대한수학교육학회지 수학교육학연구 제 27 권 제 4 호
Journal of Educational Research in Mathematics
Vol. 27, No. 4, 727 ~ 745. Nov 2017

함수의 연속성에 대한 역사적 고찰 – 아리스토텔레스의 연속 개념과 해석학의 산술화 과정을 중심으로 –[1)]

백 승 주* · 최 영 기**

본 연구는 함수의 연속성에 대한 학문수학의 개념과 학생들의 인식의 차이를 탐구하기 위해, 아리스토텔레스의 연속 개념 및 함수의 연속성의 역사적 발달과정을 고찰하였다. 연속의 본질을 찾고자 했던 아리스토텔레스는 연속을 '분할 불가능한 하나의 전체'로 특징지었다. 19세기 이전 수학자들은 공간에 기초하여 함수의 연속성을 생각하였지만, 19세기 해석학의 산술화 이후 연속 개념은 현대적인 $\epsilon-\delta$ 정의로 나타났으며, 여러 학자들은 이 과정을 혁명적이라고 생각하였다. 학생들은 아리스토텔레스의 연속 개념 및 산술화 이전 수학자들과 유사한 관점으로 함수의 연속성을 생각하는 경향이 있었으며, 따라서 학생들의 개념을 단순히 오류로 보는 것은 무리가 있다. 함수의 연속성에 대한 본 연구는, 학생들의 오개념으로 인지되고 있는 것들은 때때로 오류라기보다는 역사적으로 존재해왔던 하나의 패러다임적 사고로서 볼 수 있음을 고찰하였다.

Ⅰ. 서론

Russell(2002, p. 122)은 연속함수를 '순수한 수학적 문제'라고 하였다. 그러나 이 '순수한 수학적 문제'에 사용되는 '연속'이라는 단어는 우리가 자주 사용하는 일상적 용어이다. 국어사전에서 연속은 '끊이지 아니하고 죽 이어지거나 지속함'으로 나타나 있다(국립국어연구원, 1999, p. 4356). 학생들은 이와 같은 일상적이고 직관적인 연속의 의미를 수학적 개념에 적용하는 경향이 있다(이진영, 2011, pp. 75-76; Tall & Vinner, 1981, p. 15). 보통 일상적 언어는 수학에 나타나는 상징적 표현과 기호들의 의미를 더 쉽게 이해하는데 도움을 주며, 수학적 상황에 대한 해석과 반성을 용이하게 하기도 한다(김선희, 2004, p. 20). 그러나 연속과 같이 학문수학의 의미와 차이가 있는 일상적 의미를 가진 단어는 때때로 교사와 학생들에게 혼란을 주기도 한다. 흔히 제시되는 예로, $y=1/x$은 학문 수학의 정의에 의하면 정의역의 모든 점에서 연속인 연속함수이다. 그러나 $y=1/x$은 $x=0$에서 정의되어 있지 않고, 따라서 $x=0$에서 끊어져 있는 두 조각의 그래프를 가졌는데, 학생들은 이 함수를 불연속으로 인식하는 경향이 있다(박달원 · 홍순상 · 신민영, 2012; 이경화 · 신보미, 2005; 이진영, 2011; Shipman, 2012; Tall & Vinner, 1981).

본 논문은 함수의 연속성에 대해 학문수학의

* 가재울고등학교, seung07@snu.ac.kr (제1 저자)
** 서울대학교, yochoi@snu.ac.kr (교신저자)
1) 본 연구는 백승주(2015)의 석사학위논문의 일부를 재구성한 연구임.

개념과 학생들의 인식의 차이에 대한 위의 선행 연구들을 바탕으로 왜 학문수학의 연속의 개념이 일상적 연속의 의미와 학생들이 가진 연속의 관념과 차이점을 갖게 되었는지를 연구하고 그 교육적 시사점을 찾고자 한다.

Russell(2002, p. ix)에 의하면 연속의 본질은 무한과 마찬가지로 수학에서 논의되기 이전부터 철학의 한 연구주제였다. 따라서 철학에서 말하는 연속은 사람들의 연속에 대한 생각을 반영할 뿐만 아니라 수학의 연속 개념에 영향을 주었을 것이라 예측할 수 있다. 특히, 그리스의 철학자 아리스토텔레스는 연속의 개념을 체계적으로 정리했는데(정연준 · 김재홍, 2013), 몇몇 논문들은 아리스토텔레스의 연속 개념이 수학의 연속에 영향을 주었다고 보고 있다(Ferraro, 2001, p. 550; White, 1988). 따라서 본 논문에서는 아리스토텔레스의 연속 개념을 검토하고 그것과 현대의 학문수학의 함수의 연속성 및 학생들의 관념과 비교하고자 한다.

다음으로는 함수의 연속성의 역사적 발달 과정을 고찰하고자 한다. 본 연구는 특히 수학에서 함수의 개념이 도입되면서 함수에서 연속성 개념이 현대적인 모습으로 변화하게 된 과정에 초점을 맞춰서 분석 한다. Pierpont(1899, p. 399)는 연속을 '데모크리토스와 아리스토텔레스의 시절부터 철학자들의 논쟁이 되어온 개념'으로 표현하였다. 그리고 Jourdain(1913, p. 664)은 함수의 연속성은 역사적 발달에서 '연속'이라는 단어를 제외한 모든 것이 변하였다고 하였다. 또한 학문수학의 $\epsilon-\delta$를 사용한 정의와 학교수학의 함숫값과 극한값을 사용한 정의는 우리가 일상적으로 생각하는 연속의 모습과 다르다. 일상적인 연속의 의미와 차이가 있는 현대 수학적인 함수의 연속의 정의가 나타나기까지의 과정을 살펴보면서 그 현상을 분석하고자 한다.

따라서 본 논문의 연구 문제는 다음과 같다.

첫째, 아리스토텔레스의 자연철학의 연속의 성격은 무엇이며 이것과 수학적 연속, 그리고 학생들의 연속의 관념과 비교하면 어떤 특징이 있는가?

둘째, 함수의 연속성의 역사적 발달 과정의 특징은 무엇인가? 연속이라는 일상적 개념을 수학에 들여오는 과정은 어떠하며 그 과정에서 연속의 의미는 어떻게 변하였는가?

II. 아리스토텔레스의 연속 개념 분석

유재민은 아리스토텔레스의 저서들을 검토하여 그의 연속 이론을 '기하학적 연속'과 '형상적 연속'으로 특징지었다. 두 연속을 간단히 요약하면 기하학적 연속이란 '무한하게 분할될 수 있는 것'이며, 형상적 연속은 '분할 불가능한 것' (유재민, 2014, p. 14)으로 두 가지 정의는 상충되는 듯한 표현을 가진다. 이에 유재민(2014, p. 205)은 '무한하게 분할될 수 있는' 연속은 제논의 역설에 대한 대답에서, 제논에게 설명하기에 충분한 답변이며, 이에 반해 '분할 불가능한' 연속은 진리로서의 답변이라 설명한다.

1. '무한 분할 가능'

아리스토텔레스는 제논의 역설[2]에 답을 하면

---

2) 제논은 아킬레스가 거북이를 절대 따라잡을 수 없다는 역설을 다음과 같이 제시하였다.
아킬레스가 거북이보다 10배 빨리 달리며, 거북이는 100미터 앞서서 출발한다고 하자. 아킬레스가 경주에서 이기려면 우선 100미터를 따라 잡아야 한다. 그러나 아킬레스가 거북이가 출발한 그 지점에 도착했을 때, 거북이는 10미터 앞에 있게 된다. 다시 아킬레스가 10미터 따라잡으면, 거북이는 1미터 앞에 있게 된다. 그리고 아킬레스가 1미터를 달리면, 거북이는 1/10미터 앞서게 된다. 그리고 이러한 과정은 끝없이 계속된다. 거북이가 조금이나마 항상 아킬레스를 앞서기 때문에, 결국 아킬레스는 결코 거북이를 따라잡

서 만약 거리를 무한히 분할할 수 있다면, 시간도 무한히 분할 할 수 있는 것으로 생각했다. 반면 제논은 거리를 무한히 분할하면서 시간은 무한히 분할될 수 없는 유한한 것들로 보았기 때문에 역설이 나타난 것이다(유재민, 2014, p. 21).

> 시간과 크기에는 같은 분할들이 있을 것이기 때문이다. 만일 둘 중 하나가 무한하다면 다른 하나도 무한할 텐데, 어느 하나가 무한한 방식으로 다른 하나도 무한할 것이다. [⋯] 길이와 시간, 일반적으로 모든 연속적인 것들이 무한하다는 것은 두 가지 방식으로, 즉 하나는 분할의 관점에서 다른 하나는 끝들의 관점에서 야기되기 때문이다.(유재민, 2014, pp. 21-22 재인용)[3]

즉, 아리스토텔레스는 거리와 시간을 무한히 분할할 수 있는 것으로 설명하면서 연속을 '무한하게 분할할 수 있는 것'으로 표현하였는데, 유재민(2014)은 이것을 기하학적 연속의 특징으로 보았다. 기하학적 연속에서 연속체는 '이 부분과 저 부분을 갖는', '서로 다른 것들로 장소상 떨어져 있는 것들로 분할'될 수 있는 것이다(아리스토텔레스, 2008b, p. 40; 유재민, 2014, p. 94). 이 무한 분할의 관점은 현대 수학의 중요한 개념인 미분과 적분을 가능하게 하는 것으로, 현대수학과 연결적 측면에서 검토할 필요가 있다. 그러나 이는 제논에게 설명하기에 충분한 답변으로 연속의 본질적인 측면은 아니다(유재민, 2014).

2. '분할 불가능한 하나의 전체'[4]

아리스토텔레스에게 연속의 진정한 의미는 '분할 불가능한 하나의 전체'를 말하는 듯하다. 유재민(2014, p. 43, p. 66)은 이것을 '형상적 연속'이라고 부르며 진리에 충분한 답변으로 표현하였다. 즉, 진리적인 면에서 볼 때의 연속은 분할을 허용하지 않는 하나의 전체를 이루는 것이다. 「범주론」에서 아리스토텔레스가 연속과 불연속을 구분하는 기준은 '공통의 경계'와 '상대적 위치를 갖는지 여부'이다. 아리스토텔레스는 범주론에서 선은 연속적인 것으로, 그리고 수는 불연속적인 것으로 분류하고 연속적인 것과 불연속적인 것의 구분의 기준을 '공통의 경계'에서 서로 닿는지의 여부와 '상대적 위치'로 다음과 같이 설명하였다(유재민, 2014, p. 124).

> 다른 한편으로, 선은 연속적인 양이다. 그것의 부분이 닿는 한 점, 공통의 경계를 찾는 것이 가능하기 때문이다. 면의 경우에는 선을 찾을 수 있다; 평면의 부분은 어떤 공통의 경계에서 닿기 때문이다.(아리스토텔레스, 1963, p. 13)[5]

> 따라서 장소 또한 연속적인 양인데, 그것의 부분이 하나의 공통의 경계에서 닿아있기 때문이다. (아리스토텔레스, 1963, p. 13)[6]

따라서「범주론」에서 말하는 연속은 '공간상에서 상대적인 위치를 갖는 부분들이 공통의 경계'(유재민, 2014, p. 126)에서 닿아있는 것이다. 즉, 두 개의 다른 선분이 만나서 연속이 되기 위해서는 왼쪽 선분의 끝점과 오른쪽 선분의 시작점이 한 개의 공통 경계 즉, 하나의 점을 서로 공유해야 한다(유재민, 2014, p. 141). 따라서, 두 조각의 선분이 공통 경계점에서 닿고, 그 경계가 구분되어 있는 것이 아닌 하나로 인식되어야 연

지 못하게 된다. (강현영・이동환, 2007, p. 441)

3) 아리스토텔레스 자연학 6권, 2장 233a13-28

4) 본 표현은 유재민(2014)의 '분할 불가능한 것'과 White(1988)의 'natural whole or unity without joints or seams'를 종합하여 표현한 것이다.

5) 범주론, 4b37-5a3

6) 범주론, 5a11-12

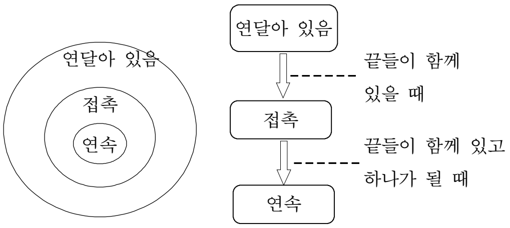
속이라고 말할 수 있다.

아리스토텔레스는 연속의 개념을 좀 더 명확하게 하기 위해서 '연속, 접촉, 연달아 있음'의 개념과 비교하여 설명하였다(유재민, 2014, pp. 127-131).

> 접촉은 연속보다 일반적이고, 연달아 있음은 접촉보다 일반적이므로, 연달아 있음의 설명이 먼저 선행되어야 한다. 어떤 것들이 다른 것들과 연달아 있다는 것은 그들 사이에 같은 종류의 것이 없다는 것이다. (아리스토텔레스, 2008b, pp. 32-33)[7]

> 연달아 있음에 더해서, 끝(limit)이 함께 있을 때 접촉이라 한다. 접촉의 예로서 과거와 미래를 많이 든다. 연달아 있으면서 끝들이 두 개면 접촉이고 연속은 아닌 것이다. 그러나 끝들이 하나가 되면, 그들은 연속이고, 전체는 하나가 된다. (아리스토텔레스, 2008b, p. 33)[8]

즉, 아리스토텔레스는「자연학」6권에서 접촉이 연속보다 크고, 또한 연달아 있음이 접촉보다 크다고 설명한다. 그리고 연달아 있는 관계에서 접촉인 관계로 갈 때는 끝들이 함께 있어야 하며, 끝들이 하나가 되면 연속이 된다. 그 관계를 그림으로 나타내면 다음과 같다.



[그림 II-1] 연달아 있음, 접촉, 연속의 포함관계

지금까지 논의를 종합하면, 아리스토텔레스의 연속은 '분할 불가능한 하나의 전체'를 의미하며, 그것은 접촉하고 있으면서 끝들이 함께 있을 뿐만 아니라 그 끝이 하나인 것 즉, 상대적인 위치를 갖는 어떤 것들이 '공통의 경계에서 닿아 있는 것'으로 요약할 수 있다.

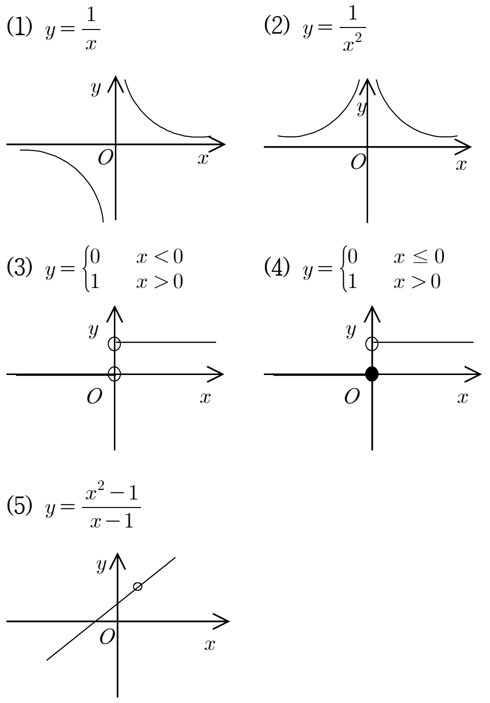
3. 함수의 연속성과 비교

아리스토텔레스의 연속은 시간, 공간 혹은 단일한 연속체에서의 연속 개념인 반면, 함수의 연속성은 변량들 사이의 관계에서의 연속이므로 같은 범주의 연속은 아니다. 그러나 두 연속은 '연속'이라는 동일한 단어를 사용하고 있다. 또한, 일반적으로 고등학교 교육과정에서 함수는 2차원 평면 그래프로 표현되는데, 선행연구들에 따르면 상당한 비율의 학생들이 함수의 연속성의 정의를 배웠음에도 불구하고, 그래프의 이미지와 관련해서 함수의 연속성을 생각한다.[9] 본 장에서는 이에 따른 교수학적 시사점을 고찰하기 위해, 연속의 의미를 규명하려고 했던 아리스토텔레스의 관점에서 함수의 그래프의 연속여부를 판단해보고, 그것을 수학적 정의에 기반 한 함수의 연속성 및 학생들의 생각과 비교해보고자 한다.

가. 연속함수와 비교

본 절에서는 수학적 연속 개념과 아리스토텔레스의 연속을 비교하기 위해 다음의 다섯 가지 함수를 선택하였다.

7) 자연학 6권, 226b34-227a6
8) 자연학 6권, 227a6-17
9) Ely(2007, p. 56)의 연구에서 미적분학을 수강한 학생들 중 절반 이상이 함수의 연속성을 그래프의 연결성과 관련지어 판단하는 경향이 있었고, Bridgers(2007, p. 79)의 연구에서는 83.4%의 학생들이 연속함수는 연결된 그래프를 가져야 한다고 생각했다.



[그림 II-2] 여러 가지 함수

위의 함수들은 $x=0$에서 불연속인 (4) $y=\begin{cases}0 & x\le 0\\ 1 & x>0\end{cases}$를 제외하면 모두 정의역에서 연속인 연속함수이다. 나머지 네 개의 함수들은 연속함수이지만, 여러 논문들에서 학생들이 연속이라고 생각하지 않는 경우가 있거나 또 교과서에서 불연속으로 다루는 경우가 있는 함수로 아리스토텔레스의 관점에서 연속 여부를 고찰하고자 한다.

(1) $y=1/x$은 정의역의 모든 점에서 연속이고 따라서 연속함수이지만, Tall과 Vinner(1981)와 이경화와 신보미(2005)의 연구에서 많은 학생들이 불연속이라 생각한 함수이다. (2) $y=1/x^2$ 역시 정의역의 모든 점에서 연속이므로 연속함수이다. 그러나 (1) $y=1/x$과 다르게 (2) $y=1/x^2$는 $x=0$에서 $\lim_{x\to 0+}1/x^2=\infty$, $\lim_{x\to 0-}1/x^2=\infty$의 형태라는 차이가 있다. (3) $y=\begin{cases}0 & x<0\\ 1 & x>0\end{cases}$은 정의역의 모든 점에서 연속이지만, $x=0$에서 정의되지 않았으며 그래프가 두 조각으로 되어 있고, 한 개의 식으로 표현이 되지 않는다. Ely(2007)는 학생들이 가진 연속 관념을 한 개의 식 또는, 부드러운 곡선으로 설명한 바 있는데, 한 개의 식도 아니고 부드러운 곡선도 아닌 (3) $y=\begin{cases}0 & x<0\\ 1 & x>0\end{cases}$은 아리스토텔레스의 관점에서 어떻게 판단되는지 검토하고자 한다. 박달원 외(2012)는 (5) $y=\frac{x^2-1}{x-1}$와 같이 정의역의 모든 점에서 연속인 함수에 대해 정의역이 아닌 점에서 연속과 불연속을 판단하라는 교과서의 문제에 대해 지적한 바 있으므로 선택하였다.

이제 (1)~(5)의 함수들에 대해 아리스토텔레스의 관점에서 연속여부를 분석하면 다음과 같다.

(1) $y=1/x$과 (3) $y=\begin{cases}0 & x<0\\ 1 & x>0\end{cases}$은 정의역의 모든 점에서 연속이므로 수학적 정의에 의해 연속함수이다. 그러나 아리스토텔레스(2008a, p. 44)에 의하면 연속은 '서로에 대해 위치를 갖고 있어야 하며', '부분들이 하나의 공통된 경계에서 서로 닿아' 있어야 한다. (1) $y=1/x$과 (3) $y=\begin{cases}0 & x<0\\ 1 & x>0\end{cases}$은 모두 두 조각의 곡선으로 이루어진 그래프로서, 두 조각의 그래프는 '서로에 대해 위치를 갖고 있지만' 그러나 '부분들이 하나의 공통된 경계에서 서로 닿아' 있지 않으며, 하나의 공통 경계를 갖고 있지 않다. 따라서 아리스토텔레스의 관점에서 이 그래프는 연속으로 보기 어렵다.

아리스토텔레스는 연속보다 일반적인 개념으로 접촉을, 그리고 접촉보다 일반적인 개념으로 연달아 있음을 말하였는데(아리스토텔레스, 2008b, pp. 32-33), 이 두 개의 곡선은 그 사이에 같은 종류의 것이 없으므로 연달아 있지만, 끝이 함께

있지 않으므로 접촉도 아니다. 즉, 연속보다도 상위의 개념인 접촉을 만족하지 않는다. 따라서 아리스토텔레스의 관점에서 (1) $y=1/x$과 (3) $y=\begin{cases}0 & x<0\\1 & x>0\end{cases}$은 연달아 있는 그래프를 가질 뿐, 연속도 접촉도 아니다.

(2) $y=1/x^2$ 역시 두 조각의 그래프로 이루어진 함수이고, 정의역의 모든 점에서 연속이므로 연속함수이다. 그러나 이 함수는 (1) $y=1/x$과 큰 차이점이 있는데, 두 조각의 그래프 사이에 같은 것이 없으므로 연달아 있으며 끝들이 함께 있다. 즉, $x=0$에서 정의되어 있지 않고, 극한도 존재하지 않지만 $\lim_{x\to 0+}1/x^2=\infty$, $\lim_{x\to 0-}1/x^2=\infty$ 이므로 끝들이 무한대의 어느 점에선가 만날 것과 같은 인상을 준다. 즉, 이 그래프 (2) $y=1/x^2$는 아리스토텔레스의 관점에서 연속은 아니지만, 무한대에서 접촉하는 그래프라고 볼 수 있다.

(4) $y=\begin{cases}0 & x\le 0\\1 & x>0\end{cases}$는 (3) $y=\begin{cases}0 & x<0\\1 & x>0\end{cases}$의 그래프와 비슷한 그래프를 갖지만, $x=0$에서 정의가 되어 있고, $\epsilon-\delta$방법에 의해서 그리고, 학교수학의 방법에 의해서 모두 불연속이다. 또한, 아리스토텔레스의 관점에서 두 조각의 그래프 사이에 같은 것이 없으므로 연달아 있지만 끝들이 함께 있지도 않고, 하나도 아니므로 접촉도 연속도 아닌 불연속이다.

(5) $y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$는 (4)$y=\begin{cases}0 & x\le 0\\1 & x>0\end{cases}$를 제외한 다른 함수들과 마찬가지로 학문수학의 정의에 의하면 정의역의 모든 점에서 연속이므로, 연속함수이다. 그러나 $x=1$에서 구멍이 뚫린 그래프이면서 $\lim_{x\to 1-0}\dfrac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1+0}\dfrac{x^2-1}{x-1}=2$로 $x=1$에서 극한이 존재한다. 따라서 $x=1$에서 두 조각의 그래프의 끝들이 함께 있으므로, 아리스토텔레스의 관점에서 접촉하고 있는 함수라 해석할 수 있다.

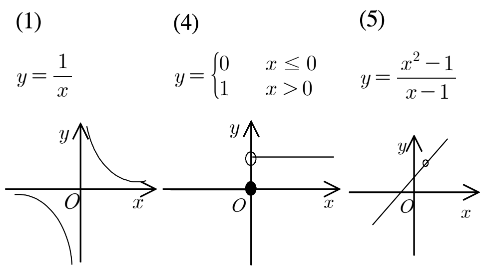
이 분석을 표로 나타내면 다음과 같다.

<표 II-1> 함수의 연속성에 대한 수학과 아리스토텔레스의 분류 비교

	수학적 분류	아리스토텔레스의 분류		
		연속	접촉	연달아 있음
(1) $y=\dfrac{1}{x}$	연속	×	×	○
(2) $y=\dfrac{1}{x^2}$	연속	×	○	○
(3) $y=\begin{cases}0 & x<0\\1 & x>0\end{cases}$	연속	×	×	○
(4) $y=\begin{cases}0 & x\le 0\\1 & x>0\end{cases}$	불연속	×	×	○
(5) $y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$	연속	×	○	○

나. 학생들의 연속의 관념과 비교

본 절에서는 학생들의 연속의 관념과 아리스토텔레스의 연속을 비교하고 그 공통점과 차이점을 논의 하고자한다. [그림 II-2]의 다섯 개의 함수 중 Tall과 Vinner(1981), 이경화와 신보미(2005), 이진영(2011)의 연구에서 제시된 학생들의 반응과 비교하기 위해 3개의 함수 (1) $y=\dfrac{1}{x}$, (4) $y=\begin{cases}0 & x\le 0\\1 & x>0\end{cases}$, (5) $y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$를 선택하였다.



[그림 II-3] 여러 가지 함수

(1) $y=\frac{1}{x}$은 학문수학에서 연속이지만 아리스토텔레스의 관점에서는 불연속이며, $x=0$에서 두 그래프가 접촉하지 않고 연달아 있는 그래프이다. 그러나 Tall과 Vinner(1981)의 논의에서 학생들은 '함수가 원점에서 정의되지 않았고', '그래프가 한 조각이 아니기 때문에'와 같은 이유로 연속으로 보지 않는 경우가 있었다. 특히 Tall과 Vinner(1981)의 연구에서는 41명의 연구 참여자중 35명이 이 함수를 불연속으로 보았으며, 이경화와 신보미(2005)의 연구에서는 20명 중에 12명의 학생이 불연속으로 보았다. 또, 이진영(2011)의 연구에서는 287명중 224명이 불연속으로 판단하였다.

(4) $y=\begin{cases}0 & x\le 0\\ 1 & x>0\end{cases}$는 한 점 $x=0$에서 끊어져 있는 두 조각의 그래프를 가진 함수일 뿐 아니라, $x=0$에서 함숫값과 극한값이 존재하면서 서로 다르기 때문에 불연속이다. 따라서 이 함수는 수학적으로도 불연속이며, 앞에서 살펴보았듯이 아리스토텔레스의 관점에서도 불연속이고, Tall과 Vinner(1981)의 연구에서도 41명의 학생 중 38명의 학생이 불연속이라고 판단하였다

(5) $y=\frac{x^2-1}{x-1}$의 함수 역시 $x=1$에서 정의되어 있지 않은 두 조각의 끊어진 그래프이지만 학문수학의 정의에 의하면 정의역의 모든 점에서 연속인 연속함수이다. 반면, 아리스토텔레스의 정의에 의하면 상대적인 위치에 있는 두 조각의 그래프가 공통의 경계인 한 점을 공유하지 않기 때문에 불연속이라는 사실을 관찰했다. 이 함수에 대해 이경화와 신보미(2005, p. 53)의 연구에서 20명의 학생들 중 19명의 학생들이 불연속이라고 생각했으며, 이진영(2011)의 연구에서는 304명의 학생 중 259명이 불연속으로 판단하였다. 이 결과를 종합하면 다음과 같다.

<표 II-2> 연속 또는 불연속 함수에 대한 아리스토텔레스의 분류와 학생들의 인식 비교

	아리스토텔레스의 분류	학생들의 인식
(1) $y=\frac{1}{x}$ (연속함수)	불연속, 접촉도 아니며 연달아 있음.	Tall과 Vinner(1981)의 연구에서 41명 중 35명이 불연속으로 판단. 이경화와 신보미(2005)의 연구에서는 20명 중에 12명의 학생이 불연속으로 판단. 이진영(2011)의 연구에서는 287명 중 224명이 불연속으로 판단
(4) $y=\begin{cases}0 & x\le 0\\ 1 & x>0\end{cases}$ ($x=0$에서 불연속)	불연속, 접촉도 아니며 연달아 있음	Tall과 Vinner (1981)의 연구에서 41명중 38명이 불연속으로 판단
(5) $y=\frac{x^2-1}{x-1}$ (연속함수)	불연속, 접촉	이경화와 신보미(2005)의 연구에서 20명 중 19명이 불연속으로 판단. 이진영(2011)의 연구에서는 304명의 학생중 259명이 불연속으로 판단

위의 3개의 함수에 대해서 학생들은 아리스토텔레스의 분류와 일치하게 불연속으로 생각하는 경향이 있다는 것을 알 수 있었다. 그러나 위의 결과는 단지 3개의 함수에 대해서만 분석을 한 것이므로, 연구 결과를 일반화하고 신뢰도를 높이기 위해서 더 많은 함수에 대해 학생들의 관념과 아리스토텔레스의 개념을 비교할 필요가 있다.

III. 함수 연속성의 역사적 고찰

연속은 오래 전부터 사람들이 사용해왔던 일상적인 단어이다. 고대 피타고라스학파는 시간과

공간이 연속적으로 변한다는 인식을 했으며, 그리스인들은 도형의 넓이와 부피가 연속적으로 변한다고 인식한 바 있다(정연준 · 김재홍, 2013). 그리고 앞장의 분석을 통해서, 연속의 개념을 체계적으로 정리한 고대 아리스토텔레스의 연속의 개념이 학생들의 직관적인 개념과는 닮았지만, 현대 수학의 함수의 연속성과 많이 다르다는 것을 보았다. 본 장에서는 역사적 고찰을 통해서 수학에서 함수의 연속성이 어떤 과정을 거쳐서 현대적인 형태를 갖게 되었는지를 탐구하고자 한다.

수학에서 연속은 함수 개념의 발달과 함께 17, 18세기부터 연속함수와 관련지어 사용되었고 19세기 후반 Cauchy와 Weierstrass에 의해 현대적인 개념으로 정립되었다. 이 장에서는 함수 개념의 출현 시기부터 Cauchy와 Weierstrass 방식의 함수의 연속의 정의에 이르기까지 역사적 발달 과정을 살펴보고자 한다.

1. 함수 개념의 출현과 발달

함수의 연속성은 함수 개념의 발달과 역사적으로 밀접하게 관련되어 있다(Dimitrić, 2003, p. 1). 그리고 Kleiner(1989)는 함수 개념의 발달을 기하학적 이미지와 대수적 표현 또는 식으로서 나타나는 해석적 표현 사이의 긴장으로 표현하였다. 이는 함수를 '펜으로 그린 연결된 곡선' 또는, '문자를 사용한 식'의 두 가지 모두를 만족시키면서 당시의 수학적인 체계에 맞게 정의하고자 하는 수학자들의 노력으로 해석된다. '함수'의 용어가 최초로 사용된 것은 1673년 Leibniz에 의해서인데(Youschkevitch, 1976, p. 56), 이때 Leibniz는 '곡선과 관련된 한 대상을 표현'하기 위해 함수라는 용어를 사용했다(Kleiner, 1989, p. 283). 즉, '접선은 곡선의 함수이다'라는 것이 그 대표적 예이다. 그리고 1718년 베르누이는 변수들이 결합하는 방식으로서 함수를 생각하였다(Kleiner, 1989, p. 284). 오일러는 1748년에 그의 저서「Introductio in Analysin infinitorum」에서 곡선의 특징으로서 연속을 생각했는데, 특히 연속적인 곡선은 '해석적 표현'으로 쓰여 질수 있다고 판단했다(Schubring, 2005, p. 26).

> 변하는 양의 함수는 변하는 양과 수 또는 상수양들이 임의의 방법으로 결합된 해석적 표현이다. 따라서 변수 z가 상수인 경우를 제외하고, 모든 성분에 관한 해석적 표현은 z의 함수가 된다. 따라서 $a+3z\,;\,az-4z^2\,;\,az+b\sqrt{a^2-z^2}\,;\,c^z\,;$ etc.는 z의 함수이다. (Euler, 1988, p. 3)

즉, 오일러는 연속인 곡선은 해석적 표현이라고 생각하였다. 그리고 불연속인 곡선은 한 개의 식으로 표현이 되지 않기 때문에 여러 개의 곡선의 조각의 결합으로 인식 하였고, 그런 의미에서 이런 곡선을 '불연속인' 또는 '혼합된'이라고 표현하였다(Schubring, 2005, p. 26). 그러나 $y=\sqrt{x^2}$의 경우 한 개의 식으로 표현되므로 연속이지만, 또 동시에, $y=\begin{cases} x\,, & x\ge 0 \\ -x, & x<0 \end{cases}$, $y=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^2}{x^2+t^2}dt$로 표현될 수 있다. 따라서 같은 함수가 연속으로도 불연속으로도 되는 문제점이 후에 Cauchy에 의해 제기되었다(Dimitrić, 2003, pp. 1-2; Youschkevitch, 1976, p. 73). 이로 인해 해석적 표현 또는 대수적 식이 함수의 근본적인 성질을 나타낼 수 없다는 사실이 알려졌다(정연준 · 김재홍, 2013, p. 573).

한편, 함수를 정의하는 Euler의 관점도 시간에 따라 변하였는데, Euler는 1755년에 저술한「Institutiones calculi differentialis」에서 함수를 '해석적인 표현'이 아닌 다음과 같이 정의하였다.

이러한 방식으로 다른 것들에 의존하는 그러한 양들, 즉, 다른 것들이 변할 때 변화를 겪는 것들을 우리는 그 양들의 함수라고 부른다...... 따라서 x가 변하는 양을 결정할 때, x에 의존하여 변하는 어떤 것들 또는 x에 의해 결정되는 것을 우리는 x의 함수라고 부른다.(Euler, 2000, p. vi)

즉, 1755년 Euler는 종속적 관계로서 함수를 인식했으며, 더 이상 '해석적 표현'으로 인식하지 않았다. 그리고 Arbogast는 1791년 그의 저서에서 contigue의 개념과 discontigue의 개념을 소개하였다. Arbogast는 오일러의 정의에서 불연속으로 분류된 함수 중에 함수의 규칙이 변하는 곳에서 함수가 붙어 있을 때는 contigue로 함수의 규칙이 변하는 곳에서 함수가 붙어있지 않을 때는 discontigue로 분류하였다. Schubring는 이러한 Arbogast의 contigue와 discontigue의 개념을 현대적 의미의 연속, 불연속의 구분에 좀 더 가까워진 연속 개념과 관련된 중요한 성과로 설명하였다(Schubring, 2005, p. 26).

18세기에 다음과 같은 '진동하는 끈'과 관련된 논란이 함수 개념의 변화를 촉진시켰다(Kleiner, 1989, p. 285).

고정된 두 경계(0과 l)를 가진 탄력 있는 끈의 초기 모양이 만들어 진 후, 진동하도록 하였다. 문제는 시간 t에서 끈의 모양을 표현하는 함수를 결정하는 것이다. (Kleiner, 1989, p. 285)

1747년 D'Alembert는 위의 '진동하는 끈' 문제 해를 다음의 편미분 방정식으로 제시하였다.

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

$$y(x,t) = \frac{\phi(x+at)+\phi(x-at)}{2}$$

(Kleiner, 1989, p. 286)

Euler는 D'Alembert가 구한 해가 모든 해를 다 포함하는 것은 아니며, 일부의 해만을 표현한다는 생각을 갖고 있었다. D'Alembert는 $\phi(x)$를 한 개의 해석적 표현으로 생각했지만, Euler는 $\phi(x)$가 한 개의 해석적 식이 아니라, '여러 개의 해석적 식'의 결합으로 표현 되도 된다고 생각했으며, 또한 식이 아니라 '손으로 그린 곡선'도 가능하다고 생각했다(Kleiner, 1989, pp. 285-287). 이 당시에 Euler의 관점에서 '여러 개의 해석적 식'과 '손으로 그린 곡선'은 함수가 아니었고, 따라서 연속도 아니었다. 그러나 Euler가 진동하는 끈의 해를 구하는 과정에서 이러한 성질을 가진 곡선들을 생각한 것은 현대적인 함수 개념으로 한 걸음 다가간 것으로 볼 수 있다. 즉, 진동하는 끈에 대한 Euler와 D'Alembert의 논쟁 결과 다음의 것들이 함수로서 고려되었다(Kleiner, 1989, p. 288).

(a) 다른 구간에서 해석적으로 표현되는 함수들이 조각적으로 정의된 것

예) $f(x) = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$

(b) 해석적 표현의 결합으로 주어지지 않더라도 손으로 그려진 것(Kleiner, 1989, p. 288)

Kleiner(1989, pp. 291-292)는 함수 개념의 진보에 대한 공헌은 Dirichlet에게, 함수의 연속개념의 진보에 대한 공헌은 Cauchy에게 돌리고 있다. Dirichlet는 1829년 그의 논문에서 함수를 '임의의 대응'으로 소개하였으며, 모든 점에서 불연속인 유명한 Dirichlet 함수를 소개하였다. 즉, 손으로 그려지거나 식으로 표현되는 함수가 아닌, 정의역과 공역의 원소 사이의 임의의 대응이라는 현대적인 함수개념이 나타났다.

2. 함수의 연속성 개념의 체계화

현대적인 함수의 연속성에 대한 중요한 성과는 Cauchy에 의해 이루어졌다(Kleiner, 1989). Cauchy는 1821년 저서「Cours d'analyse」에서 함수의 연속성을 다음과 같이 정의하였다.

> 변수 x에 대한 함수 $f(x)$에 대해, 주어진 두 개의 경계 사이의 x의 각 값에서, 함수가 항상 유일한 유한 값을 갖는다고 하자. 두 경계 사이에 속하는 값 x에서 무한히 작은 증분 α만큼 더하면, 함수는 차 $f(x+\alpha)-f(x)$만큼 증가한다. 이것을 고려하면, 주어진 경계 사이의 각 x에 대해 $f(x+\alpha)-f(x)$의 값이 α와 같이 작아질 때, 함수 $f(x)$는 주어진 경계 사이에서 연속이다. 다른 말로, 주어진 경계 사이가 그 값에서 무한히 작아지는 것이 함수 자체의 무한히 작은 증분을 만들면 함수 $f(x)$는 주어진 경계 사이의 x에서 연속이다. (Cauchy, 2009, p. 26)[10)]

또한, Cauchy는 다음과 같이 어떤 구간에서 함수가 연속이 되기 위해서는 함숫값이 유한한 실수값 이어야 한다고 생각했다.

> 우리가 만약 연속에 대해 생각하면, 변수 x의 두 개의 유한 경계 사이에서 함수들이 연속으로 남아있어야 한다. 그들은 두 경계 사이에서 언제나 실수이며, 그 구간에서 절대로 무한이 되지 않는다. (Cauchy, 2009, p. 27)

즉, Cauchy에게는 어떤 구간에서 함숫값이 항상 실수로 존재해야 연속인 함수이다. 그러면서 Cauchy는 또한, 'x의 특정한 값의 근방에서 함수 $f(x)$의 연속이 멈추면, 불연속'이라 하였다. 그렇기에 '두 개의 함수 $\frac{a}{x}$와 x^a (단, $a=-m, m$은 정수)은 $x=0$에서 무한이 되며, 따라서 불연속'이라고 서술하였다(Cauchy, 2009, p. 26, p. 28).

Cauchy는 또한, '직선 또는 굽어진 연속적 선'의 그래프로 표현될 수 있는 함수는 연속이고 따라서 연속함수는 '중간값 정리'의 특징을 지님을 말하기도 하였다(Cauchy, 2009, pp. 31-32).

한편, Riemann은 1854년에 그의 논문에서 함수 $f(x)=1+\frac{(x)}{1^2}+\frac{(2x)}{2^2}+\frac{(3x)}{3^2}+\cdots$를 소개하였는데, 이 함수는 해석적으로 표현되지만, 리만적분이 불가능한 함수로 Kleiner는 Riemann의 이 저서를 '수학적으로 불연속인 것에 대한 이론의 시작'으로 평가하였다(Kleiner, 1989, p. 293).

3. Weierstrass의 $\epsilon-\delta$방법

해석학의 엄밀성에 대한 Cauchy의 기여에 대해 학자들의 의견은 다양하다. Grabiner(1983)와 같이 $\epsilon-\delta$방법이 Cauchy에 의해서 시작되었다고 주장한 학자들이 있는 반면, Schubring은 Cauchy의 방법은 Weierstrass보다는 18세기의 Newton과 Leibniz의 전통과 일치한다고 보고 있다(Tall & Katz, 2014, p. 98). 학자들 사이에 Cauchy에 대한 관점이 일치하지는 않지만 적어도 Cauchy는 해석학의 엄밀성을 추구한 과도기에 있는 것으로 보인다.

1872년 Weierstrass는 그의 유명한 함수 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b^n \cos(a^n \pi x)$, ($a$는 홀수인 정수, b는 $(0,1)$사이의 실수, $ab>1+3\pi/2$)를 소개하였는데, 이 함수는 모든 곳에서 연속이지만, 모든 곳에서 미분 불가능한 함수로 '우리가 가진 모든 직관과 위배'되는 함수이다. 이러한 함수들이 등장하면서 '해석학의 기초'에 대한 의심과 함께 '해석학의 산술화'에 대한 필요성이 인식되었고, 함수의 연속은 다음과 같은 Weierstrass의 정적인

---

10) Lakatos(2001, p. 233)는 Cauchy의 연속에 대한 정의를 '보통의 상식이 충격을 받을 수밖에 없는 그러한 방식으로, 산술적 언어로 번역'한 것이라 하였다.

$\epsilon-\delta$표현으로 나타났다(Kleiner, 1989, p. 293).

> “x의 어떤 구간 안에서, 그 구간에 있는 임의의 값 x_0와 임의의 작은 양수 ϵ에 대하여, x_0주위의 한 구간의 모든 값에 대해서 차 $f(x)-f(x_0)$의 절댓값이 ϵ보다 작은 x_0주위의 한 구간을 찾을 수 있으면 $f(x)$는 그 구간에서 연속”이다. (Boyer, 1949, p. 287)

4. 산술화의 관점에서 변화 분석

가. 공간적 직관에서 탈피

Klein(1896, pp. 241-242)은 Weierstrass이후의 해석학을 ‘수학의 산술화’의 결과로 특징지으며 Weierstrass 이전의 수학자들의 작업과 구분하였다. 즉, Weierstrass 이전에 Newton과 Leibniz 그리고 Euler와 같은 수학자들은 공간에 대한 직관을 토대로 미적분학을 발달시켰지만, 이후에는 산술화된 수학으로 공간적 직관에서 벗어났다.

일반적으로 사람들은 함수의 그래프를 점의 움직임으로 만들어진 곡선으로, 그리고 그 곡선은 연속이라고 생각하는 경향이 있다(Pierpont, 1899, pp. 397-398). 이는 ‘펜을 종이에서 떼지 않고 그린 곡선’이라는 식의 학부 미적분학의 정의와 잘 맞물린다. Klein이 말한 ‘수학의 산술화’는 점의 움직임의 결과와 같은 연속적인 곡선에 대한 생각을 ‘산술적 언어로 변환’한 것이다(Pierpont, 1899, p. 400).

19세기 후반 자연적 공간에 대한 연속의 관념을 산술적 방법으로 해석할 때, 수학자들은 공간의 직관에 잘 들어맞는 산술적 체계를 찾으면서, 동시에 변환의 결과로 나타난 모순들을 처리하는 두 가지 과제를 해결해야 했다(Klein, 1896, p. 243). 그 노력의 결과가 바로 현대의 해석학이며, 연속 함수는 $\epsilon-\delta$의 방법으로 나타났다. 그러나 Pierpont(1899, p. 402)에 의하면 자연적 공간과 그의 대응물인 현대의 해석학적 체계는 동일하지 않다. 직관적 개념과 대응하는 산술적 체계를 찾았지만 그것은 서로 조화되는 최선의 선택을 한 것이지 완벽하게 일치하는 것은 아니라는 것이다. 그에 대한 한 예로, 우리가 직관적으로 인식하는 곡선은 길이를 갖는데 이 길이 L을 산술적으로 형식화한 것은 다음과 같다.

> 곡선 또는 곡선의 호는 길이를 가졌고, 이 길이는 수 L이다. 이 수는 두 끝점 $P, P_1, P_2, \cdots, P'$ 사이의 곡선의 점들의 수들을 취하고, 그들의 합 $\sum \overline{P_i P_{i+1}}$을 구하는 것이다. P와 P'사이의 모든 곳에서 점들이 조밀할 때 이 합의 극한이 L이다. (Pierpont, 1899, p. 402)

또한 Weierstrass의 함수 $y=\sum_0^{\infty} b^n \cos a^n \pi x$ ($0<b<1,\ a>1,\ a$는 홀수인 정수)는 연속이지만 어떤 구간에서는 길이를 갖지 않으며, 따라서 위의 길이에 대한 산술적 해석이 항상 성립하는 것은 아니다. 즉, 공간적 직관에 대한 산술적 해석 또는 산술적 변환은 선험적인 것이라 볼 수 없으며, 어떤 면에서는 다소 임의적인 성격을 띤다(Pierpont, 1899, p. 402). 특히, Wilder(1967, p. 115)는 어떤 자연적 대상을 공리적으로 형식화할 때, 그 ‘본성의 희생 없이는 불가능하다’고 표현하기도 하였다.

Lakatos(2001, pp. 197-198)에 의하면 수학자는 어떤 공간의 직관적 대상을 정의할 때, 두 가지 중에 한 가지를 선택해야 한다. 예를 들어 다면체에 대해 정의를 한다고 하자. 수학자는 ‘낡은 관념을 완전히 버리고, 그것을 새로운 개념으로 대치’ 할 수도 있다. 하지만 이렇게 되면, 직관적 다면체와 수학적 다면체 사이에 아무런 유사성도 남지 않게 되며, 우리가 수학적 다면체를 연구할 때 직관적 다면체에 대해 어떤 정보도 얻을 수 없다. 다른 한 가지 선택은 정의는 ‘본질

적인 특징들을 명확하게 하는 명료화이며, 일종의 번역'이라는 관점을 받아들이고 '어떤 용어의 의미를 보존하면서 좀 더 분명한 언어로 번역'하는 것이다. 하지만 이러한 번역 역시 확실히 참인 번역인지 알기 어렵다.

즉, 어떤 직관적 대상을 수학적으로 정의하고자 할 때, '원래의 애매한 개념의 몇 가지 본질적인 측면은 이러한 번역에서 상실' 될 수도 있고, '새로운 분명한 개념은 낡은 개념이 소용되기를 바라던 문제해결에 소용이 되지 않을 수도' 있다(Lakatos, 2001, p. 220). 그리고 이것이 바로 Wilder(1967, p. 115)가 말한 수학적 정의에서의 '본성의 희생'이며 Pierpont(1899, p. 402)가 언급한 산술화의 비선험성이다. 그리고 연속함수의 현대적 정의는 '본성의 희생'과 산술화의 비선험성에 대한 한 가지 사례라 볼 수 있다.

나. 집합론의 영향

Lakoff와 Núñez(2000, p. 306, p. 316)는 19세기 후반 이전의 수학, 특히 미적분학을 '기하학적 패러다임'으로 그리고 Weierstrass 이후의 수학을 '이산화 프로그램'에 의한 'Weierstrass 패러다임'으로 특징지었다. 기하학적 패러다임에서 수학자들은 '자연적 연속과 움직임의 관점'에서 곡선을 이해하였다. 그리고 '이산화 프로그램' 이후에 곡선은 공간적 직관에서 벗어나서 '이산적인 점들, 점들의 집합, 점들의 집합 위에서 상징화된 연산'의 관점에서 이해되었다.

Lakoff와 Núñez(2000, p. 279)는 공간이 점들의 집합으로 인식되기 위해 '공간-집합 조합' 은유가 사용되었다고 설명한다. 즉 공간 위의 임의의 선들은 전혀 다른 수학적 요소인 집합으로 변환되며, 선 위의 점들은 집합의 원소들로 변환된다. Lakoff와 Núñez(2000)는 선을 점의 집합의 관점에서 생각한 것을 바탕으로 Weierstrass가 곡선의 연속을 다음과 같은 은유에 의해 산술화한 것으로 이해하였다.

<표 III-1> Weierstrass의 연속 은유 (Lakoff & Núñez, 2000, p. 311)

목표 영역 (자연적 연속 공간)	근원 영역 (수)
이산적인 위치를 가진 점	이산적 수들
곡선	수들의 집합
연속적 곡선에서의 위치를 가진 점	수들의 집합에서의 수
연속적 곡선 위의 점에서 연속적 곡선 위의 점으로의 함수	집합의 이산적 수들에서 집합의 이산적 수들로의 사상으로서의 함수
연속적 곡선에 대해 함수의 연속성	이산적 수들의 함수에서 산술적 근접성의 보존

즉, 곡선 위의 점들을 집합의 수들로 산술화한 결과, 함수는 집합의 원소들의 대응관계라는 현대적인 정의로 나타났고 연속 곡선의 직관적 관념은 이산적 수들의 함수에서 수들의 근접성으로 형식화 되었다. 실제로, 오늘날 함수의 정의는 더 이상 식이나 곡선이 아니며, 정의역과 공역 그리고 그들 사이의 관계인 (f, A, B)의 순서쌍으로 특징지어진다(Dimitrić, 2003, p. 2). 그리고 (f, A, B)의 순서쌍에서는 직관적 연속의 관념을 떠올리기 어려우며, 함수의 연속은 정의역 A의 원소들과 치역 B의 원소들 사이의 '근접성의 보존'으로 변환되었다(Lakoff & Núñez, 2000).

다. 혁명적 발달로서의 산술화

앞에서 논의한 Lakoff와 Núñez(2000)는 산술화 이전의 수학을 '기하학적 패러다임'으로, 산술화 이후의 수학을 '이산화 프로그램'에 인한 'Weierstrass 패러다임'으로 부르며 그 과정을 '패러다임의 이동'(p. 309) 및 'Weierstrass 혁명'(p.

323)이라고 불렀다. 본 절은 이와 같이 수학의 산술화를 혁명적 발달로 본 여러 학자들의 논의를 바탕으로 전개한다.[11)]

Lakatos(2001, p. 245)는 해석학에 대한 Cauchy의 업적을 가리켜 '엄밀성에 대한 코시의 혁명'으로 표현하였다. Cauchy는 이전의 미적분학에 존재하였던 모호한 용어들 예를 들면 '극한, 수렴, 연속'과 같은 표현들을 산술적 용어로 번역하여 그동안 명백하지 않았던 정리들을 증명하면서 해석학의 엄밀성을 성취하였다. Lakatos는 Cauchy의 업적을 이전에 400년간 후퇴되었던 유클리드적 엄밀성의 성취라는 '혁명'으로, 혁명 이후의 발전은 점진적인 것으로 보면서 다음과 같이 말하였다(Lakatos, 1996. p. 31).

> Cauchy에 의한 엄밀성의 혁명 이후에 그들은 천천히 그리고 안전하게 정상을 향하였다. …… 그들은 <해석학의 지나친 모호성을> 수정과 같이 명료한 유클리드 이론으로 변화시켰다. <이 수학자들의 위대한 학파는 놀라운 정의에 힘입어 수학을 회의론으로부터 구해내었고 이들의 명제의 엄격한 논증을 제시하였다>. …… <연속성>이나 <극한> 등의 용어는 <자연수>, <족 class>, <그리고>, <또는>과 같은 용어들로 정의되었다. <수학의 수론화>는 유클리드적 업적 중 가장 훌륭한 것이다. (Lakatos, 1996. pp. 31-32)

즉, Lakatos에 의하면 Cauchy는 19세기에 '수학의 수론화'를 통해 해석학에 혁명적 전환을 가져왔다.

Koetsier(1991, p. 155)는 Lakatos의 과학적 연구 프로그램의 방법론(the Methodology of Scientific Research Programmes, MSRP)을 수학의 역사에도 적용할 수 있다고 보았으며 그것을 '수학적 연구 전통의 방법론(the Methodology of Mathematical Research Traditions, MMRT)'이라고 불렀다. 그리고 MMRT의 예로 18세기 해석학으로부터 19세기 Cauchy와 Weierstrass의 $\epsilon-\delta$를 사용한 해석학으로의 전환을 들었다. Koetsier는 17세기의 미적분학은 '기하학적 전통'으로 18세기 해석학은 '형식주의 전통', 19세기 해석학은 '개념적 전통'으로 특징지을 수 있다고 하였다. 그리고 18세기에서 19세기의 해석학으로의 전환에서 Kuhn의 혁명이라고 부를 만한 작업은 Cauchy에 의해 이루어진 것으로 보았다(Koetsier, 1991, p. 199).

17세기 Newton은 기하학적 동기에 의해 미적분학의 연구를 수행하였으며, 데카르트의 해석기하학은 그 시기에 중요하다고 여겨졌던 기하학의 문제들을 해결하는데 매우 유용하였다. 그러나 18세기에는 오일러와 같은 수학자들에 의해 해석적 식과 같은 개념이 해석학의 주요한 문제로 떠올랐는데, 따라서 Koetsier는 이 시기를 형식주의의 전통이라고 불렀다. 그리고 19세기 Cauchy와 Weierstrass는 개념에 기초하여 엄밀성을 성취했다는 것에서 개념주의 전통이라 명명하였다(Koetsier, 1991).

이러한 Koetsier의 구분은 다음과 같은 Tall의 '수학의 세 가지 세계'의 구분과 유사하다.

- 개념적으로 구체화된 세계는 실세계에서 초기에 보여지고 느껴진 그러나 마음에 상상된, 대상의 특징에 대한 반성과 지각에 기초한다.
- proceptual-기호적 세계는 (세는 것과 같이) 행동을 통해 구체화된 세계로부터 나와서

11) 그러나 Ⅲ장의 3절에서도 언급했듯이 산술화의 시점에 대해 학자들마다 의견이 일치하지는 않는다. Grabiner(1983)는 연속의 $\epsilon-\delta$ 방법이 Cauchy로부터 시작다고 보았지만 Schubring는 Cauchy의 방법은 Weierstrass보다는 18세기의 Newton과 Leibniz의 방법과 일치한다고 보았다(Tall & Katz, 2014, p. 98). 또한, Ⅲ장의 4절에서 살펴본 Klein(1896)과 Lakoff와 Núñez(2000)는 $\epsilon-\delta$ 방법의 공헌을 Weierstrass에게로 돌리고 논의를 전개하였고 본 절에서 논의할 Lakatos(2001)는 산술화를 Cauchy의 업적으로 보았다. 학자들마다 견해의 차이는 있지만, 적어도 두 학자 Cauchy와 Weierstrass 모두 수학의 산술화에 큰 영향을 끼친 것으로 해석할 수 있다.

(수와 같이) 생각할 수 있는 개념으로 기호화 되는 것이다.

- (형식적 정의와 증명에 기초한) 공리적-형식적 세계는 의미의 구성이 알려진 대상에 기초한 정의로부터 이루어지는 것에서, 집합-이론적 정의에 기초한 형식적 개념들에 의해 이루어지는 것으로 바뀐다. (Tall, 2008, p. 7)

Tall은 위의 '수학의 세 가지 세계'를 미적분학과 해석학의 발달에 적용하였다. 17세기의 미적분학에서는 Vieta, Descartes와 같은 학자에 의해 공간에 대한 직관으로부터 산술적, 대수적 세계로의 연결이 이루어졌다. 그리고 이것은 속도, 부피 넓이와 같이 여러 가지 공간적인 양에 대한 수학적 분석을 통해 Newton과 Leibniz의 미적분학으로 이어졌으며, 19세기의 Cauchy와 Weierstrass에 의한 집합론에 기초한 산술화된 해석학으로 발달로 이어졌다(Tall & Katz, 2014, p. 102).

이러한 '수학의 세 가지 세계'에 대한 이론을 바탕으로 Tall과 Katz(2014, p. 97)는 해석학이 '두 가지 근본적으로 다른 방법으로' 이해되고 있다고 설명한다. 즉, Leibniz와 Newton의 곡선에 대한 직관적이고 시각적인 관념과 Cauchy와 Weierstrass의 집합 이론에 기초한 형식적인 해석학의 방법이 근본적으로 다르다고 본 것이다.

이상의 검토를 통해 여러 학자들은 Cauchy와 Weierstrass가 해석학에 혁명에 가까운 급진적인 변화를 주었다고 보고 있음을 알 수 있다. 즉, 미적분학과 해석학의 발달은 Cauchy와 Weierstrass의 시기를 기준으로 근본적인 변화를 겪었으며, 그 주요한 변화 중 한 가지는 공간적이고 직관적인 관념 또는 대수적 식에 의한 관념에서 집합론에 기초한 산술화된 관념으로의 이동 및 그로 인한 엄밀성의 성취로 보인다.

IV. 분석의 결과

II장의 분석을 통해 학생들은 일반적으로 아리스토텔레스의 연속의 개념과 유사한 연속의 관념을 가지고 있으며, 그것을 수학 과목을 할 때도 그대로 적용한다는 사실을 알 수 있었다. 그러므로 학생들이 $y=1/x$과 같은 함수들을 불연속이라고 보는 것에 대해, 이것을 단순히 학생들이 저지르는 오류라고 단정 짓는 것은 무리가 있다. 학생들은 아리스토텔레스의 자연철학에서 바라보는 연속과 유사한 연속의 관념을 갖고 있는 것이다.

그리고 Ely(2007)가 보였듯이, 학생들의 이러한 관념은 미적분학의 발달 초기 수학자들이 함수의 연속을 정의한 것과 많은 면에서 유사성을 보이기도 한다. 이것은 수학의 산술화 이전에, 곡선에 대한 직관적이고 공간적인 관점을 수학에 도입하였고, 이 과정에서 일반적으로 공간에서 연속으로 생각되는 관념을 미적분학의 함수의 연속성으로 도입한 것이기 때문으로 여겨진다.

아리스토텔레스는 '정의에는 사물이 지닌 속성을 설명할 수 있는 원인'이 담겨있다고 하였다(이지현, 2011, p. 58). 즉, 아리스토텔레스의 정의는 일반적으로 우리가 연속이라고 부르는 현상의 특징을 포함한다. 따라서 그것은 우리의 연속의 관념 그리고 국어사전의 정의와 일맥상통한다. 반면에 Núñez와 Lakoff(1998, p. 86)에 의하면 학문수학의 Cauchy와 Weierstrass의 연속의 정의는 '연속의 아이디어들의 핵심의 증유물'이 아니다. 오히려 '연속의 아이디어들의 핵심의 증유물'에 가까운 것은 아리스토텔레스의 연속의 정의로 보이기도 한다.

Núñez와 Lakoff(1998)는 학생들의 연속에 대한 관념을 '자연적 연속'으로 그리고 학문수학의 연속의 개념을 '$\epsilon-\delta$ 연속'으로 구분하였다. '자연적 연속'은 우리가 흔히 생각하듯이, '어떤 움직

임에 의해 그려진 연속'이며 구멍이 없는 직선 또는 곡선으로 나타나는 연속으로 학생들이 가진 연속에 대한 관념이며 본 논문에서 검토한 바와 같이 아리스토텔레스의 연속의 개념과 비슷하다. '$\epsilon-\delta$ 연속'은 수학이 상징적이며 존재론적이라는 관념(Núñez & Lakoff, 1998, pp. 91-92)을 반영한 연속으로 철학적 연속과 다르며, 우리가 일반적으로 생각하는 '자연적 연속' 과도 다르다.

이에 더하여 Núñez와 Lakoff(1998, p. 100)는 학문수학의 '$\epsilon-\delta$ 연속'이 우리의 직관적인 아이디어에 비해 더 엄밀하거나 정확한 정의가 아님을 주장하였다. 만약 $\epsilon-\delta$ 정의가 엄밀하다고 하는 자가 있는 경우에 그 엄밀성은 현대 해석학적 기초 위에서 엄밀한 것일 뿐이라는 것이다. 즉, Núñez와 Lakoff(1998, p. 86)에 의하면 두 개의 연속의 개념은 온전히 다른 개념이며, 어느 하나가 우월하거나 열등한 개념이 아니라 '다른 목적을 가진 다른 개념'이다.

지금까지 논의한 내용을 종합하여 표로 나타내어 보면 다음과 같다.

<표 IV-1> 아리스토텔레스와 학문수학의 비교

	아리스토텔레스의 연속	학문수학의 연속
정의	'분할 불가능한 하나의 전체' '연달아 있으면서 끝이 함께 있고 경계가 하나'(유재민, 2014; White, 1988)	$c\in E,\ f:E\to R$, $\forall\epsilon>0,\quad \exists\delta=\delta(\epsilon)>0$, $\|x-c\|<\delta$이고, $x\in E$이면 $\|f(x)-f(c)\|<\epsilon$이다 (정동명 · 조승제, 1992, p. 166)
학생들의 관념과 비교 (예 $y=\frac{1}{x}$)	학생들의 연속의 관념과 비슷함	학생들의 연속의 관념과 다른 경우가 많음
역사적 발달과 비교	수학의 산술화 이전의 수학자들의 관념과 비슷함	Cauchy와 Weierstrass 이후의 산술화된 수학의 정의와 일치함
Núñez와 Lakoff(1998)의 구분	자연적 연속	$\epsilon-\delta$ 연속

V. 결론

Lakatos(2001, p. 251)는 '성장 기간을 거치지 않는 이론은 없다. 더욱이 이러한 기간은 역사적 관점에서 가장 흥미진진한 것이며, 교육의 관점에서 가장 중요하게 다루어져야' 한다고 하였다. 함수의 연속성은 오랜 성장 과정을 거쳤는데, 본 연구는 그 과정을 분석하여 교육적 시사점을 탐구하였다. 고대로부터 연속이라는 단어가 어떻게 사용되었는지 알아보기 위해 아리스토텔레스의 연속의 의미를 조사하였고, 연속이 함수 개념과 결합되어 사용되면서 어떤 발달과정을 거쳤는지를 알아보았다.

그 결과 아리스토텔레스의 연속은 '분할 불가능한 하나의 전체'이며, '접촉하고 있을 뿐만 아니라 끝들이 하나'라는 의미가 있었는데, 이는 국어사전의 뜻이나 혹은 학생들이 가진 연속에 대한 이미지와 일치하는 반면 학문수학의 함수의 연속 개념과는 차이가 있음을 보았다.

이러한 연속은 18세기 무렵부터 함수 개념과 함께 수학에서 사용 되었는데, 함수의 연속성이 정립되는 과정에서 수학자들은 여러 가지 모순과 반례를 처리하는 등 어려움을 겪었다. 그리고 19세기 후반 Cauchy와 Weierstrass에 의한 해석학의 산술화의 결과로, 함수의 연속은 공간적 직관에서 탈피한 집합론에 기초를 둔 $\epsilon-\delta$의 모습으로 나타났다.

함수의 연속의 산술화된 정의는 일종의 연구 프로그램(Koetsier, 1991)이자 패러다임(Lakoff & Núñez, 2000)이다. 그리고 몇몇 학자들은 그러한 산술화 과정을 혁명적이라고 생각했다. 반면, 학생들은 산술화된 해석학적 패러다임이 아닌, 공간적 직관과 일상적 언어를 바탕으로 사고하는 경향이 있다. 따라서 학생들은 고대 아리스토텔레스의 연속의 정의와 유사한 관점을 갖고 있었으며 또한, 산술화 이전에 함수의 연속성이 정의

되기 시작했던 초기의 수학자들과 비슷한 생각을 갖고 있었다. 그러므로 산술화된 연속의 정의가 학생들에게 익숙하지 않고 학생들이 학문수학의 정의와 다른 관념을 갖는 것은 자연스럽다. 따라서 학생들의 개념을 단순히 오류로 보는 것은 무리가 있으며, 함수의 연속성에 대해 바른 개념과 오개념이라는 이분법적 사고는 지양할 필요가 있다. Núñez와 Lakoff(1998, p. 86)의 표현처럼 두 정의는 다른 목적을 가진 다른 개념인 것이다.

이러한 맥락에서 함수의 연속성에 대한 본 연구는 어떤 오개념들은 학생들의 인지적 미성숙에서 기인하는 것이 아닌 역사적으로도 존재해왔던 하나의 패러다임적 사고로서 볼 수 있음을 제안한다. 즉, 우리가 학생들의 오개념이라고 인지하고 있는 것들은 때때로 과거 위대한 수학자들도 생각했던 근거가 충분한 관념인 동시에 현대적인 정의로 정립되기 위해 거쳐야 했던 과정일 수 있다.

오개념에 대한 교사들의 관점은 수업의 방법과 방향 및 학습의 평가에 영향을 줄 수 있으므로, 교육의 실제에서 그 중요성은 상당하다. 그리고 몇몇 학자들은 미적분학의 역사적 개념들과 학생들의 개념 사이의 유사성에 대해 주장하기도 하였는데(Ely, 2007), 이것은 이와 유사한 다른 사례들이 있을 수 있음을 시사한다. 따라서 함수의 연속성 이외에도 관련된 추가적인 사례에 대한 후속 연구가 필요하다.

참고문헌

강현영 · 이동환(2007). 수학교육에서 상보성. **수학교육학연구, 17**(4), 437-452.

국립국어연구원(1999). **표준국어대사전**. 서울 : 두산동아.

김선희(2004). **수학적 지식 점유에 관한 기호학적 고찰**. 이화여자대학교 대학원 박사학위 논문.

박달원 · 홍순상 · 신민영(2012). 연속함수에 대한 고등학교 교과서의 정의와 고등학생들의 이해. **한국학교수학회논문집, 15**(3), 453-456.

백승주(2015). **함수의 연속 개념의 역사적 고찰**. 서울대학교 대학원 석사학위 논문.

유재민(2014). **아리스토텔레스의 연속 이론 연구**. 서울대학교 대학원 박사학위 논문.

이경화 · 신보미(2005). 상위 집단 학생들의 함수의 연속 개념 이해. **수학교육학연구, 15**(1), 39-569.

이지현(2011). **학교수학에서 대학수학으로 공리적 방법의 이행에 관한 연구**. 서울대학교 대학원 박사학위 논문.

이진영(2011). **교수학적 변환의 관점에서 한 점에서 함수의 연속 · 불연속, 연속함수 정의의 검토**. 이화여자대학교 대학원 석사학위논문.

정동명 · 조승제(1992). **실해석학개론**. 서울: 경문사.

정연준 · 김재홍(2013). 함수의 연속성 개념의 역사적 발달과정 분석-직관적 지도의 보완을 중심으로- **수학교육학연구, 23**(4), 567-584.

아리스토텔레스(1963). *Aristotle's Categories and De Interpretatione*, (Translated with note by Ackrill, J. L.). Oxford University Press.

아리스토텔레스(2008a). **범주들 · 명제에 관하여**. (김진성 역). 서울: 이제이북스.

아리스토텔레스(2008b). *Themistius: On Aristotle Physics 5-8*. (Translated by Robert B. Todd). London: Gerald Duckworth & Co,Ltd.

Boyer, C. B. (1949). *The history of the calculus and its conceptual development*. New York: Dover Publications.

Bridgers, L. C. (2007). *Conceptions of continuity: An investigation of high school calculus* *teachers and their students*. Unpublished doctoral dissertation, Syracuse University, New York.

Cauchy, A. L. (2009). *Cauchy's Cours d'analyse*. (Translated by Bradley, Robert E. & Sandifer, C. Edward). New York: Springer. (The original edition was published in 1821)

Dimitrić, R. M. (2003). Is the function continuous at 0?. arXiv:1210.2930 [math.GM].

Ely, R. (2007). *Student obstacles and historical obstacles to foundational concepts of calculus*. Unpublished doctoral dissertation, university of Wisconsin-Madison, Madison, Wisconsin.

Euler, L. (1988). *Introduction to Analysis of the Infinite: Book Ⅰ*. (Translated by John D. Blanton). New York: Springer-Verlag. (The original edition was published in 1748)

Euler, L. (2000). *Foundations of Differential Calculus*. (Translated by John D. Blanton). New York: Springer. (The original edition was published in 1755)

Ferraro, G. (2001). Analytical Symbols and Geometrical Figures in Eighteenth-Century *Calculus. Studies in History and Philosophy of Science, 32*(3), 535-555.

Grabiner, J. V. (1983). Who gave you the epsilon? Cauchy and the origins of rigorous calculus. *American Mathematical Monthly, 90*(3), 185-194

Jourdain, E. B. (1913). The Origin of Cauchy's Conceptions of a Definite Integral and of the Continuity of a Function. *Isis, 1*(4), 1-703.

Klein, F. (1896). The Arithmetizing of Mathematics. Translated by Isabel Maddison, Bryn Mawr College. *Bulletin of The American Mathematical Society, 2*(8), 241-249.

Kleiner, I. (1989). Evolution of the function concept: a brief survey. *College mathematics journal, 20*, 282-300.

Koetsier, T. (1991). *Lakatos' Philosophy of Mathematics: A Historical Approach*. Amsterdam: Elsevier Science Publishers B.V.

Lakatos. I. (1996). **수학, 과학 그리고 인식론**. (이영애 역). 서울: 민음사. (영어원작은 1978년 출판)

Lakatos. I. (2001). **수학적 발견의 논리**. (우정호 역). 서울: 아르케. (영어원작은 1976년 출판)

Lakoff, G., & Núñez, R. E. (2000). *Where Mathematics Comes From: How the Embodied Mind Brings Mathematics into Being*. New York: Basic Books.

Núñez, R. E., & Lakoff, G. (1998). What Did Weierstrass Really Define? The Cognitive Structure of Natural and continuity. *Mathematical Cognition, 4*(2), 85-101.

Pierpont, J. (1899). On the Arithmetization of Mathematics. *Bulletin of the American Mathematical Society, 5*, 394-406.

Russell, B. (2002). **수리철학의 기초**. (임정대 역). 서울: 경문사. (영어원작은 1919년 출판)

Schubring, G. (2005). *Conflicts between generalization, rigor, and intuition*. New York: Springer.

Shipman, B. A. (2012). A comparative study of definitions on limit and continuity of functions. *Primus, 22*(8), 609-633.

Tall, D. (2008). The Transition to Formal Thinking in mathematics. *Mathematics Education Research Journal, 20*(2), 5-24.

Tall, D., & Katz, M. (2014). A cognitive analysis of Cauchy's conceptions of function, continuity, limit and infinitesimal, with implications for teaching the calculus. *Educational Studies in*

Mathematics, 86, 97-124.

Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics, 12*, 151-169.

White, M. J. (1988). On Continuity: Aristotle versus Topology? *History and philosophy of logic, 9*(1), 1-12.

Wilder, R. L. (1967). The Role of the Axiomatic Method. *The American Mathematical Monthly, 74*(2), 115-127.

Youschkevitch, A. P. (1976). The concept of function up to the middle of the 19th century. *Archive for History of Exact Sciences, 16*(1), 37-85.

A Historical Study on the Continuity of Function - Focusing on Aristotle's Concept of Continuity and the Arithmetization of Analysis -

Baek, Seung Ju (Gajaeul High School)
Choi, Younggi (Seoul National University)

This study investigated the Aristotle's continuity and the historical development of continuity of function to explore the differences between the concepts of mathematics and students' thinking about continuity of functions. Aristotle, who sought the essence of continuity, characterized continuity as an 'indivisible unit as a whole.' Before the nineteenth century, mathematicians considered the continuity of functions based on space, and after the arithmetization of nineteenth century modern $\epsilon-\delta$ definition appeared. Some scholars thought the process was revolutionary. Students tended to think of the continuity of functions similar to that of Aristotle and mathematicians before the arithmetization, and it is inappropriate to regard students' conceptions simply as errors. This study on the continuity of functions examined that some conceptions which have been perceived as misconceptions of students could be viewed as paradigmatic thoughts rather than as errors.

* Key Words : continuity of function(함수의 연속성), Aristotle(아리스토텔레스), indivisible unit as a whole(분할 불가능한 하나의 전체), arithmetization(산술화), paradigmatic thought(패러다임적 사고)

논문접수 : 2017. 10. 10
논문수정 : 2017. 11. 6
심사완료 : 2017. 11. 10