

산술적 사고의 의미와 요소 분석¹⁾

임 미 인* · 장 해 원**

산술 지도 시 산술적 사고의 측면을 강조해야 한다는 데에 다수의 동의가 있어왔음에도 불구하고, 국내에서 산술적 사고 자체에 주목한 연구는 찾아보기 어렵다. 산술적 사고에 초점을 맞춘 지도를 위해서는 산술적 사고의 의미와 요소를 면밀히 분석할 필요가 있다. 본 연구에서는 산술적 사고의 의미와 요소를 파악하기 위해 문헌 분석을 실시하였고, 산술적 사고의 요소를 추출하기 위한 이차적인 방법으로 전문가 델파이 조사를 실시하여 종합적으로 산술적 사고의 요소를 추출하였다. 연구 결과, 내용적 사고로서 산술적 사고의 의미를 파악하고, 수 관련 5가지, 연산 관련 11가지, 공통 요소 2가지로 총 18가지의 산술적 사고 요소를 추출하였다.

1. 서론

산술은 학교수학의 기본이라 할 수 있고 실제로 초등학교 교육과정에서 수와 연산은 가장 기본이며 핵심 영역에 해당된다. 또한 후속 학습과의 연결성을 고려할 때 산술은 이후 수학 학습의 중요한 기초가 된다. 이와 같은 산술의 중요성에 비추어볼 때 ‘초등 수학에서 산술을 어떻게 지도해야 하는가?’에 대한 연구가 필수적이다.

이에 답하기 위해서는 먼저 산술의 의미를 살펴볼 필요가 있다. 국립국어원(2016)에 따르면, 산술(算術)은 ‘일상생활에서 실제로 응용할 수 있는, 수와 양의 간단한 성질 및 셈을 다루는 수학적 계산 방법’이라고 정의된다. 이로부터 ‘산술’이라는 용어 자체는 일반인들에게 방법적, 기능적 측면의 느낌을 제공한다는 것을 추측할 수 있다. 그 밖에 방정숙, 최지영(2011), 이해민, 신

인선(2011), Leontiev(2005) 등에 기초할 때, 일반적으로 수와 연산을 다루는 것을 산술이라고 인식하고 있으며 그 기능적 측면의 중요성을 간과할 수 없다.

그러나 계산 기능이 수학의 중요한 요소임에도 불구하고, 임미인, 장해원(2016)에서 주장하였듯이 단순히 계산 방법 또는 기능에만 초점을 맞추어 산술을 지도하는 것은 바람직하지 않다는 데에 다수의 동의가 있어 왔다. 산술은 계산 기능의 강조를 넘어 더 의미 있게 지도되어야 한다.

산술을 의미 있게 지도해야 한다는 주장(Brownell, 1947; Buswell, 1950)은 최근에 제기된 이슈가 아니며, 산술 지도 시 계산 기능뿐만 아니라 학생들의 개념적 이해와 절차적 이해, 적용 능력, 사고 작용 등에 관심을 기울여야 한다는 주장(Baroody & Dowker, 2003)이 있어 왔다. 또한 산술 지도 시 학생들의 사고에 관심을 기울

* 서울오류초등학교, ssbin22@sen.go.kr (제1 저자)

** 서울교육대학교, hwchang@snu.ac.kr (교신저자)

1) 이 논문은 제1 저자의 박사학위논문의 일부를 재구성한 것임.

일 필요 및 그 중요성을 주장한 연구도 다수 있어 왔다(김성준, 2002b; 도종훈, 최영기, 2003; Cobb & Merkel, 1989; Filloy & Rojano, 1989; Guberman, 2016; Krysztofiak, 2016; van Hiele, 1986). 이러한 선행 연구에 기초할 때, 산술을 의미 있게 지도한다는 것은 학생들의 사고에 주목하고 그러한 사고를 개발하고 신장시키는 것을 의미함을 알 수 있다.

이로부터 과연 산술적 사고란 무엇인지에 대한 질문이 제기된다. 일차적으로는 산술적 사고에 대해 다루는 문헌을 분석함으로써 그 의미를 탐색할 수 있겠으나 일반적으로 산술의 일반화를 대수로 취급하는 관점을 따를 때, 이차적으로 대수적 사고를 살펴보고 양자를 비교·대조함으로써 산술적 사고의 의미를 탐색할 수 있다.

후자의 분석과 관련하여 산술에서 대수로의 이행에 관한 연구는 크게, 전 대수적 접근(pre-algebra approach)과 초기 대수적 접근(early-algebra approach)의 관점으로 구분된다. 그러나 산술과 대수의 분명한 차이를 주장하는 전 대수적 접근과는 다른 관점에서 산술과 대수의 연결을 논하는 초기 대수적 접근이라 할지라도, 방정숙, 최지영(2011), 이화영(2011) 등 다수의 연구에서 양자 간에는 인지적 간격이 존재하며 그 간격을 좁히기 위한 연구가 필요하다고 하였다. 즉, 두 가지 중 어느 관점을 취하든 간에 산술에서 대수로의 이행 시, ‘인지적 격차(cognitive gap)’, ‘교수학적 단절(didactic cut)’과 같은 성격의 것이 존재한다(Filloy & Rojano, 1989; Warren, 2003)는 주장이 가능하다. 실제로 산술과 대수는 동일한 대상을 학습함에도 불구하고 서로 다른 관점에서 해석해야 하기 때문에 학생들에게 많은 어려움을 야기하는 것으로 알려져 왔다(김성준, 2003a). 즉 산술과 대수의 밀접한 관련에도 불구하고, 한편으로는 그 인식론적 간격이 매우 크기 때문에 산술과 대수는 이행이 아닌 단절로

해석될 가능성을 지닌다. 이러한 결과를 통해 대수적 사고의 특수화로서 산술적 사고의 의미를 탐색할 때, 사고의 측면 또한 단절로 해석될 여지가 있음을 파악하였다. 즉 산술의 일반화를 대수라고 함에도 불구하고 산술이 대수로 이행되는 어느 지점인가에서 양자가 구분된다면, 산술적 사고와 대수적 사고는 일정 부분 공통된 요소뿐만 아니라 서로 간에 상이한 요소가 있을 수 있다. 따라서 이행과 단절의 가능성을 모두 고려하여 대수적 사고와의 비교·대조를 통해 산술적 사고의 의미를 명확히 할 필요가 있다.

한편, 산술적 사고는 片桐重男(1991)에 기초할 때 방법적 사고가 아니라, 산술이라는 ‘내용에 관련된 수학적 사고’로 볼 수 있다. 내용적 사고의 경험과 습득은 수학적 지식의 학습을 통해서 이루어질 수 있고(박교식, 1993; 片桐重男, 1991), 즉 산술적 사고는 산술 내용을 다룰 때 경험되고 습득될 수 있는 것이다. 여기서 박교식(1993)의 논지에 따라 산술적 사고의 성격을 규명해보면, 산술적 사고는 ‘지식으로서의 산술(예, 초등학교 수학과 교육과정에서 제시하는 수와 연산 영역의 산술 내용)’의 지도를 통해 경험되고 습득되는 산술적 사고와 ‘지식으로서의 산술의 속성을 가진 현상(예, 초등학교 이전에 일상에서 경험하는 산술)’에 관련된 산술적 사고의 두 가지를 모두 포함하는 성격의 것이라 할 수 있다.

우정호(2011)는 수학 학습에서 우선적으로 요구되는 것은 수학적 사고의 본질에 대한 정확한 분석이라고 하였으며, 수학 학습을 수학적 사고의 본질에 대한 이해와 이를 통한 수학적 안목의 구성이라고 볼 때(김성준, 2003b; 우정호, 2011) 초등 수학에서 산술적 사고에 대한 이해는 중요하게 다루어지고 강조되어야 한다. 이에 학교수학, 특히 초등 수학에서 산술 교육은 어떻게 이루어지고 있으며 이러한 관점에 기초한 수학 교육계의 연구는 충분히 이루어지고 있는지 되

돌아볼 필요가 있다.

국내에서 산술에 관한 연구는 다수 이루어졌으나 산술적 사고 자체에 주목한 연구는 찾아보기 어렵다. 강문봉 외(2003)에 따르면, 수학교육에서 사고의 중요성이 강조되고 있음에도 불구하고, 실제로 수학적 사고의 구체적인 의미나 그 지도와 평가에 대한 연구 및 어떤 단계에서 학생에게 어떤 수학적 사고를 경험시켜야 하는지에 대한 연구의 뒷받침이 미흡하다. 다행히 고무적인 것은 오늘날 점차 수학에 관한 일반적, 방법적인 사고와 함께 기하적 사고, 함수적 사고, 통계적 사고 등과 같은 수학 내용적 측면의 사고(강완 외, 2014)가 주목받고 있다는 점이다.

학생들이 산술에 대해 이해하기 위해서는 그와 관련된 사고인 산술적 사고가 수반되어야 하고(Guberman, 2016), 산술적 사고의 본질을 이해하고 이를 통해 수학적 안목을 구성하는 방향으로 산술 학습이 이루어져야 한다. 이러한 연구의 배경과 필요성을 토대로 본 연구에서는 산술적 사고의 의미와 요소를 면밀히 분석하여 학생들의 산술적 사고를 신장하기 위한 산술 교육에 이론적, 실제적 토대를 제공하는 것을 연구의 목적으로 설정하였다.

II. 산술 및 산술적 사고 관련 문헌 분석

1. 산술

산술적 사고의 본질을 파악하기 위해서는 우선, 산술 개념에 대한 고찰이 요구된다. 이는 본 연구의 관심인 내용적 사고로서 산술적 사고의 의미와 그 요소를 파악하는 데 있어 중요한 시사점을 줄 수 있기 때문에 필수적이다. 그러나 산술에 대한 연구는 그 양이 매우 방대하고 본

연구의 핵심을 벗어나므로 여기서는 산술에 관해 연구했던 학자들 중 교수·학습 측면에서의 접근을 시도했던 De Morgan, Thorndike, Brownell의 연구에 기초하여 산술 개념을 간략히 탐색하고자 한다.

De Morgan(1830)의 《Elements of Arithmetic》에 따르면, 그가 산술을 자연수, 분수, 소수를 다루는 계산 방법과 이를 응용한 문제 해결로 인식한 것을 알 수 있다. 산술은 수를 대상으로 하기 때문에 수 개념에 대한 이해는 산술 및 산술적 사고의 기본이라 할 수 있다. De Morgan(1830), 유미경 외(2008)에 기초할 때, De Morgan은 양을 나타내는 개념인 수는 일대일 대응 맥락에서 인지되기 시작하고 이러한 수 개념은 세기와 관련 된다고 보았음을 알 수 있다. 일대일대응을 통한 수 세기는 점차 효율적인 수 세기 전략의 개발로 이어지게 되고 이는 기수법, 자릿값을 이용한 표현과 그 이해로 연결되는 것이다. 또한 De Morgan(1830)은 세기 활동을 보다 간단히 하기 위해 사칙연산이 개발되었으며, 이로부터 양을 의미하는 기호로서 숫자, 분수와 양 사이의 관계를 나타내는 기호로서 $+$, $-$, \times , \div 와 같은 산술 기호가 개발되었다고 하였다. 산술에서 숫자는 양을 의미하고 사칙연산은 수의 의미인 양으로부터 파생된 것이지만, 유미경 외(2008)에 따르면 De Morgan은 산술을 추상적인 수 자체에 관한 것으로 보고 있다. 추상적인 수를 도입함으로써 숫자로 표현되는 모든 양에 대해 성립하는 성질을 조사할 수 있다는 것이다. 이와 같이 모든 수에 대해 성립하는 성질을 탐구하는 것은 점차 일반화로 이어지며, 이때 숫자 대신에 문자를 사용하기 시작하는 것은 산술과 산술 이후를 구분하는 기준이라 할 수 있다.

Thorndike(1929)는 학교수학에서 지도해야 할 산술 과제 7가지를 제시하였다. 수의 의미, 십진 기수법 체계의 본질, 덧셈, 뺄셈, 곱셈, 나눗셈의

의미, 임의의 일반적인 측도의 본질 및 관계, 정수, 분수, 소수를 더하고 빼고 곱하고 나눌 수 있는 능력, 문제 해결 시 이와 같은 지식과 능력을 적용하는 능력, 백분율, 이자 등 생활에서 발생하는 일반적인 것들에 관한 문제를 해결할 수 있는 특별한 능력이 그것이다. 비록 Thorndike가 산술의 기능 및 훈련, 연습을 강조하기는 하였으나, 그의 저서 《The Psychology of Arithmetic》 곳곳에서 산술에서의 사고 및 추론은 결코 기능과 별개의 것이 아님을 언급하고 있음을 통해, 그가 반복 연습을 통해서 산술의 기능뿐만 아니라 사고도 신장시킬 수 있다고 보았음을 파악할 수 있다. 즉 Thorndike가 제시한 산술 과제 중 일부는 단순히 산술의 기능적 측면뿐만 아니라 사고의 관점에서 해석이 가능하다.

의미 있는 산술 교육의 필요를 주장했던 Brownell(1947)은 산술의 의미를 크게 기본적인 수 개념의 이해, 기본 연산에 대한 이해, 산술에서의 원리, 관계, 일반화의 이해, 심진법 수 체계의 이해의 4가지로 범주화하여 제시하였다.

De Morgan, Thorndike, Brownell의 연구에 기초하여 산술의 요소를 정리하면 <표 II-1>과 같다²⁾.

2. 산술적 사고의 의미

산술 과제 수행을 사고의 관점에서 접근한 연구들은 크게 ‘산술적 사고’의 정의를 제시하고 그 용어를 사용한 경우, 산술적 사고에 대한 정의 제시 없이 그 용어를 사용한 경우, ‘산술에서의 사고’와 같은 유사한 의미의 용어를 사용한 경우로 구분된다. 본 연구에서는 산술적 사고의 의미를 규명하고자, 이러한 세 가지 경우 모두에서 그 용어를 탐색하였다.

첫째, 산술적 사고의 정의를 제시하고 있는 경

우이다. 문헌 분석 결과, 용어의 정의를 명시적으로 언급한 연구는 많지 않았으며, 김은혜(2008)는 ‘대수적 사고와 달리 일반화한다는 사고를 하지 않고 주어진 문제에 대해 단순한 산술 계산이나 실제적인 실행 또는 조작을 통해서 답을 구하는 사고’로, 도종훈, 최영기(2003)는 ‘산술의 대상과 그들 사이의 관계 인식 및 연산 속에 내재된 사고’로, 이화영(2011)은 ‘사칙연산이나 조작을 통해서 주어진 문제에 대한 해를 구하는 사고’라고 정의하였다. 즉 산술적 사고가 ‘산술과 관련된 사고’, ‘산술 과제를 수행할 때 수반되는 사고’를 의미하고, 그 안에 여러 요소를 내포하고 있는 사고로 간주하는 것으로 분석된다.

둘째, 산술적 사고에 대한 정의 제시 없이 그 용어를 사용한 경우이다. Filloy & Rojano(1989), Guberman(2016), Krysztofiak(2016), Leontiev(2005), Warren(2003)뿐만 아니라 Piaget(1941)에서도 산술적 사고라는 용어는 정의 없이 등장하고 있다. Piaget(1941)는 양의 보존 개념은 산술적 사고를 위한 선행적인 조건이라고 주장함으로써, 산술을 위해서 필요한 조건을 언급하는 맥락에서 산술적 사고를 사용하고 있다. Guberman(2016)은 산술에 대한 필수 이해를 지니기 위해서는 사고를 요하는 활동이 수반되어야 하고, 산술에서는 산술적 사고가 필요하다고 주장하였다. 또한 Guberman은 이러한 산술적 사고를 van Hiele의 기하적 사고와 관련 지어 설명하고 산술적 사고의 수준별 특징을 제시하였다. 이를 통해 Guberman(2016)에서 제시한 산술적 사고는 산술이라는 내용과 관련된 사고를 의미한 것임을 파악할 수 있다. 한편 Filloy & Rojano(1989), Warren(2003)은 대수 학습이 시작될 때 산술적 사고에서 대수적 사고로의 이행이 이루어진다고 주장

2) 각각의 분석 결과를 관련 내용이 언급되는 지점에서 표로 제시하는 것이 독자의 이해를 돕겠으나, 이후 <표 II-1>에서 전체적으로 종합하여 분석하는 과정에서 동일 내용의 반복이 불가피하고 지면의 제약 상 <표 II-1>에서 일괄 제시하였음을 밝힌다.

함으로써 대수적 사고로 전환되기 이전의 관련 사고를 산술적 사고로 간주하고 있음을 알 수 있다. 그 밖에 Krystofiak(2016), Leontiev(2005) 등의 관련 선행 연구 분석 결과, 산술적 사고에 대한 정의 제시 없이 그 용어를 사용한 선행 연구도 산술적 사고를 ‘산술과 관련된 사고’, ‘산술 과제를 수행할 때 수반되는 사고’의 의미로 사용하였음을 파악할 수 있다. 또한 몇몇 연구는 대수적 사고로 전환되기 이전의 관련 사고를 산술적 사고로 제시하고 있는 것으로 나타났다.

셋째, ‘산술에서의 사고’와 같은 산술적 사고와 유사한 의미의 용어를 사용한 경우이다. Buswell (1950)은 산술적 사고와 유사한 의미로 ‘산술을 배울 때 동반되는 사고’라는 표현을 사용하였으며, Cobb & Merkel(1989)은 산술 학습 시 학생들의 사고 작용에 관심을 기울였고 산술적 사고와 유사한 의미로 ‘산술 학습 시 학생들의 사고’라는 표현을 사용한 것을 알 수 있다.

3. 산술적 사고의 요소

이 절에서는 산술적 사고 요소를 보다 면밀히 탐색하기 위하여 크게 네 가지 관점에서 선행 연구를 분석하였다. 구체적으로, 산술적 사고 관련 연구에서 산술적 사고 요소 추출, 대수적 사고와의 비교를 통한 산술적 사고 요소 추출, 산술적 추론과의 비교를 통한 산술적 사고 요소 추출, 수 감각 및 연산 감각과의 비교를 통한 산술적 사고 요소 추출이다. 이와 같은 분석은 산술적 사고 자체에 대한 연구가 부족할 뿐만 아니라, 다른 내용적 사고와 마찬가지로 산술의 특징 중 어느 측면을 강조하면서 정의하느냐에 따라, 학자에 따라, 수학에서 요구하는 수준에 따라 산술적 사고가 다양하게 정의될 수 있기 때문이다(김성준, 2002b).

가. 산술적 사고 관련 연구에서의 산술적 사고 요소 탐색

Guberman(2016)은 van Hiele의 수준 이론에 기초하여 산술적 사고의 수준별 특징을 파악하였다. Guberman(2016)이 제시한 산술적 사고의 수준별 특징을 토대로 산술적 사고 요소를 추출하면 <표 II-1>과 같다. 이때 Guberman(2016)은 형식적 증명, 수학적 이론에 대한 핵심 개념의 사용 등 다소 고차적인 사고 요소까지도 산술적 사고 요소로 보았다는 것에 주목할 필요가 있다. 따라서 추후 본 연구에서의 문헌 분석 및 델파이 조사를 통해 산술적 사고 요소를 추출할 때, 이러한 요소의 포함 여부에 대해 면밀히 고찰해야 할 것이다.

Warren(2003)은 산술적 사고에서 대수적 사고로의 성공적인 이행을 위해서는 수학적 구조에 대한 이해와 연산 감각이 필수적이며, 따라서 산술 학습 시 이러한 산술적 사고에 대한 충분한 경험이 제공될 것을 제안하였다. 먼저, 수학적 구조는 두 양 사이의 관계, 연산의 성질, 연산들 간의 관계, 여러 양들 간의 관계와 관련되며, 대수적 사고로의 이행을 위해서 산술 학습 시 이러한 구조에 대해 이해할 수 있도록 지도해야 한다고 하였다. 또한 Warren(2003)은 최소한 하나의 집합 이상의 수학적 대상에 있어서 연산을 사용할 수 있는 능력을 연산 감각이라고 보고 산술적 사고에서 대수적 사고로의 이행에서 연산 감각의 역할을 제시한 Slavit(1999)의 10가지 측면을 그 성격에 따라 성질, 관계, 적용의 3가지로 범주화하여 정리하였다. 성질 측면에 해당하는 요소로는 연산을 구성 요소로 분해할 수 있는 능력, 수 구구에 대한 이해, 연산의 성질에 대한 이해, 연산을 표현하는 다양한 기호 체계에 대한 이해의 4가지를 제시하였다. 관계 측면에 해당하는 요소로는 연산 간의 관계 이해, 여러

수 체계에 걸친 연산의 다양한 표현들 간의 관계에 대한 이해, 개념들 간에 거꾸로 돌아가거나 앞으로 나아갈 수 있는 능력의 3가지를 제시하였다. 적용 측면에 해당하는 요소로는 다양한 맥락에 적용할 수 있는 능력, 맥락이 없는 상황에 적용할 수 있는 능력, 알지 못하고 임의의 단위들에 적용할 수 있는 능력의 3가지를 제시하였다. Warren(2003)으로부터 파악한 요소를 정리하면 <표 II-1>과 같다.

한편, 이화영(2011)은 산술적 사고 자체에 집중한 것은 아니지만 초등학생의 대수 추론 능력에 관한 연구에서 자연수, 분수, 소수의 의미 이해와 표기법과 같은 기본적인 개념의 이해, 기본적인 연산의 의미 이해와 적절한 선택, 산술의 원리, 수들 간의 관계와 같은 연산의 기본 성질 이해, 심진법, 위치적 기수법 체계의 이해와 이용 등을 산술적 사고로 제시하고 있다(<표 II-1>).

나. 대수적 사고와의 비교를 통한 산술적 사고 요소 탐색

대수적 사고와의 비교를 통해 산술적 사고를 탐색하기 위해서는 관련 선행 연구에서 산술과 대수 양자를 어떻게 비교했는지 확인할 필요가 있다. 산술적 사고와 대수적 사고라는 것은 산술과 대수를 수행할 때 수반되는 사고이기 때문이다. 따라서 산술과 대수 및 이를 수행할 때 수반되는 산술적 사고와 대수적 사고에 대한 선행 연구를 종합적으로 비교 분석하면서 산술적 사고 요소를 탐색하였다.

김성준(2003b)은 Amerom(2002)을 종합하여 산술과 대수는 모두 일반화, 문자 기호의 사용, 추론이 수반되지만, 각각의 구체적인 특징에 있어 차별화된다고 밝혔다. 김성준(2003b)은 산술과 대수의 비교와 더불어 산술적 사고와 대수적 사

고를 비교하여 논하였으며, 이 중 산술적 사고에 대해 살펴보면 다음과 같다. 먼저 일반화의 측면에서 살펴보면, 산술적 사고는 상황에 따라 특정한 방법과 특정한 값을 취하게 되고 계산 과정이 강조된다. 문자 기호의 측면에서 살펴보면, 산술에서 문자는 측정 단위 또는 대상을 나타내며 그에 맞는 문자 기호의 이해를 요한다. 연산 또한 산술에서는 수치적 결과를 얻기 위해 무언가를 하라는 명령으로 이해할 수 있어야 한다. 즉 산술적 사고는 연산과 그 표현에 있어 동적이고 절차적 개념으로 볼 수 있어야 하는 것이다. 마지막으로 추론의 측면에서 살펴보면, 산술에서는 알려진 양, 고정된 수, 대체로 특정한 상황에서 추론이 이루어진다. 김성준(2003b)에 따르면 산술에서의 추론은 예컨대 거꾸로 계산하기 또는 시행착오 전략을 통해 문제를 해결할 때 이루어진다고 하였다. 또한 산술에서는 역연산을 통해 문제를 해결하려는 경향을 보이며, 반면 대수에서는 먼저 방정식을 세우는 방식으로의 문제 해결이 특징적이다. 즉 산술적 사고에서 요구하는 추론은 대수적 사고의 경우에 비해 비형식적인 양상을 나타낸다(<표 II-1>).

Oliveira & Mestre(2014)는 대수적 사고의 관련된 일반화를 위해 산술을 이용할 수 있어야 한다고 주장하였다. 즉 대수적 사고는 그보다 앞서 다룬 산술적 사고를 수단으로 한다는 것이다. 따라서 대수적 사고 요소 중 일부는 산술적 사고 요소와 연결될 수 있고, Oliveira & Mestre(2014)에 제시된 대수적 사고의 양상 중 산술과 관련된 것을 추출하면 Oliveira & Mestre가 산술과 관련된 사고라고 여긴 요소를 확인해 볼 수 있다. Oliveira & Mestre(2014)에서 제시한 10가지 대수적 사고의 양상 중 수 사이의 관계 탐구하기, 동치 관계 탐구하기, 연산의 성질 탐구하기, 역연산 관계 탐구하기, 다양한 표현 탐구하기, 다양한 표현을 사용한 관계 탐구하기, 일반화를 일상

언어로 나타내기, 일반화를 다양한 표현으로 나타내기의 8가지가 일반화된 산술과 직접적으로 관련된 대수적 사고의 양상으로 볼 수 있고, 이 중 일부가 산술적 사고와 연결될 가능성을 추측할 수 있다. 앞서 언급한 김성준(2003b), Amerom(2002)의 연구 결과를 토대로 고찰하면, 동치 관계 탐구하기는 대수적 사고 요소로 포함될 가능성이 크다. 또한 Oliveira & Mestre(2014)는 김성준(2003b), Amerom(2002)과는 달리, 특정 사례 집합으로부터 수학적 아이디어를 일반화하는 것을 대수적 사고로 명시하고 있다는 차이가 있다. 이로부터 Oliveira & Mestre(2014)에서 추출한 산술적 사고 요소는 <표 II-1>의 5가지이다.

한편 앞서 살펴본 것처럼 일반화의 경우, 특수한 수 상황의 일반화를 산술적 사고 요소로 보는 관점(김성준, 2003b; Amerom, 2002; Guberman, 2016)과 특정 사례 집합으로부터 수학적 아이디어를 일반화하는 것을 대수적 사고 요소로 보는 관점(Oliveira & Mestre, 2014) 두 가지 주장이 존재하는 것을 알 수 있다. 이와 관련하여, Thorndike(1962)에 따르면 각각의 특정 수를 대상으로 하는 산술에서는 형식 불역의 원리, 문자 기호에 대한 동적인 해석과 같은 사고 작용은 아직 이루어지지 못함을 알 수 있다. 만약 아동이 뚝이 작아지는 자연수끼리의 나눗셈만을 경험했다면, 뚝이 커지는 분수의 나눗셈 해결 시 자신의 경험에 기초하여 $4 \div \frac{1}{4} = 1$ 과 같은 오류를 보이게 된다는 것이다. Thorndike(1962)에서 일반화를 산술적 사고 요소로 볼 수 있을지에 관해 직접적으로 언급한 것은 아니지만, 제시된 오류 사례는 만약 산술적 사고 요소 중 하나로 일반화를 포함시키기 위해서는 특정한 수 상황에 대한 일반화라는 조건이 뒤따라야 함을 파악케 한다.

다. 산술적 추론과의 비교를 통한 산술적 사고 요소 탐색

산술적 사고에 대해 논하기 위해서는 그와 유사한 의미를 지닌다고 여겨지는 산술적 추론과의 관련성을 규명할 필요가 있다. 우정호(2011)는 수학적으로 사고하는 것을 다음과 같이 크게 4가지로 범주화하여 제시한 바 있다.

- 여러 가지 계산법, 문제 해결에 이르는 명확한 절차, 알고리즘을 능숙하게 구사하고 이를 개발하는 것
- 수학적인 안목을 갖고 충실한 개념적 사고를 하면서 수학적인 용어와 기호를 구사하는 것
- 수학적인 명제를 증명하고 수학 개념, 원리, 법칙을 귀납과 유추를 통해 추측하고 발견하는 것
- 수학의 여러 가지 개념, 원리, 법칙 사이의 관련성을 파악하고 수학적 내용과 수학 외적 상황의 관련성을 파악하여 문제를 수학적으로 해결하는 것

이 중 셋째 사고는 일반적으로 수학적 추론과, 넷째 사고는 수학적 모델링 및 문제 해결과 관련이 있다고 볼 수 있다. 여기서 또 하나 주목할 점은 첫째와 둘째 사고이다. 계산법, 알고리즘을 능숙하게 구사하고 개발하는 것, 수학적인 용어와 기호의 사용까지도 수학적 사고로 보고 있는 것이다. 이러한 4가지 수학적 사고는 모두 본 연구의 관심인 산술과도 관련이 있으며 산술 학습 시 가정되는 사고들이라고 볼 수 있다.

산술적 사고가 산술적 추론을 포함한다는 우정호(2011)의 이와 같은 관점은 Thorndike(1929)에서도 확인이 가능하다. 산술에서 기능과 연습의 중요성을 주장한 것으로 잘 알려진 Thorndike(1929)는 산술적 추론을 새로운 문제 상황에서 조직화된 습관의 협력에 의한 선택과 조절을 통

하여 문제를 해결하는 것으로 설명한다. 익숙하고 이미 알고 있는 상황에서는 추론의 필요를 느끼지 못하고 기계적 반복이나 연습이 최선일 수 있으나, 새로운 문제 상황에서는 추론의 여러 행동 유형을 피하게 된다는 것이다. 그는 산술에서의 사고는 새로운 문제 상황을 다룰 때 유용하며 여러 본드(bond)들이 조직적으로 함께 작용하는 것을 추론이라고 말할 수 있다고 하였다(Thorndike, 1929). Thorndike(1929)는 추론에 대한 오해 중 하나는, 추론에 의한 원리 이해를 기계적인 계산 수행, 문제 읽기, 구구 기억, 단순한 습관과 기억에 의해 행해지는 것 등과 지나치게 극단적으로 구별하는 것이라고 하였다. 이를 통해 기능 및 연습을 강조했던 Thorndike 조차도 '이해'와 '기능'이 전적으로 분리되는 별개의 것이 아니라는 견해를 지니고 있음을 파악할 수 있다.

우정호(2011)와 Thorndike(1929)의 견해에 기초할 때 본 절의 관심인 산술적 추론은 산술적 사고에 포함되는 개념으로 볼 수 있으며, 본 연구에서 계산 수행, 알고리즘을 능숙하게 구사하고 이를 개발하는 것, 산술 용어 및 기호의 사용, 산술적 추론, 산술을 통한 모델링 및 문제 해결을 산술적 사고 요소로 포함시킬 수 있는 여지를 확인할 수 있다(<표 II-1>).

이화영(2011)에 따르면 산술적 추론은 직관적으로 세기에 의한 방법이나 수를 조작하는 방식에 의한 추론 방법이다. 한편 전형식적 대수 추론은 대수식을 세워 문제를 푸는 형식적 대수 추론과는 달리, 산술적 추론 방식에서는 벗어나 있으면서 변수와 기호, 대수 구문 규칙을 사용하지 않는 대수 추론 유형이다. 즉, 문제의 구조를 파악하거나 문제에 주어진 양들 사이의 관계를 파악하여 문제에 접근하는 추론 방법이라고 할 수 있다. 또한 이화영(2011)은 양적 추론, 비례적 추론을 산술적 추론에서 형식적 대수 추론 사이

에 위치한 것으로 제시하면서도, 이 두 가지를 산술적 추론으로 포함시킬 수도 있다고 하였음에 주목할 필요가 있다. 이로부터 전형식적 대수 추론의 일부 요소, 특히 양적 추론은 산술적 사고 요소로도 볼 수 있음을 파악할 수 있다.

라. 수 감각 및 연산 감각과의 비교를 통한 산술적 사고 요소 탐색

마지막으로 수 감각 및 연산 감각과 산술적 사고와의 관계에 대해 고찰함으로써 산술적 사고 요소를 탐색하였다. 먼저, 김수환 외(2010), Howden(1989), Slavit(1999) 등 연산 감각 또는 수 감각의 정의를 제시한 연구 결과에 기초할 때, 다수의 연구에서 수 감각, 연산 감각 모두 일종의 느낌이라고 정의한 것을 확인할 수 있다. 최지선, 박교식(2009)은 일반적으로 수 감각을 직관, 생각, 또는 느낌 등으로 보고 있으나 여전히 그 의미가 모호하고 분명하지 않다고 주장하였다. 또한 결국 그 표징은 행동으로 드러날 수밖에 없기 때문에 수 감각은 일종의 행동 또는 행동할 수 있는 능력으로 제정의 된다는 것이다. 수 감각에 대한 정의와 함께 수 감각의 요소를 제시한 연구로는 최지선, 박교식(2009), 김수환 외(2010), Howden(1989)을 살펴볼 수 있다. 최지선, 박교식(2009)은 수 감각에 대한 선행 연구에 기초한 논의로부터, 수 감각의 하위 요소로서 일상생활에서 수의 파악, 수의 의미 이해, 수의 크기 이해, 계산의 필요성 파악, 계산의 성질 이해, 계산 사이의 관계 파악, 다양한 계산 전략 사용, 계산 결과 이해, 어렵수·어렵셈하기, 다양한 어렵 전략 사용, 어렵의 합리성 판단 등을 제시하였다. 김수환 외(2010), Howden(1989)은 수의 다양한 의미에 대한 이해, 수와 수 사이의 관계 파악, 수의 크기 이해, 효율적인 계산 전략 사용, 양에 대한 적절한 감각을 수 감각의 요소로 제

시하였다(<표 II-1>).

이러한 수 감각의 요소를 살펴보면, 대부분이 산술 학습 시 학생의 사고 작용과 무관하지 않기 때문에 수 감각과 산술적 사고 간의 밀접한 관계를 추측해 볼 수 있다. 양자가 유사한 성격의 요소를 지니기 때문에 완전히 별개의 것으로 취급하기는 어려우나, 수 감각을 수에 대한 직관 또는 느낌이라고 정의하는 것을 따를 때 양자가 완벽히 동일한 대상이라고 단정 짓기도 어렵다. 즉 수 감각 요소 중 일부가 산술적 사고 요소와 일치할 수 있음을 파악케 한다.

마. 문헌 분석으로부터 추출된 산술적 사고 요소

결과적으로, 산술적 사고 요소를 추출하기 위해서는 이러한 선행 연구의 결과로부터 합의를 도출할 필요가 있다. 분석 결과를 크게 5가지 관점으로 범주화하여 관점 간에 공통 요소를 파악함으로써 이러한 요소를 문헌 분석을 통한 산술적 사고 요소로 추출하였다. 이때 산술적 사고 요소 추출을 위한 분석의 관점 중 하나로 산술 요소를 포함한 것은 산술적 사고가 내용적 사고의 성격을 띠고 개념은 사고의 단위가 되므로(우정호, 2011), 산술 요소 중 일부가 산술적 사고 요소로 추출될 가능성이 있기 때문이다.

분석 방법은 다음과 같다. 5가지 관점 중에서 2가지 이상의 관점에서 공통적으로 제시하고 있는 요소를 추출해 본 연구에서의 문헌 분석을 통한 산술적 사고 요소로 보고 음영 처리하여 나타내었으며, 1가지 관점에서만 언급되어진 요소는 공통 요소가 아니므로 산술적 사고 요소로 볼 수 있는 가능성이 낮아 제외하였다. 이때, 이와 같이 제외된 요소 중에 그 밖의 관련 선행 연구에 기초하여 의미 있게 고찰할 수 있는 요소가 발견되었기에 해당 요소 옆에 *(기타 관련 선행 연구를 통해 산술적 사고 요소로 포함될

수 있는 가능성이 파악된 요소), **(기타 관련 선행 연구를 통해서도 산술적 사고 요소로 포함될 가능성이 작은 것으로 파악된 요소)와 같이 표시하고 그에 대하여 추가적으로 논의하였다. 한편 공통 요소 중 ‘일반화’는 앞서 언급했던 것처럼 기타 관련 선행 연구를 통해 산술적 사고 요소로의 포함 여, 부 둘 다의 가능성이 파악된 요소여서 */**로 표시하고 그에 관한 논의를 덧붙였다. 이를 종합적으로 정리하면 <표 II-1>과 같다.

<표 II-1>에서 2가지 이상의 관점에서 공통적으로 제시하고 있는 산술 및 산술적 사고 관련 요소를 추출하였다. 추출된 요소들은 크게 수 관련 요소, 연산 관련 요소, 둘 다에 포함되는 공통 요소로 범주화가 가능하다. 또한 Warren(2003)에 기초하여 다시 성질, 관계, 적용 측면으로 재범주화할 수 있다. 이때 세 가지 측면 간의 밀접한 관련을 고려하여 각 측면 사이를 점선으로 표시하였다. 이와 같이 범주화한 결과는 <표 II-2>와 같다.

선행 연구에서 공통적으로 제시하지 않았기에 <표 II-2>에 최종적으로 포함되지 않았으나 기타 관련 연구를 통해 의미 있게 고찰할 수 있는 요소 및 선행 연구에서 공통된 요소로 추출되었으나 기타 관련 연구에서 산술적 사고 요소로의 포함에 대해 상반된 견해가 파악된 요소에 대한 추가적인 논의를 덧붙인다.

<표 II-2> 문헌 분석으로부터 추출된 산술적 사고 요소

	수 관련 요소	연산 관련 요소	공통 요소
성질	<ul style="list-style-type: none"> • 수의 의미 이해 (다양한 수 인식 및 표현, 일대일대응 등 수 세기, 기수법 이해) • 수의 성질 이해 	<ul style="list-style-type: none"> • 연산의 의미 이해 • 계산하기 (연산 수행 방법, 알고리즘, 수 구구 이해 및 전략 사용) • 연산의 성질 이해 	산술 기호 및 용어 이해
관계	<ul style="list-style-type: none"> • 수 비교 (두 양 또는 여러 양 비교, 같은 그룹과 다른 그룹의 수 비교 포함) • 수 사이의 관계 이해 	<ul style="list-style-type: none"> • 연산 간의 관계 이해 • (특정한 수 상황과 방법의) 일반화 	
적용		<ul style="list-style-type: none"> • 산술 추론 (비형식적 추론) • 실제 문제 해결에의 응용 (다양한 맥락, 비맥락 상황에 적용할 수 있는 능력, 적절한 연산의 선택, 모델링 포함) 	

먼저 이화영(2011)은 역순서로 계산하기, 결과에서 과정을 역으로 조작하여 풀기를 산술적 수단으로 제시하고 있으며, 김성준(2003a) 또한 대수 이전에 거꾸로 풀기를 지도함으로써 효과적인 대수 학습으로의 이행이 가능하다고 함으로써, ‘개념들 간에 거꾸로 돌아가거나 앞으로 나아갈 수 있는 능력(*)’은 산술적 사고 요소로 포함될 가능성이 있다. 다만 거꾸로 돌아가기는 가역적 사고와 관련되므로, 단지 산술적 사고 요소로만 한정지을 수 없다는 반론의 여지가 있다.

Thorndike(1962)는 산술이 다양하고 특별한 사례들에 적용되는 논리적인 원리가 아니라 양과 관계에 관한 특별한 행동 습관의 집합이라고 하였고, 학생들은 원리로부터의 연역에 의해 산술적 상황을 분석하거나 정당화하지 못한다고 하였다. 김성준(2003a) 또한 논리적인 관계 인식을 산술이 아닌 대수에 관한 것으로 제시하고 있기 때문에 ‘논리 이해 / 자료 간의 논리적 관계 인식(**)’은 산술적 사고라고 보기는 어렵다. 또한 Thorndike(1962)의 주장에서 추론할 수 있듯이 ‘산술적 주장 분석 및 타당성 확인(**), 형식적 증명(**), 수학 이론에 대한 주장, 정리, 증명의 사용(**)’은 산술적 사고보다 고차적인 사고로

보여 지며, 우정호(2011) 등에 따르면 이러한 사고는 산술이라는 특정 내용이 아닌, 수학 전반에서 요구되는 귀납적, 연역적 사고와 관련된 것으로 볼 수 있다. 따라서 이와 같은 3가지 요소를 산술적 사고 요소로 포함시킬 수 있는 가능성은 낮아 보인다.

한편, ‘일반화(*/**)’는 앞서 언급하였듯이 두 가지 경우로 나누어 가능성을 생각해 볼 수 있다. 상황에 따라 특정한 방법과 특정한 값을 취하고 특정 수 상황을 일반화(*)한다면 이는 산술적 사고의 성격을 띠다고 보는 경우와 수학적 대상을 강조하고 일반적인 관계와 일반적인 방법을 강조하면서 수들 사이의 관계를 일반화(**)하는 것은 대수적 사고와 관련된다고 보는 경우이다. 또한, 일반화 역시, 대표적인 방법적 사고의 성격을 띠기 때문에 이를 산술적 사고 요소로 제한하는 것에 대해서는 추가적인 고찰이 요구된다. 김성준(2003a), 이화영(2011)에서도 밝혔듯이, 산술적 사고와 대수적 사고를 구분하는 일은 결코 단순한 문제가 아니며, 위의 6가지를 산술적 사고 요소로 볼 수 있을지에 대한 판단은 이에 대한 심도 있는 이차적 연구의 필요로 이어진다.

III. 연구 방법

II장에서 문헌 고찰을 통해 산술적 사고의 의미를 탐색한 후, 산술적 사고 요소를 추출하기 위해 일차적으로 산술적 사고 관련 문헌을 분석하여 선행 연구에서 제시하고 있는 산술적 사고 요소를 탐색하였다. 그러나 국내·외에서 아직 산술적 사고 자체에 대한 연구가 충분히 이루어지지 않아 문헌 분석만으로는 그에 대한 합의된 내용을 찾기 어렵다는 한계가 있다. 이에 본 연구에서는 이차적으로 전문가 델파이 조사를 실시하여 수학교육 전문가가 생각하는 산술적 사고 요소는 무엇인지 분석하고, 최종적으로 산술적 사고 요소를 추출하였다. 구체적인 연구 방법 및 절차는 다음과 같다.

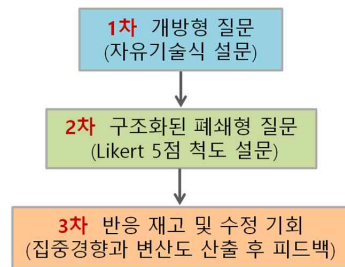
1. 조사 대상

산술적 사고의 요소를 추출하기 위해 수학교육 전문가 20명(국내 교육대학교의 수학교육 및 수학 전공 교수 16명, 수학교육 관련 박사학위를 취득한 경력 10년 이상의 전·현직 초등학교사 4명)을 델파이 패널로 선정하였다. 델파이 조사의 경우 전문가의 선정뿐만 아니라, 절차를 반복함에 따른 패널들의 이탈을 방지하는 것이 매우 중요한 문제이므로(이종성, 2001), 패널의 이탈 방지 등 델파이 조사 시 유의 사항을 염두에 두고 조사를 실시하였다.

2. 조사 방법

델파이 조사는 이종성(2001)에서 제시한 델파이의 일반적인 절차에 따라 3회에 걸쳐 이루어졌다. 먼저 델파이 조사를 위해 설문지를 제작한 후, 조사 대상인 전문가 집단 개개인에게 설문지를 발송하여 의견을 수렴하였다. 델파이 1차 조

사는 2016년 5월 최초 패널로 선정된 20명을 대상으로 이메일, 전화, 면담의 방법을 통해 실시되었다. 1차 조사에 응답한 전문가에게 2016년 7월 2차 조사가 이루어졌으며, 19명이 그에 회신하였다. 이들을 대상으로 2016년 9월 3차 조사를 실시하였고 최종적으로 총 18명이 응답하였다. 본 연구의 델파이 조사 전개는 [그림 III-1]과 같다.



[그림 III-1] 델파이 조사의 전개

1차 조사는 자유기술식 설문을 실시하여 수학교육에 있어서 산술적 사고 요소라고 생각하는 것과 초등 수학에서 반드시 지도되어야 하는 산술적 사고 요소에 대해 기술하도록 하였다.

2차 조사의 설문은 1차 조사의 응답 결과 추출된 요소를 수학교육 전문가 2인의 검토를 받아 범주화하여 구성하였다. 구체적으로 수 관련 10개 요소, 연산 관련 19개 요소로 범주화하였으며, 총 29개 요소에 대하여 산술적 사고 요소로서 ‘매우 적절하다(5점)’부터 ‘매우 부적절하다(1점)’까지 Likert 5점 척도를 이용하여 델파이 2차 조사의 설문을 개발하였다.

3차 조사의 설문은 2차 조사 결과에 대하여 집중경향(중앙값, Md)과 변산도(중앙 50%를 포함하는 점수 범위, 사분점간 범위)를 산출하여 구성하였다. 이때 2차 조사의 결과, 중앙값과 사분점간 범위의 일치뿐만 아니라 전문가 의견을 반영하여 수 관련 일부 요소에 대한 재범주화를 실시하였다. 3차 조사 설문지에는 2차 조사 결과에 따라 정리된 산술적 사고 요소별 중앙값(Md),

사분점간 범위([])와 해당 전문가의 2차 조사 응답(①~⑤)을 표기함으로써 전체 전문가의 응답과 자신의 응답을 비교하여 적절성을 재판단하고 수정할 수 있는 기회를 제공하였다. 또한 만약 해당 전문가의 의견이 대다수의 전문가들의 응답 결과와 달리 사분점간 범위를 벗어날 경우 의견란에 그 이유를 기술하도록 하여 소수 의견으로서 자료를 활용하였다.

3. 자료 분석

3회에 걸쳐 델파이 조사를 실시한 후 각 요소별 평균, 표준편차, 델파이 조사의 신뢰도와 타당도를 측정하였다. 이때 신뢰도는 일반화 가능성도 계수(Generalizability Coefficient)로 추정할 수 있으므로(이종성, 2001) Cronbach's Alpha 계수를 산출하여 분석하였다. 한편 델파이 조사의 타당도는 전문가 의견에 대한 합의도와 수렴도로 측정되기 때문에 합의도와 수렴도가 낮은 요소를 조정하여 타당도를 높일 수 있다(박수진, 2016; 이종성, 2001). 선행 연구(박수진, 2016)에 기초하여, 사분위수 75%의 응답자가 응답한 Q3과 25%의 응답자가 응답한 Q1의 차($Q_3 - Q_1$)를 구하여 합의도(사분위수 범위, IQR)를, $\frac{Q_3 - Q_1}{2}$ 으로 수렴도(사분편차)를 분석하였다. 합의도는 IQR이 1 이하일 때 적절히 합의되었다고 하며, 수렴도는 사분편차가 0.5 이하일 경우 적절히 수렴되었다고 볼 수 있으므로, 합의도와 수렴도가 모두 적절하지 않게 분석된 항목은 삭제하거나 그 적절성에 대한 논의를 통해 재고하였다. 결과적으로, 4가 '적절하다'인 점을 고려하여 델파이 3차 조사에서 항목별 평균이 4 이상인 요소를 추출하여 신뢰도, 합의도와 수렴도를 확인하고 그 요소가 델파이 조사에 따른 산술적 사고 요소로 추출 가능한지 파악하였다. 만약 합의도와 수렴도

가 수용 범위를 벗어날 경우, 전문가 의견 사례에서 해당 요소에 관한 내용을 확인하여 그에 대한 논의를 통해 최종적으로 수용 여부를 결정하였다. 이차적으로 '적절하다'가 4, '보통이다'가 3임을 고려하여 평균이 3 초과 4 미만으로 나타난 요소에 대해서도 수렴도와 합의도, 전문가 의견 사례를 확인하여 논의를 통해 델파이 조사에 따른 산술적 사고 요소로의 추출을 결정하였다. 중간 값인 3을 초과할 경우에는 산술적 사고 요소로 볼 수 있는 가능성이 있기 때문이다.

최종적으로, 문헌 분석 결과와 델파이 조사 결과를 종합하여 산술적 사고의 요소를 추출하였다.

IV. 연구 결과

1. 델파이 조사를 통해 추출한 산술적 사고 요소

가. 델파이 1차 조사에서 추출된 산술적 사고 요소

자유기술식으로 실시한 1차 조사에서 전문가들로부터 수합된 산술적 사고 요소는 크게 수, 연산 관련의 두 가지 요소로 구분되었다. 물론 이러한 요소들은 산술 내용 측면과 과정 측면으로도 범주화가 가능하다. 그러나 양자를 이원적으로 구분하기에는 한계가 따르며, 앞서 문헌 분석 결과에서도 산술적 사고 요소는 크게 수 관련과 연산 관련 요소로 범주화되었기에 연구의 일관성을 위해 여기서도 동일하게 수와 연산 관련으로 범주화할 필요를 파악하였다. 결과적으로 1차 조사 결과, 산술적 사고 요소는 수 관련 요소 10개(<표 IV-1>), 연산 관련 요소 19개(<표 IV-3>)로 정리된다.

나. 델파이 2차, 3차 조사 결과 - 수 관련 산술적 사고 요소

1) 평균과 표준편차

10가지 수 관련 산술적 사고 요소에 대한 평균과 표준편차 결과는 <표 IV-1>과 같다.

10가지 요소 모두 4.00 이상의 평균을 보여, 대부분의 전문가가 수 관련 10가지 요소 모두를 산술적 사고 요소로 적절하다고 생각하고 있음을 알 수 있다. 따라서 모든 요소에 대해 합의도와 수렴도를 확인하여 델파이 조사에 따른 산술적 사고 요소로 추출 가능한지 파악하였다.

2) 신뢰도

수 관련 산술적 사고 요소에 대한 델파이 2차와 3차 조사의 신뢰도를 분석하였으며 그 결과, 델파이 2차와 3차 조사 모두 Cronbach's Alpha 계수 0.866으로, 0.8 이상의 높은 신뢰도를 보였다.

3) 합의도와 수렴도

수 관련 10개 요소 중에서 8개 요소, 즉 수의 의미 이해하기, 수 표현하기, 자릿값과 십진법, 위치적 기수법 이해하기, 수의 크기 및 수 계열

이해하기, 양 사이의 관계 이해하기, 수량 어렵하기, 수의 성질 이해하기, 양적 추론하기 요소는 3차 조사 결과 IQR이 1 이하로, 전문가들 간에 적절한 동의가 이루어졌다고 볼 수 있다. 반면 나머지 2개 요소, 즉 수 세기, 수 범주의 관계 이해하기는 3차 조사 결과, IQR이 각각 1.75, 1.75로 나타남으로써 합의도가 낮은 요소로 파악되었다.

3차 조사 결과 수 관련 10개 요소 중에서 사분편차가 0인 1개 요소, 즉 자릿값과 십진법, 위치적 기수법 이해하기에 대해서 수렴되었다고 볼 수 있다. 양적 추론하기는 0.38로, 수의 의미 이해하기, 수 표현하기, 수의 크기 및 수 계열 이해하기, 양 사이의 관계 이해하기, 수량 어렵하기, 수의 성질 이해하기는 0.5로 수렴된 것으로 분석되었다. 반면 수 세기, 수 범주의 관계 이해하기의 2가지는 0.88로 낮은 수렴도를 보였다. 이 요소들은 앞서 낮은 합의도를 보였던 요소에 해당된다. 따라서 이 2가지 요소에 대해서는 전문가 의견 사례 및 관련 문헌을 고려하여 이후 산술적 사고 요소로의 추출 여부에 관해 추가적으로 논의하였다.

<표 IV-1> 수 관련 산술적 사고 요소 델파이 평균 및 표준편차

산술적 사고 요소		델파이 2차		델파이 3차	
		평균	표준편차	평균	표준편차
수	수의 의미 이해하기(0 포함)	4.44	0.98	4.56	0.78
	수 세기(일대일대응, 묶어 세기 등)	4.06	1.00	4.17	0.98
	수 표현하기(수 쓰기, 읽기 등)	4.17	1.04	4.22	0.81
	자릿값, 십진법, 위치적 기수법 이해하기	4.44	0.92	4.61	0.85
	수의 크기 및 수 계열 이해하기	4.28	0.89	4.56	0.78
	양 사이의 관계 이해하기	4.28	0.89	4.56	0.78
	수 범주(자연수, 분수, 소수)의 관계 이해하기	4.00	1.08	4.00	1.03
	수량 어렵하기	4.11	1.02	4.00	1.08
	수의 성질 이해하기	4.06	0.87	4.00	0.97
	양적 추론하기	4.39	0.92	4.56	0.86

4) 전문가 의견 사례

수 관련 산술적 사고 요소에 대한 일부 전문가 의견 사례를 정리한 결과, 주목할 것은 평균 4.17, 표준편차 0.98로 분석되었으나 낮은 합의도 (IQR 1.75)와 수렴도(사분편차 0.88)를 보였던 수 세기와 평균 4.00, 표준편차 0.97로 나타났던 수의 성질 이해하기에 대해 전문가들이 추가적으로 피력한 의견이다. 합의도와 수렴도가 다소 낮은 요소였음에도 불구하고, 일부 전문가들은 수 세기를 매우 기본적이고 중요한 산술적 사고 요소로 생각하는 것으로 나타났다. 따라서 4.17이라는 평균을 고려하여 델파이 조사에 따른 산술적 사고 요소로 추출할 가능성을 파악할 수 있다. 합의도와 수렴도 분석에서 기준을 벗어나지는 않았으나 3차 조사 결과 4.00의 낮은 평균과 0.97의 표준편차를 보였던 수의 성질 이해하기에 대해서는 다수의 전문가가 산술적 사고 요소로 부적절하다는 의견을 추가로 진술함으로써, 이를 산술적 사고 요소로 포함시키는 것을 재고할 필요를 파악하였다. 한편 부수적으로, 양 사이의 관계 이해하기가 양적 추론하기와 유사한 내용을 의미하는 요소로 볼 수 있기 때문에 두 요소를 통합할 것을 제안한 전문가 의견도 있었다.

5) 델파이 조사 결과 추출된 수 관련 산술적 사고 요소

10가지 수 관련 요소 모두 평균 4.00 이상으로 나타났고(<표 IV-1>), 수 관련 모든 요소가 델파이 조사 결과 산술적 사고 요소로 추출될 가능

성을 지닌다. 다만, 합의도와 수렴도가 낮게 나타난 수 세기, 수 범주의 관계 이해하기의 2개 요소에 대한 논의가 요구된다. 이 중 수 범주의 관계 이해하기는 평균(4.00) 및 표준편차(1.03) 결과로 볼 때에도 평균이 4.00 경계선으로 나타났을 뿐만 아니라 충분히 합의된 요소로 볼 수 없기 때문에 최종적으로 델파이 조사에 따른 수 관련 산술적 사고 요소 추출에서 제외하였다. 반면 수 세기는 평균이 4.17로, 4(적절하다)를 초과하였을 뿐만 아니라 수 세기는 산술에 있어서 가장 기초가 되고 중요한 산술적 사고 요소라는 전문가 의견을 반영하여 산술적 사고 요소로 선정하였다. 한편, 수의 성질 이해하기는 4.00의 경계에 위치한 평균과 0.97의 표준편차를 보였으나 다수의 전문가들이 산술적 사고 요소로서 부적절함을 추가적으로 피력하였기 때문에 그 요소를 산술적 사고 요소로 수용함에 있어서 전문가들의 충분한 합의가 이루어지지 못한 것으로 판단하고, 최종적으로 수 관련 산술적 사고 요소에서 제외하였다. 결과적으로, 델파이 조사 결과 추출된 수 관련 산술적 사고 요소 8가지를 정리하면 <표 IV-2>와 같다. 앞서 전문가 의견 사례에서 파악된 양 사이의 관계 이해하기와 양적 추론하기의 통합 문제는 이후 관련 문헌을 면밀히 고찰하여 최종적인 산술적 사고 요소 추출시 함께 진술하였다.

<표 IV-2> 델파이 조사 결과 추출된 수 관련 산술적 사고 요소

델파이 조사 결과 추출된 수 관련 산술적 사고 요소	
• 수의 의미 이해하기(0 포함)	• 수 세기(일대일대응, 묶어 세기 등)
• 수 표현하기(수 쓰기, 읽기 등)	• 자릿값, 십진법, 위치적 기수법 이해하기
• 수의 크기 및 수 계열 이해하기	• 양 사이의 관계 이해하기
• 수량 어렵하기	• 양적 추론하기

다. 델파이 2차, 3차 조사 결과 - 연산 관련 산술적 사고 요소

1) 평균과 표준편차

19가지 연산 관련 산술적 사고 요소에 대한 평균과 표준편차 결과는 <표 IV-3>과 같다.

대부분의 전문가가 연산 관련 19가지 요소 중 사칙연산의 의미와 원리 이해하기, 사칙연산 수행하기, 순차적으로 계산하기, 효율적인 계산 방법 개발하기, 연산의 성질 이해하기, 연산 사이의 관계 이해하기, 문제 상황에 적절한 연산 선택하기, 연산 과정 및 결과에서 오류 인지하기,

연산 기호와 등호의 개념 이해하기, 알고리즘 발견하기의 10가지 요소를 산술적 사고 요소로 적절하다고 생각하고 있음을 알 수 있다. 어렵 계산하기, 식으로 표현하기, 산술 용어 이해하기, 상황을 수학적으로 모델링하기, 주어진 정보 파악하기, 예상과 확인하기, 거꾸로 풀기, 귀납적 추론, 연역적 추론은 낮은 요소별 평균을 보였기에, 전문가들이 이 요소들은 산술적 사고 요소로 덜 적절하다고 생각함을 알 수 있다. 또한 예상과 확인하기(1.04), 거꾸로 풀기(1.02), 귀납적 추론(1.04), 연역적 추론(1.13)은 상대적으로 높은 표준편차를 보여, 이를 통해 이 요소들에 대해서

<표 IV-3> 연산 관련 산술적 사고 요소 델파이 평균 및 표준편차

산술적 사고 요소		델파이 2차		델파이 3차	
		평균	표준편차	평균	표준편차
연산	사칙연산의 의미와 원리 이해하기	4.44	0.86	4.78	0.43
	사칙연산 수행하기	4.22	1.00	4.39	0.92
	순차적으로 계산하기(절차적 사고)	3.89	0.83	4.22	0.73
	효율적인 계산 방법(전략) 개발하기	4.06	0.80	4.33	0.77
	연산의 성질(교환법칙, 결합법칙, 분배법칙 등) 이해하기	3.78	1.00	4.06	0.80
	연산 사이의 관계 이해하기	4.00	1.03	4.28	0.96
	어렵 계산하기	3.72	0.96	3.72	0.96
	연산 기호와 등호의 개념 이해하기 (등호의 대칭성 포함)	4.00	1.14	4.00	1.03
	식으로 표현하기	3.89	0.96	3.83	0.79
	산술 용어 이해하기	4.06	0.80	3.89	0.76
	상황을 수학적으로 모델링하기	3.44	1.20	3.56	0.98
	주어진 정보 파악하기(분석적 사고)	3.22	0.94	3.39	0.85
	예상과 확인하기	3.56	0.98	3.44	1.04
	거꾸로 풀기(가역적 사고)	3.78	0.94	3.72	1.02
	문제 상황에 적절한 연산 선택하기	4.17	0.86	4.33	0.69
	연산 과정 및 결과에서 오류 인지하기(반성적 사고)	4.00	0.84	4.06	0.80
	알고리즘 발견하기(일반화)	3.89	0.96	4.00	0.91
	귀납적 추론	3.72	0.96	3.50	1.04
	연역적 추론	3.22	1.16	3.28	1.13

는 일부 전문가들의 의견이 상이함을 알 수 있다. 앞서 언급하였듯이, 평균이 3 초과로 나타난 19가지 요소 모두에 대해 합의도와 수렴도를 확인하여 델파이 조사에 따른 산술적 사고 요소로 추출될 수 있는지 파악하였다.

2) 신뢰도

연산 관련 요소에 대한 델파이 2차와 3차 조사의 신뢰도를 분석한 결과, 연산 관련 요소에 대한 2차(0.864)와 3차(0.836) 조사 또한 Cronbach's Alpha 계수 0.8 이상의 높은 신뢰도를 보였다.

3) 합의도와 수렴도

연산 관련 요소 각각에 대한 합의도를 분석한 결과, 연산 기호와 등호의 개념 이해하기(IQR 1.75), 거꾸로 풀기(2), 알고리즘 발견하기(1.75) 요소는 낮은 합의도를 보였고, 그 밖의 16가지 요소는 3차 조사 결과 모두 IQR이 1 이하로, 전문가들 간에 적절한 동의가 이루어진 것으로 나타났다.

연산 관련 산술적 사고 요소에 대해 사분편차로 수렴도를 측정한 결과, 델파이 3차 조사 결과, 연산 관련 19개 요소 중에서 2개 요소, 즉 사칙연산의 의미와 원리 이해하기, 산술 용어 이해하기는 사분편차가 0으로 나타남으로써 수렴되었다고 볼 수 있다. 또한 연산의 성질 이해하기(0.38), 연산 과정 및 결과에서 오류 인지하기(0.38)에 대해서도 다소 수렴된 것으로 분석되었다. 나머지 요소 중에서 사칙연산 수행하기, 순차적으로 계산하기, 효율적인 계산 방법 개발하기, 연산 사이의 관계 이해하기, 어렵 계산하기, 식으로 표현하기, 상황을 수학적으로 모델링하기, 주어진 정보 파악하기, 예상과 확인하기, 문제 상황에 적절한 연산 선택하기, 귀납적 추론, 연역적 추론의 12개 요소는 사분편차 0.5로 수렴

되는 것으로 나타났다. 19개 요소 중 나머지 3개 요소인 연산 기호와 등호의 개념 이해하기, 알고리즘 발견하기는 각각 0.88, 거꾸로 풀기는 1로 낮은 수렴도를 보였다. 이 요소들에 대해서는 전문가 의견 사례 및 관련 문헌을 고려하여 추가적으로 논의하였다.

4) 전문가 의견 사례

연산 관련 산술적 사고 요소에 대한 일부 전문가 의견 사례를 정리한 결과, 주목할 내용은 크게 두 가지이다. 첫째, 3 초과 4 미만의 평균을 보였으나 전문가들이 해당 요소가 산술적 사고 요소임에 대해 추가 의견을 진술한 경우이다. 둘째, 3 초과 4 미만의 평균을 보였으나 그 요소가 산술적 사고 요소라고 단정 짓기 어렵다는 추가 의견을 피력한 경우이다.

일부 전문가들은 어렵 계산하기, 식으로 표현하기, 산술 용어 이해하기, 상황을 수학적으로 모델링하기, 예상과 확인하기를 중요한 산술적 사고 요소로 보았으며, 다른 전문가들은 거꾸로 풀기, 귀납적 추론, 연역적 추론을 산술적 사고 요소로 국한하기 어렵다는 의견을 제기하기도 하였다.

- 연산과 관련된 산술적 사고에서 가장 중요한 것은 연산 개념 이해, 연산 사이의 관계 이해, 어렵에 대한 이해라고 생각합니다.
- 산술적 사고 요소로서 추론만큼이나 식으로 표현하기가 중요하다고 생각합니다.
- 주어진 산술 용어를 단순히 이해하는 정도는 충분히 산술적 사고 요소라고 볼 수 있습니다.
- 연산을 위한 기본적인 이해뿐만 아니라 수학적 모델링, 문제 해결을 위한 전략들이 고려되어야 한다고 생각합니다.
- 상황에 따라 산술적 모델링을 할 수 있는 경우는 매우 많습니다.
- 예상과 확인하기는 시행착오를 거쳐 정답을 찾는 문제 해결 전략으로 대표적인 산술적 사고라 할 수 있습니다.

- 가역적 사고는 산술에서도 필요한 사고라고 볼 수도 있겠으나 이를 산술적 사고에만 국한한 사고라고 보기는 어렵습니다.
- 초등학교 수학에서의 연산 자체는 산술적 사고에 의한 것이며 따라서 연산 과정에서 오류를 인지하는 것은 매우 적절한 산술적 사고라고 할 수 있습니다.
- 귀납적 추론이 사고라는 측면에서 매우 중요하고 필수적인 요인으로 간주되는 것은 사실이지만, 산술적 사고에 특정되는 것이 아니라 는 점에서 산술적 사고 요소로 보는 것에는 한계가 있습니다.
- 귀납적 추론의 일부 단계는 산술적 사고에 관련될 수도 있겠으나 그 사고 자체는 산술적 사고와는 거리가 멀다고 생각합니다.
- 초등학교에서 수학 문제를 귀납적인 방식으로 접근하여 이해하고 해결하는 것이 중요합니다. 그러나 연역적 추론은 산술적 사고와는 거리가 있습니다.

5) 델파이 조사 결과 추출된 연산 관련 산술적 사고 요소

연산 관련 19가지 요소 중 10가지가 평균 4.00 이상으로 나타났다(<표 IV-3>). 이 중 합의도와 수렴도가 낮게 나타난 연산 기호와 등호의 개념 이해하기(IQR 1.75, 사분편차 0.88), 알고리즘 발견하기(일반화)(IQR 1.75, 사분편차 0.88)의 2개 요소는 평균 및 표준편차 결과로 볼 때에도 평균이 4.00 경계선으로 나타났고 추가적으로 이 요소가 산술적 사고 요소라는 의견을 제시한 사례가 없었기 때문에 전문가들이 생각하기에 적합도가 낮은 것으로 파악되어 최종적으로 전문가들이 생각하는 연산 관련 산술적 사고 요소에서 제외하였다. 다수의 선행 연구(기정순, 정영옥, 2008; 김성준, 2002a, 2003b; 김정원, 방정숙, 최지영, 2016; 이화영, 2011 등)에서 이러한 2가지 요소를 대수적 사고와 직접적 관련이 있는 요소로 제시하고 있는 것도 이러한 판단을 뒷받침한다.

한편 평균이 4.00 미만의 수치를 보였던 9가지 요소 중에서 어렵 계산하기, 식으로 표현하기, 산술 용어 이해하기, 상황을 수학적으로 모델링하기, 예상과 확인하기는 산술에 있어서 가장 기초가 되고 중요한 요소라는 다수의 전문가 의견 및 선행 연구(김성준, 2003a; 이화영, 2011; 최지선, 박교식, 2009 등)의 결과를 반영하여 제외하지 않고 델파이 조사 결과 연산 관련 산술적 사고 요소로 선정하였다. 나머지 4가지 중 거꾸로 풀기는 산술적 추론의 중요한 요소라는 선행 연구(이화영, 2011)에서의 주장이 있었음에도 불구하고, IQR 2, 사분편차 1의 매우 낮은 합의도와 수렴도를 보였고 일부 전문가 의견에서도 그에 반하는 주장이 제기되었기 때문에 최종적으로 연산 관련 산술적 사고 요소에서 제외하였다. 또한 나머지 3가지, 즉 주어진 정보 파악하기, 귀납적 추론, 연역적 추론은 낮은 요소별 평균을 보였을 뿐만 아니라, 귀납적 추론과 연역적 추론이 산술적 사고와 직결된다고 보기 어렵다는 전문가들의 의견을 제기되었기에, 이를 통해 전문가들이 이러한 3가지 요소는 산술적 사고 요소로 덜 적절하다고 생각함을 알 수 있다.

이러한 결과에 기초하여 델파이 조사 결과 추출된 연산 관련 산술적 사고 요소 13가지를 정리한 후, 수 관련, 연산 관련 산술적 사고 요소를 성질, 관계, 적용 측면으로 범주화하여 정리하면 <표 IV-4>와 같다. 이때 델파이 조사 시 연산 관련 요소로 포함하여 다루었던 산술 용어 이해하기는 문헌 분석 결과에 기초할 때 수와 연산 모두에 해당하는 요소이므로 공통 요소로 재배치하였다. 한편, 수 관련 요소로 다루었던 양적 추론하기는 김성준(2003b), 이화영(2011)에 기초할 때 수와 연산 모두에 해당되는 요소로 볼 수 있으므로 마찬가지로 공통 요소에 포함시키기로 하였다.

2. 문헌 분석과 델파이 조사를 통해 추출한 최종 산술적 사고 요소

문헌 분석 결과(<표 II-2>)와 델파이 조사 결과(<표 IV-4>)를 종합하여 두 결과에 공통으로 포함된 요소를 파악하여(<표 IV-5>) 최종적으로 산술적 사고 요소를 추출하였다(<표 IV-6>).

이때 수 관련 산술적 사고 요소 중에서 양 사이의 관계 이해하기는 양적 추론과 유사한 의미를 함의하기 때문에 두 요소를 통합할 것을 제안한 델파이 전문가 의견에 기초하여 두 요소를 통합하고 최종적으로 양 사이의 관계 이해하기는 제외하였다. <표 IV-1>에서도 볼 수 있듯이 두 요소의 3차 델파이 조사 결과의 평균이 4.56으로 동일하고 비슷한 수치의 표준편차를 보인 것도 이러한 판단을 뒷받침한다. 수의 성질 이해하기는 문헌 분석 결과 추출된 요소이기는 하나, 본 연구에서 이차적으로 실시한 델파이 조사 결과에서 산술적 사고 요소로 추출되지 않아 최종

산술적 사고 요소에서 제외되었다. 한편 수량 어렵하기, 어렵 계산하기는 델파이 조사에서 추출된 요소이기는 하나 문헌 분석 결과, 산술적 사고 요소라기보다는 수 감각과 밀접한 관련이 있는 요소로 파악되고, 전문가 의견 분석 결과에서도 각각 4.00, 3.72의 낮은 평균과 1.08, 0.96의 높은 표준편차를 보였기 때문에 최종적으로 본 연구의 산술적 사고 요소에서 제외하였다. 반면, 식으로 표현하기와 연산 과정 및 결과에서 오류 인지하기는 문헌 연구에는 제시되지 않았으나 각각 3.83, 4.06의 평균을 보였을 뿐만 아니라, 매우 중요한 산술적 사고라는 전문가들의 의견이 있어 최종적으로 산술적 사고 요소로 포함하였다. 최종적으로 추출된 요소는 <표 IV-6>과 같이 18가지이다.

<표 IV-4> 델파이 조사 결과 추출된 산술적 사고 요소

	수 관련 요소	연산 관련 요소	공통 요소
성질	<ul style="list-style-type: none"> • 수의 의미 이해하기(0 포함) • 수 세기(일대일대응, 묶어 세기 등) • 수 표현하기(수 쓰기, 읽기 등) • 자릿값, 십진법, 위치적 기수법 이해하기 	<ul style="list-style-type: none"> • 사칙연산의 의미와 원리 이해하기 • 사칙연산 수행하기 • 순차적으로 계산하기(절차적 사고) • 효율적인 계산 방법(전략) 개발하기 • 연산의 성질(교환법칙, 결합법칙, 분배법칙 등) 이해하기 • 식으로 표현하기 	<ul style="list-style-type: none"> • 산술 용어 이해하기
관계	<ul style="list-style-type: none"> • 수의 크기 및 수 계열 이해하기 • 양 사이의 관계 이해하기 	<ul style="list-style-type: none"> • 연산 사이의 관계 이해하기 	
적용	<ul style="list-style-type: none"> • 수량 어렵하기 	<ul style="list-style-type: none"> • 어렵 계산하기 	<ul style="list-style-type: none"> • 양적 추론하기
		<ul style="list-style-type: none"> • 상황을 수학적으로 모델링하기 • 예상과 확인하기 • 문제 상황에 적절한 연산 선택하기 • 연산 과정 및 결과에서 오류 인지하기(반성적 사고) 	

<표 IV-5> 문헌 분석과 델파이 조사로부터 추출된 산술적 사고 요소 비교

	문헌 분석	델파이 조사	
수	수의 의미 이해(다양한 수 인식 및 표현, 일대일대응 등 수 세기, 기수법 이해)	수의 의미 이해하기(0 포함)	수의 의미 이해하기
		수 세기(일대일대응, 묶어 세기 등)	수 세기
		수 표현하기(수 쓰기, 읽기 등)	수 표현하기
수	수의 성질 이해	자릿값, 십진법, 위치적 기수법 이해하기	자릿값, 십진법, 위치적 기수법 이해하기
		수 비교 (두 양 또는 여러 양 비교, 같은 그룹과 다른 그룹의 수 비교 포함)	수의 크기 및 수 계열 이해하기
		수 사이의 관계 이해	양 사이의 관계 이해하기
연산	연산의 의미 이해 계산하기(연산 수행 방법, 알고리즘, 수 구구 이해 및 전략 사용)	수량 어렵하기	양적 추론하기
		사칙연산의 의미와 원리 이해하기	사칙연산의 의미와 원리 이해하기
		·사칙연산 수행하기 ·순차적으로 계산하기(절차적 사고) ·효율적인 계산 방법(전략) 개발하기	사칙연산 수행하기 절차에 맞게 순차적으로 계산하기
		식으로 표현하기	효율적인 계산 방법 개발하기
		연산의 성질 이해	연산의 성질 이해하기
		연산 사이의 관계 이해	연산 사이의 관계 이해하기
		어림 계산하기	—
		예상과 확인하기	예상하고 확인하기
		상황을 수학적으로 모델링하기	상황을 수학적으로 모델링하기
		문제 상황에 적절한 연산 선택하기	문제 상황에 적절한 연산 선택하기
공통	산술 기호 및 용어 이해	연산 과정 및 결과에서 오류 인지하기(반성적 사고)	연산 과정 및 결과에서 오류 인지하기
		산술 용어 이해하기	산술 용어 및 기호 이해하기
		양적 추론하기	양적 추론하기

<표 IV-6> 본 연구에서 추출된 산술적 사고 요소

	수 관련 요소		연산 관련 요소		공통 요소	
성질 측면	수의 의미 이해하기	n1	사칙연산의 의미와 원리 이해하기	o1	산술 용어 및 기호 이해하기	c1
	수 세기	n2	사칙연산 수행하기	o2		
	수 표현하기	n3	절차에 맞게 순차적으로 계산하기	o3		
	자릿값, 십진법, 위치적 기수법 이해하기	n4	효율적인 계산 방법 개발하기	o4		
관계 측면	수의 크기 및 수 계열 이해하기	n5	연산의 성질 이해하기	o5		
			식으로 표현하기	o6		
			연산 사이의 관계 이해하기	o7		
적용 측면			예상하고 확인하기	o8	양적 추론하기	c2
			연산 과정 및 결과에서 오류 인지하기	o9		
			상황을 수학적으로 모델링하기	o10		
			문제 상황에 적절한 연산 선택하기	o11		

V. 결론

본 연구는 산술적 사고의 의미를 탐색하고 산술적 사고 요소를 추출하는 것을 목적으로 한다. 이를 통해 산술적 사고에 관한 연구에 이론적 기초를 제공하고, 나아가 학교 현장의 교사들이 산술적 사고 신장을 위한 지도 방안을 수립함으로써 수학 학습의 중요한 기초가 되는 성공적인 산술 학습을 위한 토대를 마련하는 데 실질적인 도움을 제공하고자 하였다. 본 연구의 결과로부터 다음과 같은 결론을 얻을 수 있다.

첫째, 산술적 사고 관련 선행 연구를 세 가지로 범주화하여 분석한 결과를 종합해볼 때, 산술적 사고는 ‘산술에서의 사고’, ‘산술을 수행할 때의 사고’ 등과 맥락이 일치한다고 볼 수 있다. 우정호, 김성준(2007)에서 대수적 사고를 ‘대수 학습에서 요구되는 사고’로, Smith (2007)에서 함수적 사고를 ‘여러 가지 상황을 함수적인 관점에서 파악하여 처리하는 사고’라고 진술한 것에 기초할 때, 수학적 사고 중에서 이러한 내용적 사고는 ‘○○을 학습할 때 수반되는 사고’ 또는 ‘○○적으로 처리하는 사고’와 같이 명제화가 가능하다. 따라서 산술적 사고를 ‘산술 학습 시 요구되는 사고’, ‘산술을 학습할 때 수반되는 사고’, ‘산술적으로 처리하는 사고’와 같이 명제화할 수 있다. 이때, II장에서 살펴본 산술 개념에 기초한다면, 산술적 사고는 ‘수를 조작하여 답을 구하고 수와 연산의 성질 및 관계를 인식하며 이를 통해 문제를 해결할 때 수반되는 사고’라고 정의할 수 있다.

둘째, 산술적 사고는 18가지 산술적 사고 요소로 구성된다. 산술적 사고 요소는 수 관련 산술적 사고 요소와 연산 관련 산술적 사고 요소, 공통 요소로 범주화된다. 문헌 분석 및 델파이 조사 결과, 수 관련 요소 5개, 연산 관련 요소 11개, 공통 요소 2개가 추출되었다. 구체적으로 수

관련 산술적 사고 요소에는 수의 의미 이해하기, 수 세기, 수 표현하기, 자릿값과 십진법, 위치적 기수법 이해하기, 수의 크기 및 수 계열 이해하기의 5가지가 포함된다. 연산 관련 산술적 사고 요소에는 사칙연산의 의미와 원리 이해하기, 사칙연산 수행하기, 절차에 맞게 순차적으로 계산하기, 효율적인 계산 방법 개발하기, 연산의 성질 이해하기, 식으로 표현하기, 연산 사이의 관계 이해하기, 예상하고 확인하기, 연산 과정 및 결과에서 오류 인지하기, 상황을 수학적으로 모델링하기, 문제 상황에 적절한 연산 선택하기의 11가지가 해당된다. 마지막으로 공통 요소로는 산술 용어 및 기호 이해하기, 양적 추론하기의 2가지가 추출되었다(<표 IV-6>).

본 연구 결과에 따르면, 산술 수행 시 다양한 사고 요소가 수반되기 때문에 산술 교육에 있어서 학생들의 사고 작용에 세심하게 주의를 기울일 필요가 있고, 산술적 사고의 의미와 산술적 사고 요소에 기초하여 학교수학에 산술적 사고가 반영된 양상을 면밀하게 파악해야 한다. 산술 지도 시 사고의 측면을 강조하려는 시도가 끊임 없이 이루어지고 있음에도 불구하고, 그동안 산술적 사고 자체에 관한 연구가 부족하였다. 본 연구에서 파악된 산술적 사고의 의미와 산술적 사고 요소에 기초하여 학교수학에 산술적 사고가 어떻게 반영되어 있는지 파악해볼 수 있고, 이를 토대로 산술적 사고를 중심으로 하는 산술 교수·학습 방안을 모색할 수 있을 것이다.

참고문헌

- 강문봉, 김수미, 송상헌, 박교식, 박영배, 유현주, 이종영, 정동권, 정은실, 정영옥 (2003). **초등 수학교육의 이해**. 서울: 경문사.
- 강완, 김상미, 박만구, 백석운, 오영열, 장혜원

- (2014). **초등 수학교육론**. 서울: 경문사.
- 국립국어원 (2016). **표준국어대사전**. ‘산술(算術)’의 정의.
http://stdweb2.korean.go.kr/search/List_dic.jsp에서 2016년 6월 인출.
- 기정순, 정영옥 (2008). 등호 문맥에 따른 초등학교생의 등호 개념 이해와 지도 방법 연구. **대한수학교육학회지 학교수학**, 10(4), 537-555.
- 김성준 (2002a). 수학 학습에서 이행에 관한 고찰 -산술과 대수를 중심으로-. **대한수학교육학회지 수학교육학연구**, 12(1), 29-48.
- 김성준 (2002b). 대수적 사고의 기원에 관한 고찰. **한국수학사학회지**, 15(2), 49-68.
- 김성준 (2003a). ‘초기대수’를 중심으로 한 초등대수 고찰. **대한수학교육학회지 수학교육학연구**, 13(3), 309-327.
- 김성준 (2003b). ‘대수적 사고’와 관련된 선행 연구 고찰. **대한수학교육학회 2003년도 수학교육학연구 발표대회논문집**, 577-598.
- 김성준 (2004). **대수의 사고 요소 분석 및 학습-지도 방향 탐색**. 박사학위 논문, 서울대학교.
- 김수환, 박성택, 신준식, 이대현, 이의원, 이종영, 임문규, 정은실 (2010). **초등학교 수학과 교재연구**. 경기도: 동명사.
- 김은혜 (2008). **초등학교 6학년 학생들의 산술적 사고에서 대수적 사고로의 이행과정에서 나타나는 현상분석**. 한국교원대학교 대학원 석사학위논문.
- 김정원, 방정숙, 최지영 (2016). Rasch 모델을 통한 초등학교 학생들의 등호 이해 분석. **한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육>**, 55(1), 1-19.
- 도종훈, 최영기 (2003). 수학적 개념으로서의 등호 분석. **한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육>**, 42(5), 697-706.
- 박교식 (1993). 초등학교에서의 함수적 사고와 그의 지도에 관한 연구. **경인교육대학교 논문집**, 27(1), 279-295.
- 박수진 (2016). **델파이 조사를 통한 유아교육기관 원장 리더십 역량 진단 도구 개발 및 원장의 리더십, 교사의 교직 헌신, 부모의 만족도 관계**. 충신대학교 대학원 박사학위논문.
- 방정숙, 최지영 (2011). 범자연수와 연산에 관한 수학 교과서 분석: 일반화된 산술로서의 대수 관점을 중심으로. **한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육>**, 50(1), 41-59.
- 우정호 (2011). **학교수학의 교육적 기초**(제2증보판). 서울: 서울대학교출판문화원.
- 우정호, 김성준 (2007). 대수의 사고 요소 분석 및 학습-지도 방안의 탐색. **대한수학교육학회지 수학교육학연구**, 17(4), 453-475.
- 유미경, 김재홍, 권석일, 박선용, 최지선, 박교식 (2008). 대수 발달의 단계에 관한 드모르간의 관점 연구. **한국수학사학회지**, 21(4), 61-78.
- 이종성 (2001). **델파이 방법(연구방법 21)**. 경기도: 교육과학사.
- 이혜민, 신인선 (2011). 산술과 대수적 사고의 연결을 위한 분수 scheme에 관한 사례 연구. **한국수학교육학회지 시리즈 C <초등 수학교육>**, 14(3), 261-275.
- 이화영 (2011). **초등학생의 대수 추론 능력과 조기 대수(Early Algebra) 지도**. 건국대학교 대학원 박사학위논문.
- 임미인, 장혜원 (2016). 수와 연산 영역 부진 학생의 산술적 사고 수준에 관한 사례 연구 - 초등학교 6학년 한 학생을 대상으로-. **대한수학교육학회지 수학교육학연구**, 26(3), 489-508.
- 최지선, 박교식 (2009). 우리나라 초등학교 1-2학년 수학에서의 수 감각 지도 내용 분석. **대한수학교육학회지 수학교육학연구**, 19(4), 513-530.
- 片桐重男 (1991). **數學的な考え方・態度とその指導 II : 問題解決過程と發問分析**. 이용률, 성

- 현경, 정동권, 박영배 (역) (1992). *수학적인 생각 · 태도와 그 지도 II : 문제해결과정과 발문분석*. 서울 : 경문사.
- Amerom, B. A. (2002). *Reinvention of early algebra. Developmental Research on the Transition from Arithmetic to Algebra*. Utrecht University.
- Baroody, A. J., & Dowker, A. (2003). *The Development of Arithmetic Concepts and Skills: Constructing Adaptive Expertise*. Lawrence Erlbaum Associates, Inc.
- Brownell, W. A. (1947). The place of meaning in the teaching of arithmetic. *Elementary School Journal, 47*, 256-265.
- Buswell, G. T. (1950). Study pupil's thinking in arithmetic. *The Phi Delta Kappan, 31*(5), 230-233.
- Cobb, P., & Meerkel, G. (1989). Thinking strategies : Teaching arithmetic through problem solving. *New Directions for Elementary School Mathematics : 1989 Yearbook, 70-81*. Reston, VA: NCTM.
- De Morgan, A. (1830). *Elements of Arithmetic*. London: Walton.
- Fillooy, E., & Rojano, T. (1989). Solving equations: the transition from arithmetic to algebra. *For the Learning of Mathematics, 9*(2), 19-26.
- Guberman, R. (2016). Development of arithmetical thinking: Evaluation of subject matter knowledge of pre-service teachers in order to design the appropriate course. *International Journal of Science and Mathematics Education, 14*(4), 739-755.
- Howden, H. (1989). Teaching number sense. *Arithmetic Teacher, 36*, 6-11.
- Krysztofiak, W. (2016). *Representational structures of arithmetical thinking: Part I. Axiomathes, 26*(1), 1-40.
- Leontiev, A. N. (2005). On the development of arithmetical thinking in the child. *Journal of Russian and East European Psychology, 43*(3), 78-95.
- Oliveira, H., & Mestre, C. (2014). Opportunities to develop algebraic thinking in elementary grades throughout the school year in the context of mathematics. In Li, Y., Silver, E. A., & Li, S. (Eds.), *Transforming Mathematics Instruction : Multiple Approaches and Practice*, 173-197. NY: Springer.
- Slavit, D. (1999). The role of operation sense in transitions from arithmetic to algebra thought. *Educational Studies in Mathematics, 37*, 251-274.
- Smith, E. (2007). Representational thinking as a framework for introducing functions in the elementary curriculum. In Kaput, J. J., Carraher, D. W., & Blanton, M. L. (Eds.), *Algebra in the Early Grades*, 133-160. NY: Lawrence Erlbaum.
- Thorndike, E. L. (1929). *The Psychology of Arithmetic*. NY: The Macmillan Company.
- Thorndike, E. L. (1962). The psychology of arithmetic. In Joncich, G. M. (Ed.), *Psychology and the Science of Education: Selected Writings of Edward L. Thorndike*. Bureau of publications teachers college, Columbia university.
- van Hiele, P. M. (1986). *Structure and insight: A theory of mathematics education*. Orlando, Fla: Academic Press.
- Warren, E. (2003). The role of arithmetic structure in the transition from arithmetic to algebra. *Mathematics Education Research Journal, 15*(2), 122-137.

An Analysis on Meaning and Factors of the Arithmetical Thinking

Lim, Miin (Seoul Oryu Elementary School)

Chang, Hyewon (Seoul National University of Education)

Arithmetic is the basis of school mathematics and in fact, number and operation in elementary school curriculum is the most basic and essential domain. Even though there has been a consensus that arithmetic should be taught more meaningfully beyond the emphasis of calculation skills and teachers should emphasize the aspect of the arithmetical thinking, it is difficult to find studies which focus on the arithmetical thinking itself. So this research aims to explore the meaning of the arithmetical thinking and extract the arithmetical thinking factors.

In order to solve the research problems, we reviewed and analyzed the literatures and then conducted Delphi survey to extract arithmetical

thinking factors.

From the results of this research, we found the meaning of arithmetical thinking and the arithmetical thinking factors. Especially, the arithmetical thinking consists of 18 factors. It is important to pay attention to students' arithmetical thinking because there are various factors of the arithmetical thinking. It is necessary to identify the aspects of arithmetical thinking reflected in school mathematics based on the meaning of arithmetical thinking and its factors. Based on this, it is possible to find effective teaching and learning methods of arithmetic focusing on the arithmetical thinking.

* Key Words : arithmetical thinking(산술적 사고), arithmetical thinking factors(산술적 사고 요소)

논문접수 : 2017. 10. 10

논문수정 : 2017. 11. 2

심사완료 : 2017. 11. 6