의 길이와 실제 길이의 비를 구하게 하고, 그 비율이 일정하다는 것을 이용하여 비례식의 의미를 "비율이 같은 두 비를 등호를 사용하여 나타낸 것"(교육부, 2015, p. 41)이라고 정의한다. 여기서 비표는 두 양의 비율, 즉 두 양 사이의 불변의 관계만을 확인하는 데 이용되고, 두 양의 공변 관계에 대해서는 다루어지지 않는다.

설계 도면에 그려진 가구의 도면상의 길이와 실제 길이의 비를 알아보시오.

• 도면상의 길이와 실제 길이의 비를 구하시오.

가구		도면상의 길이(cm)	실제 길이(cm)
책상	가로	15	150
	세로	6	60
침대	가로	20	200
	세로	12	120

[그림 II-4] 비례식의 도입 차시에 사용된 비표(교육부, 2015, p. 40)

그러나 비례식과 비례배분 문제 같은 비례 문제를 해결하기 위해서는 비례 상황에 대한 인지가 선행되어야 한다(안숙현, 방정숙, 2008). 형식적 절차를 이용하여 비례 문제를 해결한다고 해서 비례 추론을 하고 있다고 단정하기는 어렵다. 따라서 비례 문제를 해결하기 위해서는 두 양의 곱셈적 공변과 불변의 관계를 이해하는 것이 필수적이며, 이를 바탕으로 비례식을 정의하고, 비형식적 전략을 개발하여 이를 형식적 절차와 연결하는 경험이 필요하다. 시각적 모델을 적절히 활용하는 것은 이를 위한 하나의 방안이 될 수 있을 것이다.

비의 성질을 학습하는 3차시에서는 주어진 비를 같은 수로 곱하거나 나누어 동치비를 구하여 빈 칸을 채우도록 하는 비표가 제시되었다. 이 두 비표를 활용하여 비의 성질인 비의 전항과 후항을 0이 아닌 같은 수로 곱하거나 나누어도 비율은 같다는 것을 확인하도록 한다. 여기에서 비표는 두 양의 곱셈적 공변과 불변을 확인하는 모델로 사용되는 것처럼 보이나 비표에 주어진 여러 양 사이의 관계를 파악하기보다는 비율을 이용하여 빈 칸을 채우도록 하고, 특정 몇몇 비에서 비율을 비교하여 두 비를 같다고 해도 되는지에 초점이 맞추어져 있다.

비례배분을 도입하는 7차시에서는 비표의 빈 칸을 채우고 비례배분 문제의 답을 구하는 하나의 방법으로 비표를 활용하고 있다. 그러나 여기에서 제시된 비표도 두 양 사이의 공변과 불변의 관계를 파악하는 모델로 사용된다고 보기는 어렵다.

지금까지 살펴본 것처럼 비례식과 비례배분 단원에서 시각적 모델은 비표로 한정되어 있고, 그마저도 비례식, 비의 성질, 비례배분 도입 차시에만 제시되고 있다. 또한 비표를 비례 추론의 의미를 형성하거나 비형식적 전략을 개발하기 위해서 활용하기 보다는 개념 정의 및 비의 성질을 도입하기 위한 수단으로 활용하고, 이후 제시되는 비례식 문제와 비례배분 문제를 해결하는 형식적 절차와 비표가 직접적으로 연결되지 않으며, 형식적 절차가 제시된 이후에는 이를 전혀 활용하지 않음을 알 수 있다.

이상으로 선행 연구를 통해 비례 추론의 의미를 정리하고, 비표, 이중수직선, 이중테이프 모델이 비례 문제를 이해하고 해결하는 데 어떤 역할을 할 수 있는지 확인하였다. 또한 교과서 분석을 통해 시각적 모델이 제한적으로 사용되고 있음을 파악할 수 있었다. 이에 본 연구에서는 위에서 정리한 비례 추론의 의미를 바탕으로 비표, 이중수직선, 이중테이프 모델을 적극적으로 활용한 비례식과 비례배분 단원의 수업을 통해 이 세 모델의 활용 가능성과 유의점에 대해 탐색하고자 한다.

III. 연구 방법 및 절차

1. 연구 대상

시각적 모델을 활용한 비례식과 비례배분 수업을 살펴보기 위해 광역시에 위치한 6학년 한 학급을 연구 대상으로 선정하였다. 본 연구 대상 학급은 24명의 학생으로 구성되어 있고, 학생들의 학력과 사회·경제적 수준은 중위 수준이다. 이 학급의 교사는 10년의 교육 경력을 가지고 있으며, 수학 교수에 대한 관심이 높고 초등수학교육 석사 학위를 취득하였다.

2. 연구 방법 및 자료 수집

본 연구의 목적은 시각적 모델이 비례 추론 수업에서 어떻게 활용되는지 살펴보고, 이를 통해 시각적 모델 활용의 유의점을 탐색하는 것이다. 따라서 실제 맥락에서 일어나는 현상 및 과정에 초점을 맞추는 사례연구 방법(Yin, 2011)을 적용하였다.

본 연구를 위하여 연구 대상 학급의 교사는 비례 추론의 의미와 이에 대한 교수·학습 방법, 시각적 모델을 활용한 비례 추론 방법에 대한 선행 연구를 살펴보았다. 이를 바탕으로 2009 개정 교육과정을 반영한 6학년 2학기 비례식과 비례배분 단원의 수업에서 시각적 모델을 활용하였다. 수업은 전체 6차시로 구성하였고, 학습 내용과 활용한 시각적 모델을 개관하면 <표 III-1>과 같다. 비례식의 성질을 조기에

도입하기 보다는 시각적 모델을 활용한 다양한 비형식적 전략을 개발하도록 차시의 순서를 조정하였다. 모든 수업은 비디오로 녹화하였고, 이를 전사하여 분석 자료로 활용하였다. 또한 수업에서 산출된 모든 기록물을 수집하였다.

<표 III-1> 시각적 모델을 활용한 수업 개관

차시	학습내용	시각적 모델
1	• 비례 및 비례식의 의미 도입	비표
2	• 비의 성질	비표, 이중수직선, 이중테이프
3	• 다양한 비례 문제해결	비표, 이중수직선, 이중테이프
4	• 간단한 자연수의 비로 표현	비표, 이중수직선, 이중테이프
5	• 비례식의 성질	비표, 이중수직선
6	• 비례배분 도입 및 문제해결	비표, 이중수직선, 이중테이프

3. 자료 분석

수집한 자료는 비례의 의미 및 원리 탐색, 비례 문제해결이라는 두 가지 측면에서 분석하였다(<표 III-2> 참조). 비례의 의미 및 원리 탐색 측면에서는 시각적 모델을 활용하여 비례, 비례식의 의미와 비의 성질, 비례식의 성질, 비례배분 원리 등을 전체 논의에서 어떻게 형성하고 탐색하는지에 초점을 맞춰 살펴보았다. 비례 문제해결 측면에서는 학생들의 활동지를 통해 시각적 모델을 어떻게 활용하여 문제를 해결하는지 살펴보고, 전형적인 사례와 비전형적인 사례를 통해 비례 문제에서 시각적 모델을 활용하는 데 어떠한 어려움이 있는지 알아보았다.

앞에서 살펴본 분석의 초점을 정리하면 <표 III-2>와 같다.

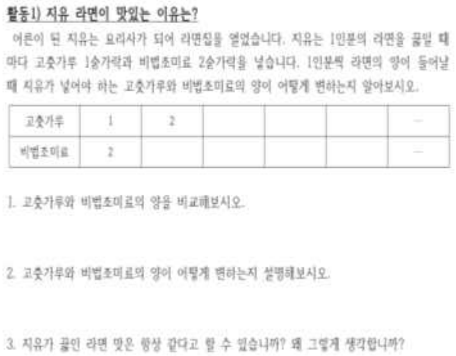
<표 III-2> 분석의 측면과 초점

분석의 측면	분석의 초점
비례의 의미 및 원리 탐색	• 비례와 비례식의 의미는 시각적 모델을 통해 어떻게 나타나는가? • 비형식적 전략, 비의 성질, 비례식의 성질, 비례배분의 원리는 시각적 모델을 통해 어떻게 발견되고 탐색되는가?
비례 문제해결	• 학생들이 시각적 모델을 활용하여 비례 문제를 어떻게 해결하는가? • 학생들이 비례 추론 문제에서 시각적 모델을 활용하면서 어떠한 어려움을 겪는가?

IV. 결과 분석

1. 비례의 의미 및 원리 탐색

비례와 비례식의 의미를 도입하기 위해 교사가 재구성한 문제와 활용한 비표는 [그림 IV-1]과 같다.


활동1) 지유 라면이 맛있는 이유는?

어른이 된 지유는 요리사가 되어 라면집을 열었습니다. 지유는 1인분의 라면을 끓일 때마다 고춧가루 1숟가락과 비법조미료 2숟가락을 넣습니다. 1인분씩 라면의 양이 늘어날 때 지유가 넣어야 하는 고춧가루와 비법조미료의 양이 어떻게 변하는지 알아보시오.

고춧가루	1	2				…
비법조미료	2					…

1. 고춧가루와 비법조미료의 양을 비교해보시오.

2. 고춧가루와 비법조미료의 양이 어떻게 변하는지 설명해보시오.

3. 지유가 끓인 라면 맛은 항상 같다고 할 수 있습니까? 왜 그렇게 생각합니까?

[그림 IV-1] 1차시 과제

첫 번째 하위 문제는 고춧가루와 비법조미료

의 양을 비교하라는 것이었다. 학생들은 비표의 빈 칸을 채우고 문제를 해결하면서 고춧가루와 비법조미료의 양을 비교했고, 고춧가루 양의 2배가 비법조미료가 된다는 것, 비법조미료 양의 $\frac{1}{2}$이 고춧가루 양이 된다는 두 양 사이의 곱셈적 관계를 찾아냈다. 두 양의 곱셈적 관계의 불변성은 비례 추론의 중요한 요소 중 하나로 학생들은 이를 비와 연결하여 고춧가루와 비법조미료의 비가 1:2라고 답했다.

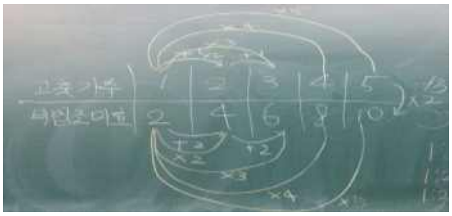
이후 비표를 보며 두 양이 어떻게 변하는지 살펴보았다. 처음 학생들은 고춧가루가 1씩 늘어날 때, 비법조미료는 2씩 늘어난다는 덧셈적 사고를 했다. 이후 교사는 학생들이 곱셈적으로 사고할 수 있도록 도왔다. <에피소드 1>은 이에 대한 교사와 학생의 활동이다.

<에피소드 1> 비례의 의미 형성하기

교사: 그럼 어쨌든 1:2의 관계는 유지가 되는데 양은 변한다는 거지. 그럼 여기서 1씩 늘어난다, 2씩 늘어난다 말고 다르게 설명할 수는 없을까? 비에서는 곱셈적 비교가 중요하다고 했잖아요. 얘를 곱셈으로 설명할 수는 없나? 지금 라면이 1인분, 2인분, 3인분... 늘어나면 이게(고춧가루의 양) 어떻게 늘어나는 거지?

학생들: 2배, 3배, 4배...

교사: 그렇지. 2배, 3배, 4배. ([그림 IV-2]와 같이 표에 표시하며) 그럼 이 표에 ×2, ×3, ×4 쓸 수 있을까요? 그럼 밑에는 어때?



[그림 IV-2] 표를 이용한 비례 관계 파악

남우: ×2, ×3, ×4.

교사: (표에 표시한다) 이 표 이해가요? 지금 고춧가루와 비법 조미료의 양은 점점 많아지고 있잖아요. 그런데 일정한 것도 있죠? 뭐가 일정해요?

학생들: 비율, 2배.

위 에피소드를 통해 교사와 학생들은 라면의 양이 늘어나면 고춧가루와 비법조미료의 양은 변하지만 두 양 사이의 비율 $\frac{1}{2}$, 또는 비법조미료의 양은 고춧가루 양의 2배라는 것은 변하지 않는다는 것, 즉 두 양이 2배, 3배, 4배로 변해도 두 양 사이의 곱셈적 관계가 변하지 않는다는 것을 탐색하고, 이를 비례 관계라고 합의하였다. 이후 교사는 비례 관계에 있는 두 비를 등호를 사용하여 나타낼 수 있다는 논의를 통해 비례식을 정의하였다.

2차시에서 교사는 1차시와 같은 비표를 이용하여 학생들에게 14인분의 라면을 끓일 때 필요한 고춧가루와 비법조미료의 양을 알아보도록 하였다. 이 문제를 통해 비표에서 두 양의 변화를 덧셈적으로 파악하는 것(고춧가루 양이 1씩 커질 때, 비법조미료의 양은 2씩 커진다)이 비효율적일 수도 있음을 학생들이 생각할 수 있도록 하였고, 곱셈적 사고를 통해 문제를 해결하는 것이 유리할 수 있음을 이끌어냈다. 이후 비표를 이용하여 같은 비를 찾는 방법에 대해서 논의하도록 했고, 학생들은 위 비표에서 곱셈적 관계를 찾아 비의 전항과 후항에 0이 아닌 같은 수를 곱하면 비율이 같은 비를 찾을 수 있음을 스스로 찾아냈다. 이에 대한 과정은 <에피소드 2>와 같다.

<에피소드 2> 비의 성질 발견하기

교사: 그럼 어떻게 하면 같은 비를 구할 수 있을까? 1:2랑 같은 비를 찾는 방법, 어떻게 하면 될 것 같아?

(시간이 흐른 후)

남우: 같은 수를 곱하면 될 것 같아요.
교사: 어디에?
남우: 전항과 후항에.
교사: 전항과 후항에 같은 수를 곱해줘요? 그럼 2:4는 얼마를 곱한 거야?
학생들: 2
(중략)
교사: 그럼 (비표를 보고) 전부 비율이 같긴 해?
학생들: 네.
교사: 그럼 3번 정리 좀 해 봅시다. 같은 비를 구하는 방법 뭐가 있다고?
학생들: 전항과 후항에 같은 수를 곱해요.
교사: 그럼 아무거나 다 곱해도 돼?
규현: 0은 빼야 해요.
교사: 왜 0은 빼야 해요?
규현: 0을 곱하면 다 0이 돼요.

이후 교사와 학생들은 비표에서 0이 아닌 같은 수를 곱하여 동치비를 찾아낸 것을 역으로 생각하여 0이 아닌 같은 수로 나누어도 동치비를 찾을 수 있음을 논의하였다. 이 과정에서 몇몇 학생들은 동치비를 찾으면서 비표의 형태가 분수와 비슷하다고 생각하였고, 이를 동치분수 찾는 방법인 분모와 분자에 0이 아닌 같은 수를 곱하거나 나누어도 그 크기는 같다는 것과 연결하여 전항과 후항에 0이 아닌 같은 수를 곱하거나 나누어 찾을 수 있음을 논의하였다.

3차시에서 학생들은 다양한 전략을 활용하여 여러 가지 비례 문제를 해결하였고, 수업 이후 한 학생이 3차시에서 해결한 비례 문제에서 비례식의 성질을 도입할 수 있는 좋은 아이디어를 제안하여, 4차시에서는 5차시와 수업 내용을 바꾸어 비례식의 성질에 대해 탐색하기로 하였다. 여기에서 활용한 맥락은 가로, 세로의 비가 4:3인 액자의 가로가 12cm일 때, 세로의 길이를 구하는 것이고, 제시한 비표는 [그림 IV-3]과 같다.

활동1) 다음 표에서 빈 칸에 들어갈 수는?

가로	4	8	12	16	20	⋯
세로	3	6		12	15	⋯

[그림 IV-3] 비례식의 성질 탐색에 활용한 비표

먼저 교사는 학생들에게 빈 칸에 들어가는 수를 구하기 위한 다양한 방법을 고민해보도록 했고, 학생들은 다양한 전략을 활용하여 문제를 해결했는데, 세로의 길이는 가로의 길이의 $\frac{3}{4}$배이므로 $12\times\frac{3}{4}$, 비의 성질 이용하기, 가로는 4씩 세로는 3씩 늘어나므로 6+3, 가로와 세로의 길이가 처음에는 1만큼, 그 다음에는 2만큼 차이가 나므로 세 번째에는 3만큼 차이가 날 것이라는 전략, 가로의 길이 12는 앞선 두 비의 가로 4+8을 더한 것이므로, 세로의 길이는 3+6이라는 전략 등이 언급되었다. 이중 모든 상황에서 유효하지 않은 전략도 있었지만 학생들은 비표에서 여러 가지 전략을 찾기 위해 노력했다. 이후 비례식의 성질과 관련된 아이디어가 제시되었는데 이에 대한 에피소드는 다음과 같다.

<에피소드 3> 비례식의 성질 발견하기
지영: 대각선으로 곱하면 답이 같아요.
교사: 어? 그러네? 왜 이렇게 대각선으로 곱하면 답이 같니? 이것만 됩니까?
학생들: 다른 것들도 다 돼요.
교사: 그럼 □를 구하는 식 하나만 불러보세요.
학생들: 12×6=8×□
교사: 이 □를 풀 수 있어요?
학생들: 9.
교사: 그럼 일단 이것을 비례식으로 써볼까요?
학생들: 8:6=12:□
교사: 그런데 이걸 12×6=8×□ 이렇게 계산할 수 있다는 거잖아요. 그럼 이걸 어떻게 풀 수 있다는 거야?
학생들: 안에 있는 것끼리, 밖에 있는 것끼리

곱해요.

교사: 우리 이 안에 있는 것을 뭐라고 한다고 했지? 밖에 있는 것은?

학생들: 내항, 외항.

교사: 그럼 이것을 뭐라고 말할 수 있을까?

학생들: 내항의 곱은 외항의 곱이다.

비례식의 성질을 발견하는 과정에서 비표는 학생들이 대각선의 곱이 같다는 것을 발견하는 토대가 되었다. 이후 교사는 비례식의 성질을 발견한 것에서 멈추지 않고 왜 비례식의 성질이 성립하는지 학생들과 함께 논의하였다. <에피소드 4>는 이에 대한 논의 과정이다.

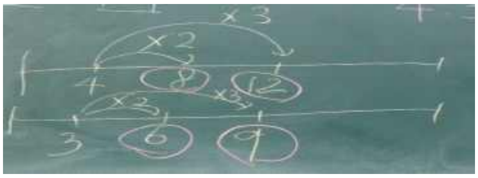
<에피소드 4> 비례식의 성질의 원리 탐색하기

교사: 그럼 왜 내항의 곱은 외항의 곱과 같을까?

학생들: (침묵함)

(중략)

교사: 그럼 여러분이 생각할 수 있도록 수직선에 한 번 그려볼게. ([그림 IV-4]를 그리며) 여기 4와 3을 같은 위치에 써요. 그럼 같은 비를 어떻게 찾을 수 있죠?



[그림 IV-4] 비례식의 성질 이해에 활용한 이중수직선

학생들: 같은 수를 곱해요.

교사: 그래요. (4:3에 2씩 곱해 이중수직선에 나타낸다) 그래서 지금 이렇게(4와 6, 8과 3을 가리키며) 대각선으로 곱하면 같잖아요. 왜 같을까?

규현: 같은 수를 곱해줬으니까요.

교사: 그래? 그럼 그걸 한 번 써볼까?

규현: 4:3=4×2:3×2

선진: 같은 수를 곱해줬으니까 뺄 수도 있지 않습니까?

교사: 뺀다고? (×2를) 다 없다고 생각한다고?

선진: 네.

교사: 그럼 얘(×2한 것)가 없으면 어떻게 되는데?

남우: 결국 4×3과 3×4가 되니까 같습니다.

교사: 같은 수를 곱해준 것이니까 당연히 같을 수밖에 없겠죠? 이거 공식처럼 한 번 써볼까? 꼭 4:3일 필요 없잖아요. 그럼 같은 비를 어떻게 구해요? □:△에 3을 곱했다고 해봅시다. 그럼 식은?

학생들: □:△=□×3:△×3

교사: 그럼 내항의 곱은 얼마에요?

학생들: △×□×3

교사: 외항의 곱은? □×△×3이잖아요. 그러니까 같을 수밖에 없는 거지. 이것을 비례식의 성질이라고 한대. 근데 선생님이 이걸 왜 했냐면 지혜가 되게 신기한 방법으로 이걸 찾아냈거든요. 지혜의 방법을 한 번 들어보자.

지혜: 4:3=8:6에서 $\frac{4}{3}=\frac{8}{6}$인데, 통분하면 $\frac{4\times6}{3\times6}=\frac{8\times3}{6\times3}$인데 분모가 같으니까 분자만 봐도 상관없습니다. 그래서 4×6=8×3입니다. 4×6은 외항의 곱이고, 8×3은 내항의 곱입니다. 그래서 외항의 곱과 내항의 곱은 같습니다.

학생들은 대각선의 곱이 왜 같은지 찾는 과정에서 인지적 갈등을 겪었다. 이를 도와주기 위해 교사는 4:3이 8:6이 되는 과정을 명확하게 보여줄 수 있는 이중수직선을 사용하였다. 이를 통해 전항과 후항에 같은 수를 곱해 주었으므로 그것을 다시 같은 수로 나누어 주어도 된다는 아이디어를 얻게 되었고, 결국 내항의 곱과 외항의 곱이 같은 이유를 일반화할 수 있었다. 또한 지혜의 아이디어를 통해서도 내항의 곱과 외항의 곱이 같음을 추론할 수 있었다.

6차시에서는 비례배분 문제를 제시하고 학생들에게 다양한 방법으로 해결하도록 한 후 학생들의 해결방법을 연결하여 비례배분하는 방

법을 탐색하도록 했다. 제시된 문제 맥락은 12개의 쿠키를 유리와 정환이가 2:1로 나누어 먹을 때 각각 몇 개씩 가져야 하는지에 대한 것이었다. 학생들은 비표, 이중수직선, 이중테이프뿐만 아니라 표, 수직선, 그림과 식 등을 활용하여 다양한 방법으로 문제를 해결했다. 이 과정에서 이중테이프 모델이 비례배분의 원리와 잘 연결되었는데 이에 대한 에피소드는 다음과 같다.

<에피소드 5> 비례배분의 원리 탐색하기

수현: ([그림 IV-5]를 그리며) 처음에는 2:1이니까 상자를 2칸, 1칸 그리고 상자 안에는 1씩 들어갑니다. 두 번째 상자에는 4씩 들어가서 결국 8:4가 됩니다.

[그림 IV-5] 비례배분 문제를 해결하면서 학생이 사용한 이중테이프

교사: 그런데 두 번째 상자에서는 왜 4가 들어가?
경수: 다 더하면 12가 되어야하기 때문이지 않습니까?
교사: 그럼 더해서 12가 된다는 말은 상자 3칸 있죠. 그럼 이 상자 3칸에 얼마가 들어가야 하는 거야?
학생들: 12.
교사: 그럼 상자 1칸에는 얼마가 들어가요?
학생들: 4.
교사: 또? 다른 방법으로 한 사람? 규현이.
규현: $12\times\frac{2}{3}=8$, $12\times\frac{1}{3}=4$입니다.
교사: 여러분, 12는 알겠는데, $\times\frac{2}{3}$는 뭘 의미하는 거에요?
경수: 전체 분의...
교사: 전체? $\frac{2}{3}$에서 3은 어디에서 나왔어요?
학생들: 2:1을 더했어요.
교사: 이거 칠판에서 어디에 또 있어요?
남우: 3칸.
교사: 여기 상자에서 3칸 있는 거죠?
학생들: 네.
교사: 그럼 유리는 그 중에 몇 칸 가지는 거죠?
학생들: 2칸.
교사: 그래서 $\frac{2}{3}$구나. 그럼 정환이는?
학생들: 1칸. $\frac{1}{3}$.

위 에피소드에서 드러나는 것처럼 비례배분하는 방법 중 하나는 비의 전항과 후항의 합을 분모로 하는 분수로 고친 후 전체에 곱해주는 것이다($12\times\frac{2}{3}=8$, $12\times\frac{1}{3}=4$). 여기에서 학생들은 $\frac{2}{3}$가 이중테이프의 전체 3칸 중 유리가 가져야 할 몫(2칸)을 나타내고, $\frac{1}{3}$은 이중테이프의 전체 3칸 중 정환이가 가져야 할 몫(1칸)과 연결된다는 것은 잘 파악하였다.

2. 비례 추론 문제 해결

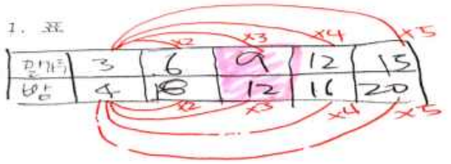
2차시에서 비의 성질을 학습한 후 교사는 학생들에게 이중수직선과 이중테이프 모델을 소개했다. 1차시와 2차시에서 함께 해결한 문제를 이중수직선과 이중테이프로 나타내는 방법을 설명했고, 각각의 모델에서 변하는 것과 변하지 않는 것이 무엇인지 함께 찾아보았다. 이렇게 각 모델을 표현하는 방법과 활용 방안을 제시한 후 학생들에게 [그림 IV-6]과 같은 문제를 해결하면서 비표, 이중수직선, 이중테이프 모델로 문제를 나타내어 해결하도록 했다.

마무리) 문제를 표, 수직선, 상자로 표현하기

진원이는 밀가루 3컵으로 4개의 빵을 만들었습니다. 진원이가 밀가루를 9컵 가지고 있다면 몇 개의 빵을 만들 수 있을까요?

[그림 IV-6] 문제를 세 가지 모델로 표현하기

그 결과 거의 대부분의 학생들이 비표를 활용하여 문제를 정확히 표현하고 해결했으며, 오류를 보이는 학생은 1명뿐이었다. [그림 IV-7]과 같이 대부분의 학생들은 문제를 보고 3:4의 곱셈적 공변 관계를 파악하고 이를 비표로 나타내어 문제를 해결했다.

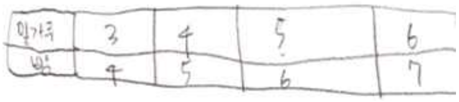


[그림 IV-7] 비표로 문제를 해결한 경우

그러나 두 양 사이의 관계 즉, (밀가루 양)×$\frac{4}{3}$=(빵의 수), 또는 (빵의 수)×$\frac{3}{4}$=(밀가루 양)을 이용하여 문제를 해결한 경우는 없었다. 학생들은 앞선 수업에서 두 양 사이의 관계가 자연수이거나 매우 간단한 분수인 경우, 교사가 다양한 규칙을 찾도록 시간을 충분히 주고 유도한 경우에는 이를 활용하지만, 그렇지 않은 경우에는 이를 주로 활용하지 않음을 알 수 있다.

문제를 해결한 23명의 학생 중 오직 1명의 학생이 비표를 세로로 구성하였고 나머지 학생들은 모두 가로 형태의 비표를 구성하였다. 이는 본 수업에서 지속적으로 가로 형태의 비표를 제시해왔고 교과서에서도 가로 형태의 비표만을 사용하기 때문이라고 생각된다.

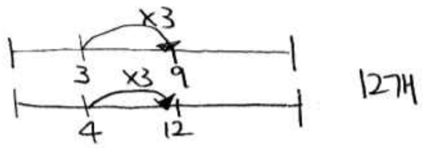
비표로 표현하기에서 오류를 보인 학생은 문제에서 주어진 두 양의 곱셈적 관계를 파악하지 못하고 3:4에서 전항과 후항에 같은 수를 곱하는 것이 아닌 1씩 더하는 방법으로 문제를 해결하려고 했다. 이는 엄밀히 비표를 활용하는 것에서의 오류가 아닌 문제의 이해에 대한 오류라고 생각할 수 있지만 학생의 생각을 비표에 표현하게 함으로써 문제 이해에 대한 오류를 포착할 수 있다는 점에서 의의가 있다. 오류를 보인 경우를 제시하면 아래와 같다.



[그림 IV-8] 표 표현에서 오류가 있는 경우

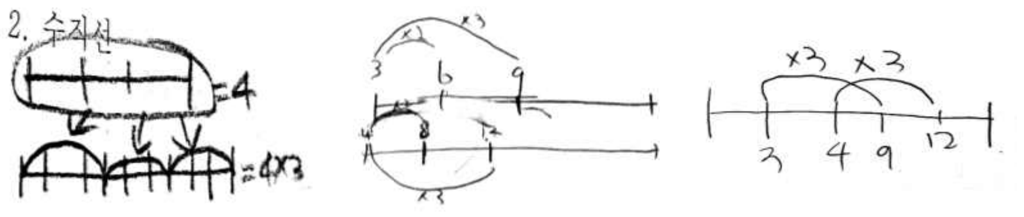
이중수직선의 경우 24명의 학생 중 14명의 학생들이 이중수직선을 바르게 활용하여 문제를 해결하였고, 7명의 학생은 이중수직선의 사용에서 비전형적인 모습을 보였으며, 3명의 학생은 이중수직선으로 표현하지 못했다.

이중수직선을 활용하여 문제를 해결한 대표적인 경우는 [그림 IV-9]와 같다. 대부분의 학생들은 이처럼 이중수직선을 활용하여 두 양이 곱셈적으로 어떻게 변하는지 표현하고 밀가루가 9컵일 때 12개의 빵을 만들 수 있다는 것을 찾아냈다. 그러나 비표에서와 마찬가지로 두 양 사이의 불변성을 이용하여 문제를 해결한 경우는 없었다.



[그림 IV-9] 이중수직선으로 문제를 해결한 경우

이중수직선을 비전형적인 방법으로 활용한 대표적인 경우는 [그림 IV-10]과 같다. (a)의 경우, 수직선에 3만큼을 나타내고 이에 대응하는 값이 4라고 썼다. 그리고 이를 3배하여 아래 수직선에 나타내고 이에 대응하는 값도 4×3이 됨을 표현하여 문제를 해결했다. 비록 이 표현은 전형적인 이중수직선의 형태는 아니지만 두 양이 같은 비로 공변하는 것을 이해하고 있고 이



(a) (b) (c)

[그림 IV-10] 이중수직선을 비전형적으로 사용한 경우

를 자신만의 방법으로 표현했다고 할 수 있다. 그러나 이중수직선의 장점 중 하나는 측정값을 길이로 표현하여 그 값을 시각적으로 알아차릴 수 있다는 것인데 이 표현은 한 양만 수직선에 표현함으로써 두 양의 공변에 대한 시각적 이점을 살리지 못 했고, 두 양 사이의 불변성 역시 파악하기 어렵다.

(b)의 경우, 두 양이 어떻게 변하였는지 찾고, 문제에 대한 답도 바르게 도출했지만 두 양의 변화값을 같은 위치에 쓰지 않고 다른 위치에 썼다. 학생들이 지금까지 활용해온 수직선은 같은 측정 단위를 가지는 양을 길이에 따라 나타낸 것이었다. 따라서 서로 다른 측정 단위를 가진 양을 같은 길이에 위치시키는 것은 학생들에게 익숙하지 않을 것이다. 더욱이 같은 측정 단위를 가지는 두 양의 공변하는 값을 이중수직선에 표현할 때, 서로 다른 양을 같은 곳에 위치시키는 것은 학생들에게 더욱 혼란스러울 것이다. 실제로 다양한 비례 문제를 해결하는 차시에서 이런 어려움이 발견되기도 했다. 그러나 (b)처럼 표현하는 것이 두 양의 변화를 파악하는 데는 어려움이 없을 수도 있으나 두 양 사이의 곱셈적 관계의 불변성을 이해하는 데는 한계가 있기 때문에 학생들과 이중수직선에서 공변과 불변을 어떻게 확인할 수 있는지 함께 논의할 필요가 있다.

(c)의 경우, 두 양의 곱셈적인 공변 관계를 수직선에 표현했으나 변하는 두 양을 위, 아래에 대응시키지 않고 한 수직선 위에 모두 표현했다. 이는 비례 상황에서 비교하는 두 양이 무엇인지를 파악하고 두 양이 어떻게 공변하는지 그 과정을 나타냈다고 보기 어렵다. 또한 두 양 사이의 곱셈적 관계가 불변함을 파악하는 것에서도 한계가 있을 수 있다.

이중테이프 모델을 사용한 경우 24명의 학생 중 16명의 학생들이 이를 제대로 활용하였고, 5명의 학생은 정답을 찾기는 했으나 이중테이프를 비전형적으로 사용하였고, 3명의 학생은 이중테이프를 활용하여 문제를 해결하지 못했다.

이중테이프 모델을 사용하여 문제를 해결한 대부분의 학생들은 [그림 IV-11]의 오른쪽 표현처럼 밀가루와 빵의 수가 3:4의 비를 이룬다는 것을 찾고 이를 3칸과 4칸의 테이프로 나타냈다. 그리고 한 칸에 들어갈 양이 원래 양의 3배가 되었으므로 3이라는 것을 찾고 빵의 수가 12개라는 것을 쉽게 찾아냈다. 이 중 몇몇 학생들은 [그림 IV-11]처럼 두 양이 변할 때 각 테이프 안에 들어가는 수가 변하지만 한 테이프 안에 들어가는 수가 같다는 것을 잘 표현했다.

[그림 IV-11] 이중테이프로 문제를 해결한 경우

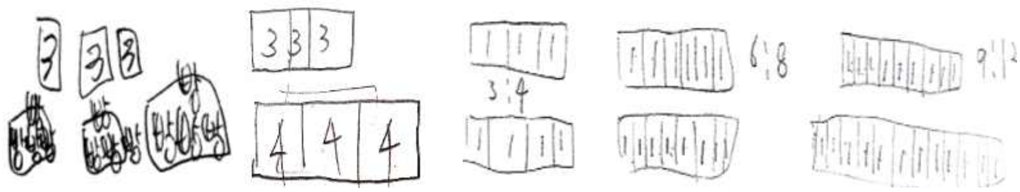
이중테이프 모델을 비전형적으로 활용한 대표적인 경우는 [그림 IV-12]와 같다. (a)의 경우, 밀가루 3컵으로 4개의 빵을 만들 수 있다는 것을 표현하고, 밀가루가 9컵이 되었으므로 각각을 3배한 것을 이중테이프 모델로 나타내어 문제를 해결했다. 이는 비례 문제를 제대로 이해하고 문제를 해결한 경우라고 볼 수 있으나 이 표현은 이중테이프 모델의 특징보다는 이중수직선에서처럼 두 양의 공변 관계를 시각적으로 나타내는 특징을 더 잘 살린 것으로 보인다. 이중테이프 모델에서도 변하는 것과 변하지 않는 것이 무엇인지 파악하는 것이 중요한데, 두 양이 변함에 따라 테이프 안의 수는 변할 수 있지만 각 테이프 안에 들어가는 수는 서로 같아야 한다. 그러나 이 경우에는 각 테이프 안에 서로 다른 수를 사용하였고 위, 아래의 테이프의 수가 3:4의 비를 나타내고 있지 않아 전형적인 이중테이프의 표현이라고 볼 수 없다.

(b)의 경우, 두 양이 변하는 과정을 테이프 수의 변화로 나타냈는데, 이중테이프로 나타낼 때 두 양이 변해도 테이프의 수가 3:4로 변하지 않는다는 것을 파악하지 못하고 있는 것으로 보인다. 그래서 두 양이 늘어난 만큼 테이프의 수도 변화시켜 문제를 해결했다. 이중테이프의 장점은 두 양이 변하는 것은 테이프 안에 나타내고, 그 양이 변하더라고 두 양 사이의 곱셈적 관계는 불변한다는 것을 시각적으로 명확하게 보여준다는 것인데 이렇게 표현을 하는 것은 두 양의 변화를 테이프의 수로 표현한 것 이외의 의미를 얻기를 어렵다.

주어진 문제를 비표, 이중수직선, 이중테이프 모델을 활용하여 나타내고 해결하게 했을 때 대체적으로 학생들은 이를 잘 활용하고 이해하는 것으로 보였다. 그러나 분명 비표에 비해서 새로 도입된 이중수직선과 이중테이프 모델에서는 정답률이 다소 낮았다. 이것은 지금까지 주로 비표를 사용하여 비례의 의미와 원리를 탐색했고, 표는 수학 시간에 비교적 빈번하게 활용하는 모델이므로 이를 적절하게 사용할 수 있는 방법을 알고 있기 때문이라고 생각된다. 반면에 이중수직선 모델이나 이중테이프 모델은 학생들이 거의 처음 접하는 모델이고, 이를 적극적으로 조작해 본 경험도 없기 때문에 이를 숙달하기 위해서는 시간이 필요할 것이다.

이후 교사는 다양한 비례 문제와 소수와 분수로 표현된 비례 문제를 학생들에게 제시했고, 학생들은 지금까지 학습한 원리와 모델, 그리고 다양한 전략을 활용하여 문제를 해결했다. 그 중 비표와 이중수직선, 이중테이프 모델의 활용에서 나타난 특징을 정리하면 다음과 같다.

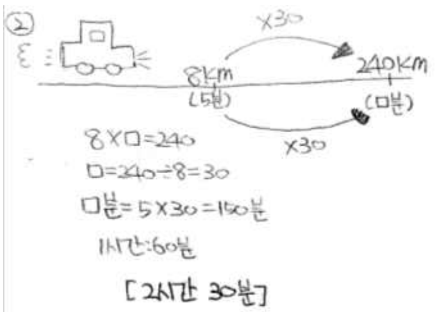
먼저, 학생들은 실생활과 관련된 비례 문제와 소수나 분수의 비로 표현된 비례 문제를 비표, 이중수직선, 이중테이프 모델을 적절하게 활용하여 해결하였다. 그 중 몇몇 학생들에게 주목할 점이 있었다. 한 학생은 이중수직선을 하나의 수직선으로 재구성하였다. 여기에서 제시된



(a) (b)

[그림 IV-12] 이중테이프를 비전형적으로 사용한 경우

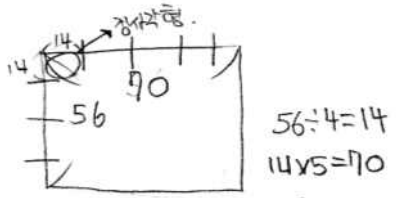
문제 맥락은 자동차가 일정한 빠르기로 8km 달리는데 5분이 걸릴 때, 같은 빠르기로 240km를 달리면 시간이 얼마나 걸리는지에 대한 것이었다. 이 학생은 문제에 대한 해결 방법 중 하나로 [그림 IV-13]과 같이 나타냈다.



[그림 IV-13] 이중수직선을 하나의 수직선으로 재구성한 경우

이 학생은 수직선의 한 곳에 거리와 시간의 양을 함께 제시하고 이 두 양이 곱셈적으로 공변하는 것을 나타내어 문제를 해결했다. 이중수직선은 학생들에게 익숙하지 않은 모델이고, 이중수직선의 전형적이지 않은 활용 중 대응하는 두 양을 두 직선의 같은 위치에 나타내는 것을 학생들이 어려워한다는 사례를 볼 때, 이처럼 하나의 수직선에 두 양을 함께 구성하도록 하는 것이 학생들의 어려움을 극복하게 하는 하나의 대안이 될 수 있을 것이다. 실제로 이중수직선을 이와 같은 형태로 제시하기도 한다.

또 다른 학생은 친구가 그림 모델을 활용해 문제를 해결하는 것을 보고, 그 모델을 자신만의 모델로 받아들여 비례 문제를 해결하는 데 지속적으로 이용하는 모습을 보였다. 처음 그림 모델이 소개된 것은 [그림 IV-3]의 액자의 가로와 세로의 길이를 결정하는 맥락이었다. 이때 발표된 그림 모델은 직사각형 모양으로 액자를 그리고 각각을 주어진 비로 분할하여 문제를 해결한 것이었다. 이후 이 학생은 그림 모델을 자신만의 문제 해결 전략으로 받아들여 톱니바퀴 문제, 소수 또는 분수로 제시된 문제에서 지속적으로 활용하였다. 이 학생이 활용한 그림 모델을 제시하면 [그림 IV-14]와 같다. 이 문제는 톱니바퀴 (가)가 4바퀴 도는 동안 톱니바퀴 (나)가 5바퀴 돌 때, (가)가 56바퀴 돌면 (나)는 몇 바퀴를 돌지 알아맞히는 것이었다.



[그림 IV-14] 새로운 그림 모델을 구성한 경우

이 학생은 위 그림 모델을 활용하여 직사각형의 가로와 세로를 각각 5칸과 4칸으로 분할하고, 56을 4로 나누었을 때 각 칸에 14씩 들어갈 수 있다는 것을 통해 (나) 톱니바퀴는 70바퀴를 돌게 될 것이라는 것을 찾아냈다. 이는 테이프를 비의 수만큼 위, 아래에 고정시키고 각 테이프 안에 같은 수가 들어감으로써 두 양의 공변과 불변의 관계를 나타내는 이중테이프 모델과 유사하다고 할 수 있다. 이처럼 학생들이 비례 상황을 이해하고 자신만의 모델을 개발하여 이를 비례 문제에 꾸준히 활용해보는 경험은 비례 추론을 이해하고 비례 추론 능력을 신장하는데 도움이 될 것이다.

위에서 제시된 사례는 이중수직선과 이중테이프 모델에서 드러나는 비례 추론의 특성을 정확하게 이해할 때, 학생들 스스로 이러한 아이디어를 반영하여 기존의 시각적 모델을 효과적으로 재구성하거나 새로운 시각적 모델을 개발하고 활용하도록 촉진할 수 있다는 것을 보여주는 것이라 할 수 있다.

그러나 여전히 [그림 IV-8]처럼 비표를 구성할 때 두 양을 곱셈적으로 공변시키지 않고 1씩 더하여 나타내거나, [그림 IV-10]의 (b)처럼 대응하는 두 양을 이중수직선의 같은 위치에 놓지 못하거나, [그림 IV-12]의 (b)처럼 이중테이프를 그릴 때 이중테이프의 수를 주어진 비만큼 고정시키지 않는 사례가 다소 있었다. 이는 비례 추론 수업에서 시각적 모델을 활용할 때 두 양의 곱셈적 공변과 불변의 관계를 이해하고, 이를 시각적 모델에서 어떻게 확인하고 표현할 수 있는지에 대한 꾸준한 논의가 필요함을 시사하는 것이라고 할 수 있다.

V. 논의 및 결론

본 연구는 비표, 이중수직선, 이중테이프 모델을 활용한 비례 추론 수업에서 시각적 모델이 비례의 의미와 원리를 탐색하는 데 어떻게 활용될 수 있는지, 그리고 비례 문제를 해결하는 과정에서 학생들이 어떠한 어려움을 겪는지를 확인하였다. 이를 바탕으로 비례 추론 수업에서 시각적 모델을 활용할 때 유의해야 할 점에 대해서 논의하겠다.

첫째, 시각적 모델을 활용한 비례 추론 수업에서 곱셈적 사고의 중요성을 강조할 필요가 있다. 비례 추론에서 각각의 양의 곱셈적 공변 관계와 두 양 사이의 곱셈적인 불변 관계를 파악하는 것은 매우 중요하다(Lobato et al., 2016). 그러나 본 연구의 결과에서 학생들은 비표에서 두 양의 공변 관계를 찾을 때 가장 먼저 덧셈적으로 접근하였다. 또한 두 개의 비를 더하여 다른 비를 찾아내기도 했다. 교사가 곱셈적 사고를 강조하자 학생들은 두 양의 곱셈적 공변 관계를 통해 비례의 의미, 비의 성질, 비례식의 성질 등을 발견하였다. 따라서 교사는 비표에서 두 양의 공변적 관계를 파악할 때, 학생들이 두 양의 변화를 덧셈적으로 파악하는 것에서 곱셈적 사고로 전환할 수 있도록 도와야 한다.

또한 시각적 모델을 활용할 때, 학생들이 두 양의 공변 관계뿐만 아니라 곱셈적 불변성을 파악할 수 있도록 주의를 기울일 필요가 있다. 특히, 비표와 이중수직선과 관련하여 학생들은 두 양의 곱셈적 관계가 자연수거나 간단한 분수일 때, 그리고 교사가 충분한 탐색 시간을 제공하고 질문을 했을 때는 이를 파악하고 문제해결에 활용했지만 그렇지 않은 경우에는 이를 거의 활용하지 않는 것을 확인할 수 있었다.

둘째, 비례 추론을 활용하여 비례식과 비례배분의 원리를 설명하도록 하기 위해서는 먼저 비례의 의미와 비례 상황이 무엇인지를 강조하여 다룰 필요가 있다. 이를 위해서는 비율이 같은 두 비에 관한 상황만을 다루기보다는 비율이 같은 여러 비를 함께 제시할 필요가 있다. 우리나라의 많은 연구에서 비율 비교를 통한 형식적인 동치비 인식에서 벗어나 비례 상황에서 두 양의 공변성과 불변성을 인식하는 것이 중요하며, 비례 상황과 비 비례 상황을 구별하는 경험이 필요함을 주장하였다(예, 김경선, 박영희, 2007; 안숙현, 방정숙, 2008; 정영옥, 2015; 정영옥, 정유경, 2016; 정은실, 2013). 그러나 현재 2009 개정 교육과정을 반영한 교과서에서는 비례식을 “비율이 같은 두 비를 등호를 사용하여 나타낸 것”으로 정의하여 제한적인 비례 상황만을 전제하고 있으며(교육부, 2015, p. 41), 비례의 의미나 비례 상황을 구별해보는 문제는 후속 단원인 정비례와 반비례 단원에서 다룬다.

본 연구에서 시각적 모델이 비례의 의미를 이해하고 파악하는 데 도움이 됨을 확인하였고, 학생들이 비례의 의미를 활용해 비의 성질, 비례식의 성질, 비례배분의 원리 등을 발견할 수 있었다. 따라서 현재와 같이 비례식을 정의하기

보다는 비례의 의미를 알고 이를 통해 비례식을 정의하고, 다양한 비례 문제를 해결하기 위해 비례 상황과 비 비례 상황을 판단해보는 것이 진정한 의미에서의 비례 추론을 하는 것이므로 비례식을 학습할 때 비례의 의미와 비례 상황에 대해서도 생각할 수 있는 기회를 제공하는 것이 필요하다.

셋째, 각각의 시각적 모델은 다양한 비례 상황을 표현하는 데 차이가 있으므로 각각의 시각적 모델에서 강조하는 비례 추론이 무엇인지를 탐색하고 이를 비례 상황에서 경험할 수 있는 충분한 기회를 제공할 필요가 있다. 각각의 시각적 모델의 장점과 이를 활용할 때의 유의점에 대해 간략하게 살펴보면 다음과 같다.

비표는 학생들에게 익숙한 모델로, 본 연구에서 학생들은 비표를 통해 두 양 사이의 곱셈적 관계를 파악하는 데 큰 어려움을 보이지 않았으며 다양한 곱셈적 관계를 비형식적으로 탐색하는 과정에서 교과서에서 제시하는 형식적인 절차 및 원리를 스스로 발견하였다(<에피소드 1~4> 참조). 물론 현행 교과서의 비례식과 비례배분 단원에서도 비표를 제시하고 있다. 그러나 비표를 활용하여 다양한 곱셈적 관계를 살펴보게 하거나 형식적 절차와 연결하기 보다는 각각의 양을 나타내고 비율이 같은 두 비를 찾는 것에 초점을 맞추어 제한적으로 사용하고 있다는 점에서 재고할 필요가 있다.

이중수직선은 대응하는 두 양을 같은 위치에 제시하고 두 양이 동시에 곱셈적으로 변화하는 것이 잘 나타나므로 두 양의 공변 관계를 직관적으로 파악하기에 용이하다(Beckmann & Izsák, 2015). 그러나 이중수직선은 우리나라 교과서에서 거의 다뤄지지 않는 모델이기 때문에 이를 활용할 때 교사의 명확한 이해와 학생들에게 충분한 활용 기회를 제공해야 한다. 특히 [그림 IV-10]의 (b)와 같이 이중수직선에서 대응하는 두 양을 같은 위치에 놓지 못하는 것은 임재훈과 이형숙(2015)의 연구에서도 지적된 바 있고 이를 개선하는 방안으로 [그림 IV-13]처럼 하나의 수직선에 두 양을 함께 제시할 수 있다는 것도 고려할 필요가 있다.

이중테이프는 주어진 비로 테이프의 수를 고정시켜 두 양 사이의 곱셈적 불변성을 파악하기에 용이하다(Beckmann & Izsák, 2015). 따라서 비표나 이중수직선에 비해 두 양의 곱셈적 불변성을 파악하도록 제시하기에 적절하다. 또한 <에피소드 5>에서 알 수 있듯이, 이중테이프는 비례배분의 원리를 직관적으로 보여주므로 비례배분과 관련된 문제해결에서도 유용하게 활용될 수 있을 것이다. 그러나 이중테이프 역시 우리나라 교과서에서 잘 다루지 않는 모델이기 때문에 이를 활용할 때 교사는 이중테이프 모델의 특징을 정확하게 이해하고 제시할 필요가 있다. 특히 학생들은 [그림 IV-12]의 (b)와 같이 고정 비를 표현하는 데 어려움을 겪으므로 이중테이프를 활용하기 위해서는 고정 비에 초점을 두어야 한다는 것을 강조하여 지도할 필요가 있다. 이러한 강조사항은 [그림 IV-14]와 같이 고정 비를 표현하는 아이디어를 적용한 새로운 모델로 발전될 수도 있다.

비표는 비례식과 비례배분 단원뿐만 아니라 규칙과 대응, 비와 비율, 정비례와 반비례 단원에서 활용하고 있으나, 위에서 언급했듯이 이중수직선과 이중테이프 모델은 우리나라 교과서에서 거의 활용하고 있지 않다. 그러나 이중수직선과 이중테이프 모델을 다양한 영역과 주제에서 활용할 수 있다는 연구가 있으므로(예, 김양권, 홍진곤, 2016; 임재훈, 이형숙, 2015; Beckmann & Izsák, 2015; Küchemann, Hodgen, & Brown, 2011, 2014; Murata, 2008), 한 단원에서만 이러한 모델을 다루기보다는 다양한 주제에서 학생들이 지속적으로 모델을 탐색할 수

있도록 재고할 필요가 있다.

본 연구는 비표, 이중수직선, 이중테이프와 같은 시각적 모델을 활용한 수업에서 학생들이 각각의 모델에 내재되어 있는 중요한 비례 추론에 참여하면서 다양한 비형식적 전략을 개발하는 과정을 탐색하였다. 학생들이 개발한 비형식적 전략은 교과서에서 궁극적으로 지도하고자 하는 형식적 절차와 직접적으로 연결되었고 학생 스스로 이러한 원리를 설명하는 데 도움이 되었다. 더 나아가 학생들은 문제를 해결하는 데 핵심이 되는 비례 추론을 적용하여 자신만의 시각적 모델을 개발하고 이를 적극 활용하여 문제를 해결할 수 있었다. 그러나 시각적 모델을 활용하는 과정에서 학생들은 올바른 비례 추론을 방해하는 다양한 어려움을 겪었다.

본 연구의 결과는 비례에 관한 교수·학습 과정에서 시각적 모델을 활용하여 보다 체계적이고 지속적인 지도를 돕기 위한 시사점을 제공한다. 이를 통해 학생들이 비례 추론을 통해 비례 상황을 개념적으로 이해하는 데 도움이 되기를 기대한다.

참고문헌

교육부(2015). **수학 6-2**. 서울: 천재교육.

김경선, 박영희(2007). 초등학생의 비례적 추론 지도에 관한 연구. **학교수학, 9**(4), 447-466.

김민경(2007). 영상적 표상이 포함된 비례 문제에서 나타난 아동들의 비례적 사고 분석. **수학교육, 46**(2), 141-153

김양권, 홍진곤(2016). 수 개념 학습에서 수직선의 도입과 활용. **한국초등수학교육학회지, 20**(3), 431-456.

안숙현, 방정숙(2008). 5, 6, 7 학년 학생들의 비례추론 능력 실태 조사. **수학교육학연구, 18**(1), 103-121.

임재훈, 이형숙(2015). 비례 추론을 돕는 시각적 모델에 대하여: 초등 수학 교과서의 비례식과 비례배분 실생활 문제를 대상으로. **수학교육학연구, 25**(2), 189-206.

정영옥(2015). 초등학교에서 비례 추론 지도에 관한 논의. **수학교육학연구, 25**(1), 21-58.

정영옥, 정유경(2016). 초등학교 5학년과 6학년의 비례 추론 능력 분석. **학교수학, 18**(4), 819-838.

정은실(2013). 초등학교 수학 교과에서의 비례 추론에 대한 연구. **수학교육학연구, 23**(4), 505-516.

Baroody, A. J., & Coslick, R. T. (2005). **수학의 힘을 길러주자**. (권성룡 외 역). 서울: 경문사. (영어 원작은 1998년 출판).

Beckmann, S., & Izsák, A. (2015). Two perspectives on proportional relationships: Extending complementary origins of multiplication in terms of quantities. *Journal for Research in Mathematics Education, 46*(1), 17-38.

Broekman, H., van der Valk, T., & Wijers, M. Teacher knowledge needed to teach ratio and proportion in secondary school mathematics: On using the ratio table. *Paper presented to the 25th ATEE Conference,* Barcelona, Spain.

Cramer, K., & Post, T. (1993). Proportional reasoning. *The Mathematics Teacher, 86*(5), 404-407.

Dole, S. (2008). Ratio tables to promote proportional reasoning in the primary classroom. *Australian Primary Mathematics Classroom, 13*(2), 18-22.

Küchemann, D., Hodgen, J., & Brown, M. (2011). Using the double number line to model multiplication. *Paper presented at Seventh Annual Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, Rzeszów, Poland.

Küchemann, D., Hodgen, J., & Brown, M. (2014). The use of alternative double number lines as models of ratio tasks and as models for ratio relations and scaling. In S. Pope (Ed.), *Proceedings of the 8th British Congress of Mathematics Education (BCME8)* (pp. 231-238). BSRLM: University of Nottingham.

Lamon, S. J. (2007). Rational numbers and proportional reasoning: Toward a theoretical framework for research. In F. K. Lester(Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning: A Project of the National Council of Teachers of Mathematics* (pp. 629-667). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Lobato, J., Ellis, A. B., Charles, R. I., & Zbiek, R.(2016). **비, 비례, 비례 추론의 필수 이해.** 서울: 교우사. (영어 원작은 2010년에 출판).

Middleton, J. A., & van den Heuvel-Panhuizen, M. (1995). The ratio table. *Mathematics Teaching in the Middle School, 1*(4), 282-288.

Murata, A. (2008). Mathematics teaching and learning as a mediating process: The case of tape diagrams. *Mathematical Thinking and Learning, 10*(4), 374-406.

National Council of Teachers of Mathematics (2007). **학교수학을 위한 원리와 규준**. (류희찬, 조완영, 이경화, 나귀수, 김남균, 방정숙 역). 서울: 경문사. (영어 원작은 2000년에 출판).

Orrill, C. H., & Brown, R. E. (2012). Making sense of double number lines in professional development: Exploring teachers' understandings of proportional relationships. *Journal of Mathematics Teacher Education, 15*(5), 381-403.

Reys, R. E., Lindquist, M., Lambdin, D. V., & Smith, N. L. (2012). **초등교사를 위한 수학과 교수법**. (박성선, 김민경, 방정숙, 권점례 역). 서울: 경문사. (영어 원작은 2009년에 출판).

Streefland, L. (1985). Search for the roots of ratio: Some thoughts on the long term learning process (towards... a theory). *Educational Studies in Mathematics, 16*(1), 75-94.

Yin, R. (2011). **사례연구방법**. (신경식, 서아영, 송민채 역). 서울: 한경사. (영어 원작은 1994년에 출판).

An Analysis of Lessons to Teach Proportional Reasoning with Visual Models: Focused on Ratio table, Double Number Line, and Double Tape Diagram

Seo, Eunmi (Graduate School, Korea National University of Education)
Pang, JeongSuk (Korea National University of Education)
Lee, Jiyoung (Paldal Elementary School)

This study explored the possibility of using visual models in teaching proportional reasoning based on the review of previous studies. Many studies on proportional reasoning emphasize that students tend to simply apply formal procedures without understanding the meaning behind them and that using visual models may be an alternative to help students develop informal strategies and proportional reasoning. Given these, we re-constructed and implemented the unit of a textbook to teach sixth graders proportional reasoning with ratio table, double number line, and double tape diagram. The results of this study showed that such visual models helped students understand the meaning of proportion, explore the properties of proportion, and solve proportional problems. However, several difficulties that students experienced in using the visual models led us to suggest cautionary notes when to teach proportional reasoning with visual models. As such, this study is expected to provide empirical information for textbook developers and teachers who teach proportional reasoning with visual models.

* Key Words : proportional reasoning(비례 추론), visual model(시각적 모델), ratio table(비표), double number line(이중수직선), double tape diagram(이중테이프)

논문접수 : 2017. 10. 10
논문수정 : 2017. 11. 1
심사완료 : 2017. 11. 5